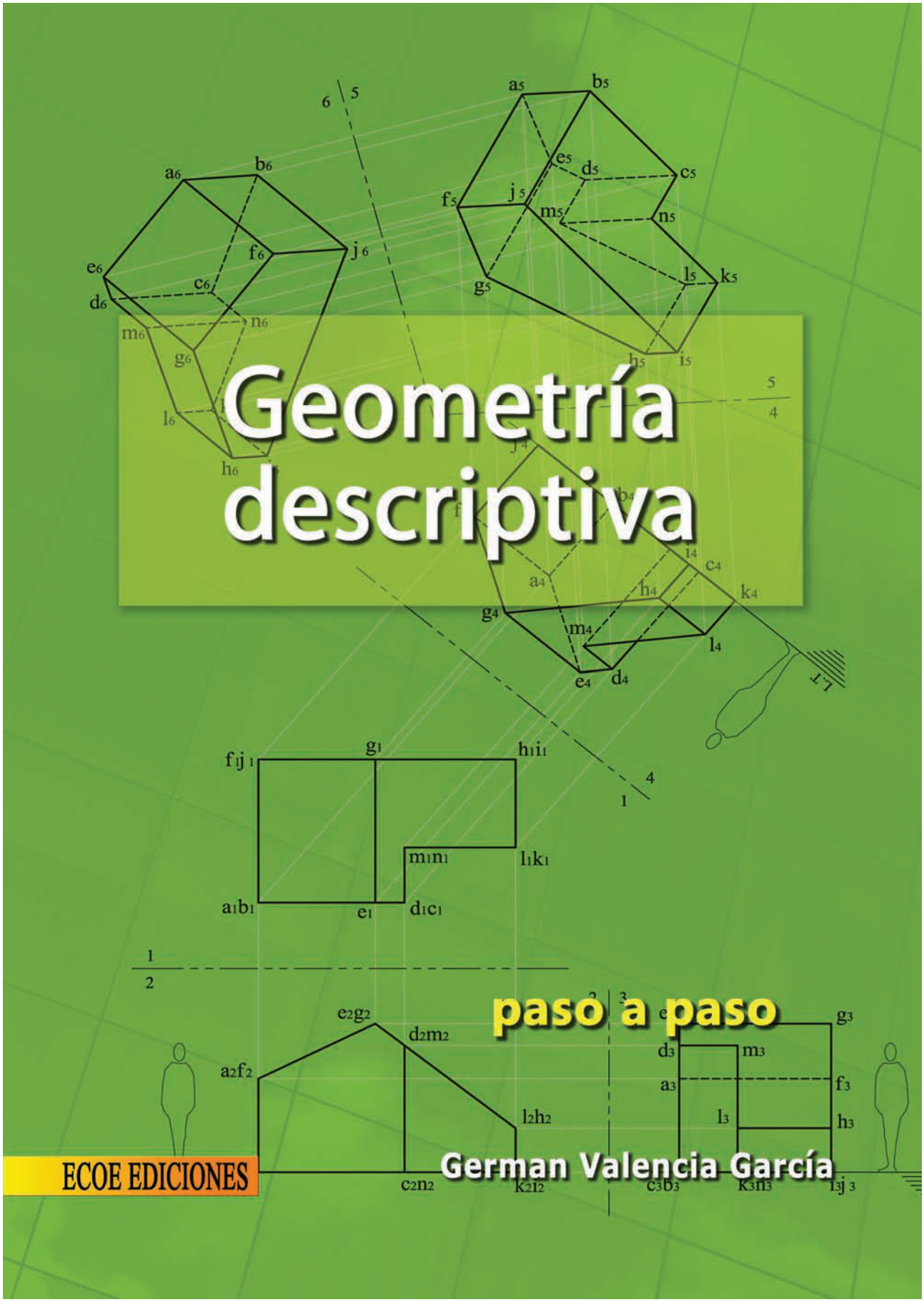
Geometría descriptiva

paso a paso



German Valencia García

ECOE EDICIONES

Germán Valencia García

Arquitecto de la Universidad del Valle, Profesor de geometría descriptiva, dibujo lineal para ingeniería, dibujo aplicado en computador Autocad 2D/3D, y experto en el manejo de 3D Studio Max.

Autor de: *Guía práctica de dibujo para ingeniería*; *Geometría descriptiva, paso a paso* y diversos manuales como material didáctico.

Geometría descriptiva

German Valencia García

Valencia, García Germán
Geometría descriptiva paso a paso / Germán Valencia García. - Bogotá: Ecoe Ediciones, 2009
306 p. : il. ; 24 cm.
Incluye bibliografía
ISBN 978-958-648-601-9
1. Geometría descriptiva 2. Dibujo geométrico I. Tít.
566.6 cd 21 ed.
A1218263

CEP-Banco de la República-Biblioteca Luis Ángel Arango

Colección: Ingeniería y arquitectura
Área: Ingeniería
Primera edición: Bogotá, D.C., mayo de 2009
ISBN: 978-958-648-601-9

© Germán Valencia García
E-mail: gervalengar_67@hotmail.com

© Ecoe Ediciones
E-mail: correo@ecoeediciones.com
www.ecoeediciones.com
Carrera 19 No. 63C-32, Pbx. 2481449, fax. 3461741

Coordinación editorial: Adriana Gutiérrez M.
Autoedición: Germán Valencia G.
Carátula: Magda Rocío Barrero
Impresión: Digiprint Editores E.U.
Calle 63 bis No. 70-49, Tel. 4307050

Impreso y hecho en Colombia

Agradecimientos

Dedico este trabajo a mi querida y amada esposa Claudia, quien con su amor, cariño, y apoyo en forma incondicional, me inspiró a materializar esta obra; a mi hermosa hija Melissa, quien me acompañó con sus manifestaciones de amor, cariño, besos, y abrazos, en las largas jornadas de preparación y trabajo; a mi reciente hijo Nicolás, quien con su inocencia, y forma de ser, trajo mucha alegría a nuestro hogar.

A mis recordados y difuntos padres Jesús y Haydeé, quienes me llenan de sosiego, en los momentos difíciles; a mis hermanos Jesús y Adriana, por su comprensión y afecto; a mi estimado y gran amigo, Dr. Jaime Reyes Salcedo, quien con sus cualidades excepcionales, y gran sabiduría, ha traído bienestar y salud en mi familia.

De igual manera, quisiera manifestar mis agradecimientos, a aquellas personas que en forma directa o indirecta me apoyaron en estos cinco años de trabajo, a mi amigo del alma Arnulfo Alvarez S, muchas gracias por tu sincera amistad, y llenarme de alegría; a mi primo Carlos Mauricio Escobar, quien ha sido como un hermano, y aprecio mucho por su apoyo, y forma de ser; a mi comadre Anyela Martínez, por su comprensión y cariño; a mi amiga Yazmín Eliana Rodríguez, gracias por tus consejos, cariño, y apoyo; a la familia Sarmiento Palacios, en especial a Olga Lucía, y Roosevelt, quienes aprecio por su amistad, y sinceridad; a la cantante Mariah Carey, a quien admiro por su belleza, y prodigiosa voz, sus canciones me ayudaron a concebir ideas, y trabajar en un ambiente agradable; a mi amigo Ing. Fabián Andrés Soto, por su apoyo, y amistad; a mi sobrino Mauricio Lenis Sarmiento, a quien aprecio por su inteligencia, amistad, y talento en el área de las Matemáticas, a mi amiga cibernauta, Ixchel Ocampo, a quien admiro por su inteligencia, y sabias palabras; a mi sobrino Rosemberg Quintero Sarmiento, a quien aprecio por sus habilidades en Shaolin y filosofía; a mi colega y amigo, Ing. Ciro Jaramillo M, quien me invitó a la aventura de escribir y dibujar, durante mis labores de Docencia en la Escuela de Ingeniería Civil y Geomática, de la Facultad de Ingeniería, de la Universidad del Valle; a mi profesor de geometría descriptiva Arq. Jaime Palacios, quien gestó los conocimientos de dicha ciencia, en mi época de estudiante; igualmente, agradezco a la reserva ecológica NIRVANA, por ser el sitio ideal de esparcimiento para descansar la mente y el cuerpo en contacto con la naturaleza; y un agradecimiento muy especial a PONQUES CON AMOR, microempresa familiar, sin la cual no hubiera sido posible la realización de esta obra.

Finalmente, quisiera expresar mis agradecimientos a la editorial Ecoe ediciones, en especial Adriana Gutiérrez, por su amable gestión, comprensión, y paciencia, para llevar a cabo la edición de mis ideas.

Prólogo

Al explorar el extenso campo de la geometría descriptiva, es sorprendente analizar la manera como se resuelven diversos problemas gráficos de Ingeniería y Arquitectura, aplicando teoremas, normas, y reglas elementales en un dibujo de proyección diédrica.

Esta ciencia se ofrece como asignatura obligatoria en la mayoría de planes de estudios universitarios afines al diseño, la construcción, y la medición; se fundamenta en la localización, comprensión, y análisis de los elementos geométricos situados en el espacio, para luego, interpretar y representar en un medio bidimensional; además, proporciona los métodos para definir soluciones gráficas de un determinado problema representable; también, fomenta el desarrollo de la imaginación en aquellas personas que poseen la capacidad de visualizar en la mente un objeto construido o proyectado.

Cuando se aprende esta disciplina, que abarca los elementos geométricos situados en el espacio y sus relaciones entre sí, se presentan ciertas dificultades para su aprehensión; en primer lugar, se debe en gran parte, a la formación secundaria que ha tenido el estudiante en los colegios que no cuentan con una enseñanza especializada en dibujo técnico, donde se utilizan pocos recursos tridimensionales para representar objetos geométricos, y no se incentiva la lectura de planos y/o proyecciones; en segundo lugar, el proceso creativo para imaginar y visualizar procesos constructivos de la forma, ha sido intervenido por los avances tecnológicos que se presentan en la actualidad, ya que muchos estudiantes optan por utilizar estos medios, en vez de aplicar un proceso de raciocinio y análisis gráfico; y por último, existen pocos recursos pedagógicos y bibliográficos necesarios para explicar dicha ciencia.

Como en la actualidad se dibuja en gran parte utilizando el computador mediante diversos software de dibujo CAD, existe una tendencia a subvalorar el dibujo con instrumentos tradicionales (lápiz, escuadras, y compás); dichos recursos digitales no enseñan, ni explican los procesos analíticos y deductivos que se deben emplear para solucionar un determinado problema de geometría descriptiva, ya que se trata de una ciencia abstracta y espacial.

El propósito básico de este libro, es proporcionar al lector el conocimiento de la geometría descriptiva mediante un lenguaje ameno y comprensible para el mismo, valiéndose de explicaciones gráficas conceptuales y fundamentales en 2 y 3 dimensiones; así mismo, describiendo métodos y resolviendo ejemplos de aplicaciones propias de esta disciplina, con explicaciones detalladas, desarrollado en su mayoría en el sistema de proyección ASA; además, se aportarán algunos ejemplos y explicaciones en el sistema de proyección DIN. Al final de cada capítulo, se plantean ejercicios o problemas correspondientes al tema, para que el lector los pueda resolver.

Invito al lector para que explore este maravilloso campo gráfico, y pueda utilizarlo de alguna forma útil cuando lo requiera.

El Autor.

Tabla de contenido

CONTENIDO TEMÁTICO **Página**

Prólogo **11**

Capítulo 1 - Conceptos fundamentales **13**

1.0 ¿Qué es la geometría descriptiva? ……..... 13
1.1 Fundamentos de la proyección diédrica ……. 15
1.2 Sistema de proyección ASA ……... 21
1.3 Sistema de proyección DIN …… 28
1.4 Ejemplos ……. 32
1.4.1 Ejemplo 1 ……..... 32
1.4.2 Ejemplo 2 ……..... 34
1.5 Ejercicios …… 35

Capítulo 2 - Vistas auxiliares **37**

2.0 ¿Qué son vistas auxiliares? ……. 37
2.1 Construcción de las vistas auxiliares ……..... 37
2.2 Clasificación de las vistas auxiliares ……..... 41
2.2.1 Vistas de alzada …… 41
2.2.2 Vistas inclinadas ……... 43
2.2.3 Vistas adyacentes a otra vista auxiliar ……..... 45
2.3 Ejemplos ……. 46
2.3.1 Ejemplo 1 ……..... 46
2.3.2 Ejemplo 2 ……..... 48
2.4 Ejercicios …… 48

Capítulo 3 - Visualización de proyecciones **51**

3.0 Visualización de proyecciones ……... 51
3.1 Visualización y representación de superficies de simple curvatura ……... 54
3.2 Ejemplos ……. 58
3.2.1 Ejemplo 1 ……..... 58
3.2.2 Ejemplo 2 ……..... 61
3.3 Ejercicios …… 64
3.3.1 Ejercicio 1 ……..... 64
3.3.2 Ejercicio 2 ……..... 65

Capítulo 4 - El punto en el espacio **66**

4.0 Definición del punto ……... 66
4.1 El punto en el sistema cartesiano ……... 66
4.2 El punto en el sistema diédrico ……..... 68

4.3 Ejemplos ……. 71
4.3.1 Ejemplo 1 ……..... 71
4.3.2 Ejemplo 2 ……..... 73
4.4 Ejercicios …… 74
4.4.1 Ejercicio 1 ……..... 74
4.4.2 Ejercicio 2 ……..... 74
4.4.3 Ejercicio 3 ……..... 75

Capítulo 5 - La recta en el espacio 76

5.0 Definición de la recta ……. 76
5.1 Determinación de la recta ……... 76
5.2 Verdadera magnitud de la recta ……..... 77
5.3 Angulo real de inclinación de la recta …… 79
5.4 Orientación o rumbo de la recta …… 81
5.5 Clasificación de las rectas ……..... 82
5.5.1 Recta horizontal …… 82
5.5.2 Recta frontal ……..... 83
5.5.3 Recta de perfil …….. 84
5.5.4 Recta vertical …… 85
5.5.5 Recta de punta …….. 86
5.5.6 Recta lateral …….. 87
5.5.7 Recta oblicua ……..... 88
5.6 Ejemplos …… 89
5.6.1 Ejemplo 1 ……..... 89
5.6.2 Ejemplo 2 ……..... 91
5.6.3 Ejemplo 3 ……..... 93
5.6.4 Ejemplo 4 ……..... 95
5.7 Ejercicios …… 97
5.7.1 Ejercicio 1 ……..... 97
5.7.2 Ejercicio 2 ……..... 97
5.7.3 Ejercicio 3 ……..... 97

Capítulo 6 - El plano en el espacio 98

6.0 Definición del plano ……... 98
6.1 Determinación del plano …… 99
6.2 Situación de elementos geométricos en un plano ……..... 105
6.2.1 Localización de un punto en el borde de un plano ……... 105
6.2.2 Localización de un punto en el interior de un plano ……..... 108
6.2.3 Localización de un punto en el exterior de un plano …… 109
6.2.4 Localización de una recta en el interior de un plano …… 110
6.2.5 Localización de una recta exterior en un plano …… 111
6.3 Angulo de inclinación de un plano ……. 112
6.4 Verdadera forma de un plano ……. 114
6.5 Orientación o rumbo del plano ……... 115
6.6 Clasificación de los planos ……. 115
6.6.1 Plano horizontal …… 116
6.6.2 Plano frontal ……..... 117

6.6.3 Plano de perfil …….. 118
6.6.4 Plano vertical …… 119
6.6.5 Plano de punta …….. 120
6.6.6 Plano lateral …….. 121
6.6.7 Plano oblicuo …… 122
6.7 Ejemplos ……. 123
6.7.1 Ejemplo 1 ……..... 123
6.7.2 Ejemplo 2 ……..... 125
6.7.3 Ejemplo 3 ……..... 127
6.8 Ejercicios …… 129
6.8.1 Ejercicio 1 ……..... 129
6.8.2 Ejercicio 2 ……..... 130
6.8.3 Ejercicio 3 ……..... 130
6.8.4 Ejercicio 4 ……..... 130

Capítulo 7 - Relaciones espaciales **131**

7.0 Generalidades de las relaciones espaciales ……. 131
7.1 Relaciones entre puntos y rectas …… 132
7.1.1 Trazar una recta que pase por un punto exterior a una recta, y sea paralela a la misma …….. 132
7.1.2 Trazar desde un punto exterior a una recta dada, la perpendicular o distancia más corta ……..... 133
7.2 Relaciones entre puntos y planos ……... 135
7.2.1 Trazar desde un punto exterior a un plano dado, una recta paralela al mismo ……..... 135
7.2.2 Trazar la distancia más corta o perpendicular desde un punto exterior a un plano dado ……... 136
7.2.3 Trazar la distancia horizontal más corta desde un punto exterior a un plano dado ……..... 139
7.2.4 Trazar la distancia con pendiente más corta desde un punto exterior a un plano dado ……... 140
7.3 Relaciones entre rectas ……... 141
7.3.1 Construir un plano paralelo a una recta dada, y que contenga a su vez, una recta que se cruce con la anterior …… 141
7.3.2 Determinar el ángulo real proyectado entre dos rectas interceptadas o cruzadas ……... 142
7.3.3 Determinar la distancia más corta entre dos rectas que se cruzan ……... 143
7.3.4 Determinar la distancia horizontal más corta entre dos rectas que se cruzan ……..... 146
7.3.5 Determinar la distancia más corta con pendiente conocida, entre dos rectas que se cruzan ……... 147
7.4 Relaciones entre rectas y planos ……. 148
7.4.1 Determinar el ángulo formado entre una recta y un plano dado …….. 148
7.5 Relaciones entre planos ……..... 151
7.5.1 Determinar el ángulo diedro formado entre dos planos (con intersección conocida) ……..... 151
7.5.2 Determinar el ángulo diedro formado entre dos planos (sin conocer la intersección) ……..... 152

7.6 Ejemplos ……. 153
7.6.1 Ejemplo 1 ……..... 153
7.6.2 Ejemplo 2 ……..... 155
7.6.3 Ejemplo 3 ……..... 157
7.6.4 Ejemplo 4 ……..... 160
7.7 Ejercicios …… 162
7.7.1 Ejercicio 1 ……..... 162
7.7.2 Ejercicio 2 ……..... 162
7.7.3 Ejercicio 3 ……..... 163
7.7.4 Ejercicio 4 ……..... 163
7.7.5 Ejercicio 5 ……..... 164

Capítulo 8 - Intersecciones entre rectas y planos 165

8.0 Generalidades de las intersecciones ……... 165
8.1 Intersección entre dos rectas ……..... 166
8.2 Intersección entre una recta y un plano ……..... 166
8.3 Intersección entre una recta y una superficie de simple curvatura ……. 172
8.3.1 Intersección entre una recta y un cono recto u oblicuo ……..... 172
8.3.2 Intersección entre una recta y un cilindro recto ……... 175
8.3.3 Intersección entre una recta y un cilindro oblicuo ……... 176
8.4 Intersección entre una recta y una esfera …… 177
8.5 Ejemplos ……. 178
8.5.1 Ejemplo 1 ……..... 178
8.5.2 Ejemplo 2 ……..... 180
8.5.3 Ejemplo 3 ……..... 182
8.5.4 Ejemplo 4 ……..... 185
8.6 Ejercicios …… 188
8.6.1 Ejercicio 1 ……..... 188
8.6.2 Ejercicio 2 ……..... 190
8.6.3 Ejercicio 3 ……..... 192
8.6.4 Ejercicio 4 ……. 193

Capítulo 9 - Intersecciones entre planos y sólidos 194

9.0 Intersecciones entre planos ……. 194
9.1 Intersecciones entre planos y sólidos ……. 200
9.1.1 Intersección entre un plano y un prisma recto truncado ……... 202
9.1.2 Intersección entre un plano y un prisma oblicuo ……..... 204
9.1.3 Intersección entre un plano y una pirámide oblicua ……..... 207
9.1.4 Intersección entre un plano y un cilindro recto ……..... 209
9.1.5 Intersección entre un plano y un cilindro oblicuo ……..... 216
9.1.6 Intersección entre un plano y un cono recto (secciones cónicas) ……..... 217
9.1.7 Intersección entre un plano y un cono oblicuo ……..... 221
9.1.8 Intersección entre un plano y una esfera …….. 223
9.2 Ejemplos ……. 225
9.2.1 Ejemplo 1 ……..... 225
9.2.2 Ejemplo 2 ……..... 227
9.2.3 Ejemplo 3 ……..... 229

9.2.4 Ejemplo 4 232
9.3 Ejercicios 235
9.3.1 Ejercicio 1 235
9.3.2 Ejercicio 2 236
9.3.3 Ejercicio 3 238
9.3.4 Ejercicio 4 240
9.3.5 Ejercicio 5 241
9.3.6 Ejercicio 6 242
9.3.7 Ejercicio 7 243

Capítulo 10 - Desarrollo de superficies **244**

10.0 Generalidades sobre el desarrollo de superficies 244
10.1 Clasificación de desarrollo de superficies 245
10.2 Desarrollo paralelo 245
10.2.1 Desarrollo de un prisma recto 246
10.2.2 Desarrollo de un prisma oblicuo 247
10.2.3 Desarrollo de un cilindro recto 248
10.2.4 Desarrollo de un cilindro oblicuo 249
10.2.5 Desarrollo de un perfil de extrusión recto 250
10.3 Desarrollo radial 251
10.3.1 Desarrollo de una pirámide recta 253
10.3.2 Desarrollo de una pirámide oblicua 254
10.3.3 Desarrollo de un cono recto 256
10.3.4 Desarrollo de un cono oblicuo 258
10.4 Desarrollo por triangulación 260
10.4.1 Desarrollo de una tolva 261
10.4.2 Desarrollo de un adaptador de sección rectangular a sección octogonal 262
10.4.3 Desarrollo de un adaptador de sección rectangular a sección circular 263
10.4.4 Desarrollo de un adaptador de sección circular a sección elíptica 264
10.4.5 Desarrollo de un cono alabeado 265
10.5 Desarrollo aproximado 266
10.5.1 Desarrollo de un toroide 267
10.5.2 Desarrollo de una esfera 270
10.5.3 Desarrollo de un helicoide recto 277
10.5.4 Desarrollo de un helicoide oblicuo 281
10.5.5 Desarrollo de una convoluta helicoidal prolongada hasta la base 283
10.5.6 Desarrollo de un paraboloide hiperbólico 286
10.6 Ejemplos 289
10.6.1 Ejemplo 1 289
10.6.2 Ejemplo 2 291
10.6.3 Ejemplo 3 293
10.6.4 Ejemplo 4 295
10.7 Ejercicios 297
10.7.1 Ejercicio 1 297
10.7.2 Ejercicio 2 298

10.7.3 Ejercicio 3 ……..... 299
10.7.4 Ejercicio 4 ……..... 300
10.7.5 Ejercicio 5 ……..... 301

Anexos **302**

Anexo 1 – Teoremas ……..... 302
Anexo 2 – Reglas y normas …… 304

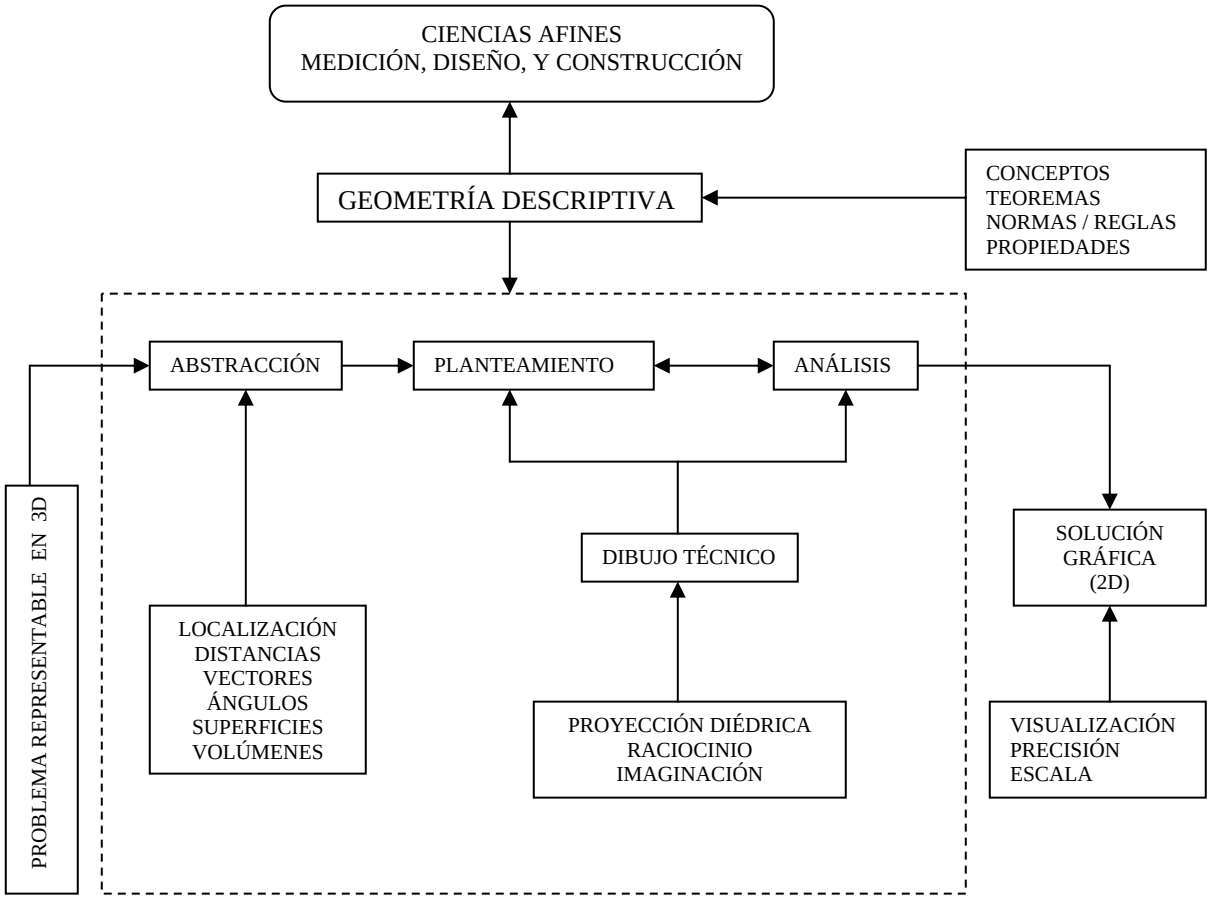
Bibliografía **306**

1.0 Conceptos fundamentales

1.0 ¿Qué es la geometría descriptiva?

La geometría descriptiva es una ciencia aplicada de carácter multidisciplinario, cuyo objetivo consiste en resolver gráficamente problemas representables, relacionados con las áreas afines a la medición, el diseño, y la construcción; ésta permite localizar, comprender, y analizar los elementos geométricos situados en el espacio para relacionarlos entre sí; posteriormente, interpretar y manejar dicha información en un medio bidimensional.

Se fundamenta en la aplicación conjunta de la teoría de las proyecciones diédricas, teoremas, normas, abstracción de los elementos geométricos, raciocinio, y la imaginación que aporte la persona para ubicar el punto de vista más adecuado del observador, donde se encuentra la solución gráfica; dicho resultado es muy aproximado a la realidad, siempre y cuando se dibuje con precisión *(figura 1.1).*

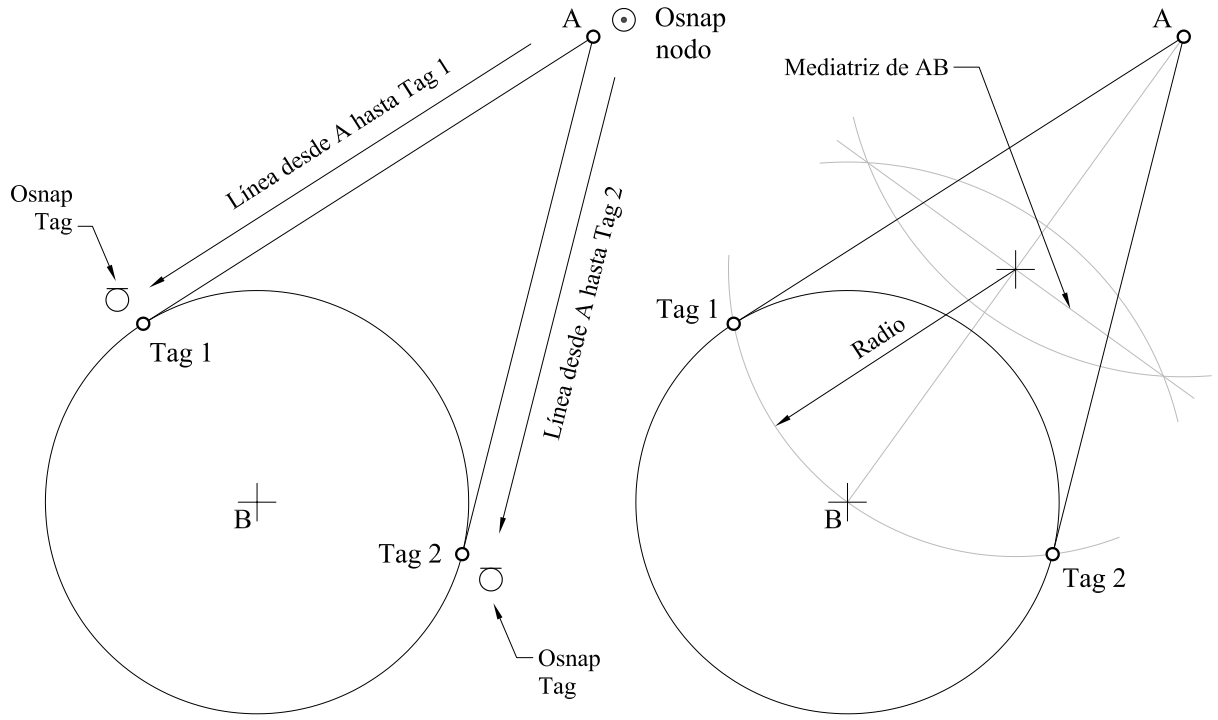


Cuadro sinóptico de la geometría descriptiva
Figura 1.1

Se le da tributo al Matemático francés Gaspard Monge, quien en el siglo XVIII, desarrolló el método de dibujo técnico que aún se imparte como asignatura obligatoria en los estudios de educación superior de las áreas afines a la medición, el diseño, y la construcción. Monge tuvo como reto, diseñar una fortaleza militar en forma de estrella, la cual, resolvió utilizando proyecciones diédricas, auxiliares, y revoluciones, para determinar la verdadera forma de intersecciones, planos, y ángulos del complejo, en vez, de trabajarlo matemáticamente. Los criterios y fundamentos no han evolucionado mucho desde los tiempos de Monge; lo que si ha cambiado drásticamente, es el desarrollo de las herramientas de dibujo, desde las escuadras y el compás de precisión, hasta las herramientas digitales que proporciona el computador con diversos software de dibujo CAD tales como: Autocad, Archicad, Rhinoceros, etc.

Cabe destacar, que estos medios digitales, aunque son precisos, versátiles, y eficientes, no muestran ni enseñan los procesos analíticos y deductivos que van más allá de los resultados obtenidos; por tal razón, deben valorarse como una herramienta de precisión y visualización (puntos de vista, orbita 3D, modos de sombreado, y renderizados). Es muy importante que el estudiante tenga en cuenta estos aspectos y por consiguiente no subvalore el dibujo con instrumentos tradicionales (lápiz, escuadras, y compás de precisión), y mucho menos el dibujo a mano alzada, ya que se requiere aplicar un proceso de análisis tangible *(figura 1.2)*.

Problema: Partiendo del punto A, dibuje las 2 rectas que sean tangenciales al círculo dado.



Proceso dibujado en Autocad

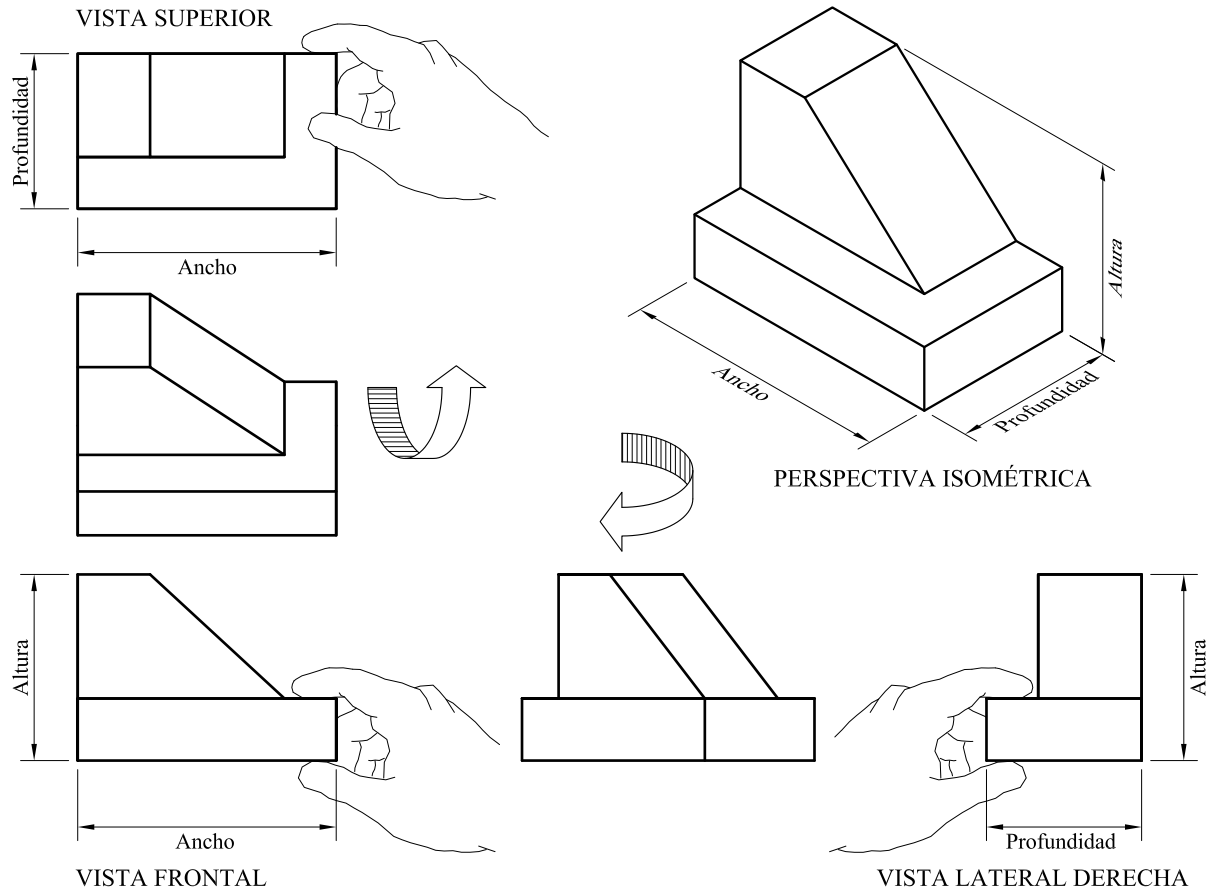
Proceso dibujado con instrumentos tradicionales

Comparación de un dibujo CAD y un dibujo con instrumentos tradicionales
Figura 1.2

1.1 Fundamentos de la proyección diédrica.

A lo largo de la historia, el hombre se ha preocupado por graficar el mundo que lo rodea; gracias a estas representaciones y aplicaciones de la geometría, surgieron grandes avances en las civilizaciones, desarrollándose la Arquitectura, la Ingeniería, y el Arte. Durante el renacimiento, surgió como un desafío, representar la profundidad de los objetos situados en el espacio, lo que llevó al invento de la perspectiva central o cónica con un punto de fuga, muchas magnitudes de los objetos se proyectaban deformados (escorzo), debido a la óptica de la perspectiva; en esta época, surgieron los tres principales componentes que intervienen en toda proyección: el plano pictórico, el observador, y el modelo.

En el siglo XVIII, cuando aparece la geometría descriptiva junto con la teoría de la proyección diédrica inventada por Gaspard Monge, se resuelven todos estos interrogantes, ya que, este método permitía visualizar la mayor cantidad posible de verdaderas magnitudes de intersecciones, ángulos, y planos, mediante un sistema de vistas ortogonales y auxiliares. Esta nueva técnica permitía representar los objetos situados en el espacio 3D en un plano de representación bidimensional (2D), facilitando la comprensión y descripción de la forma, y por consiguiente, brindando las herramientas básicas para el diseño en Ingeniería. El método natural es un procedimiento que permite visualizar un objeto en diferentes puntos de vista, para apreciar el ancho, la altura, y la profundidad del mismo *(figura 1.3).*



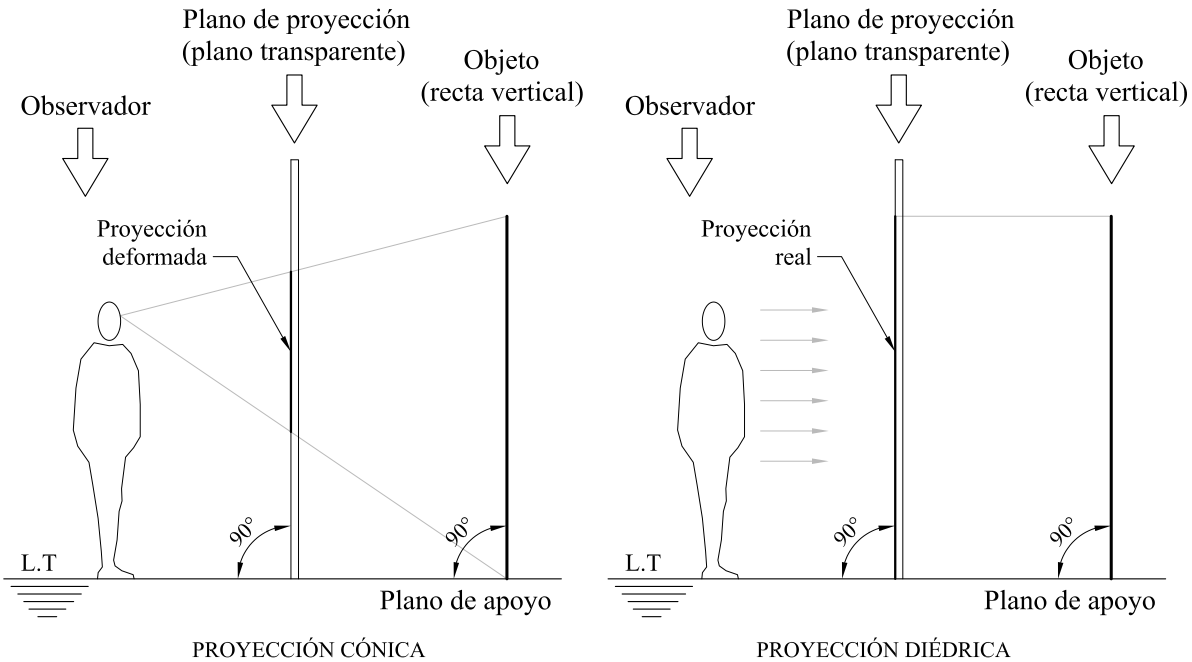
Método natural para obtener las vistas principales de un objeto
Figura 1.3

El método natural, brinda un acercamiento a la teoría de la proyección diédrica, donde el observador mediante giros graduales de 90º cambia su punto de vista hacia el objeto, y de esta manera, aprecia ciertas dimensiones principales del mismo, por ejemplo, en la vista superior, se aprecian la profundidad y el ancho, más no la altura del mismo, en la vista frontal, se aprecian la altura y el ancho, más no su profundidad, y en la vista lateral derecha, se aprecian la altura y la profundidad, más no su ancho.

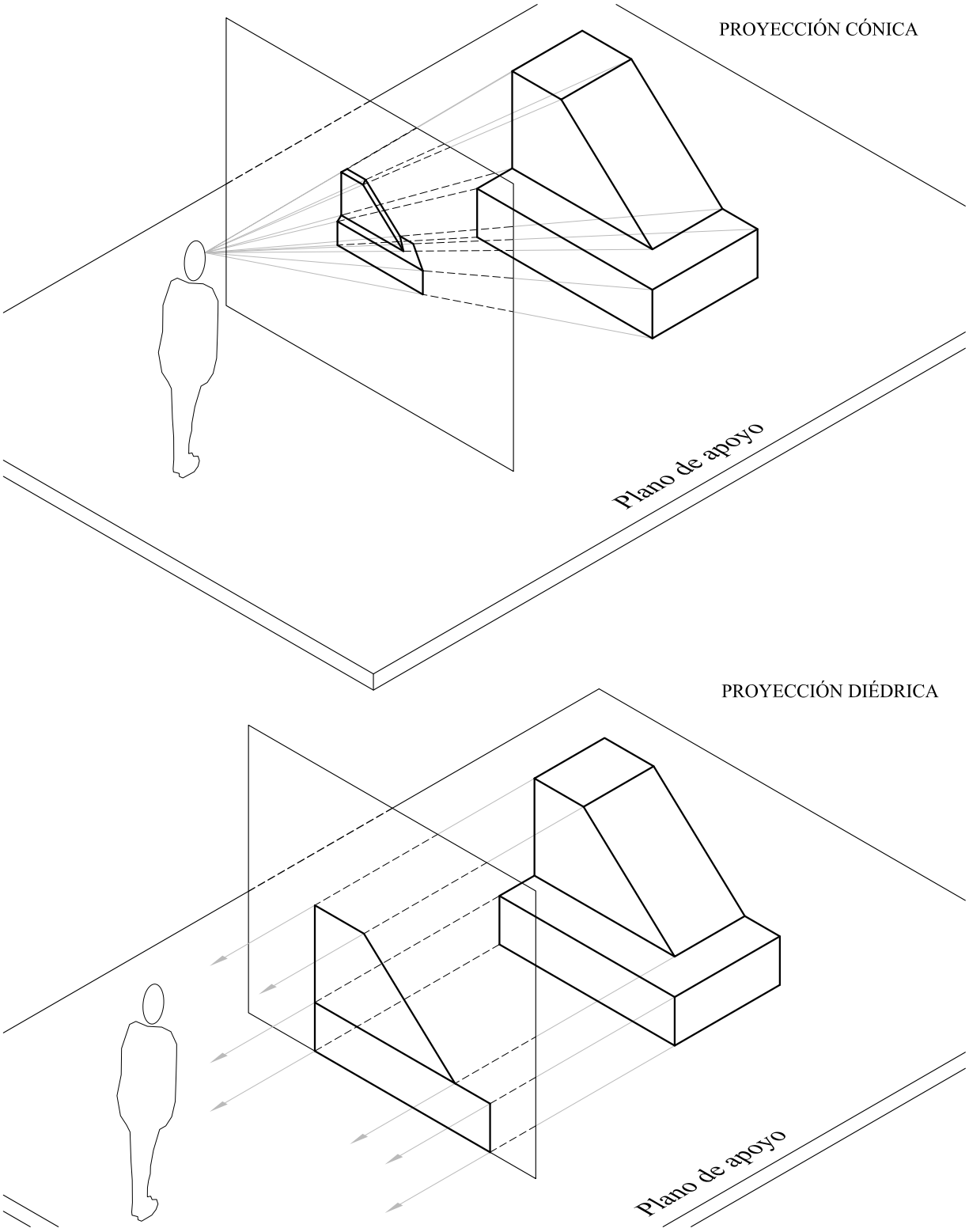
Para conocer las verdaderas magnitudes de los elementos geométricos que conforman un objeto, es necesario analizar la posición y el comportamiento de dichos elementos respecto a la dirección de los rayos visuales del observador; las propiedades geométricas más representativas son el paralelismo y la perpendicularidad.

En un sistema de proyección intervienen un observador, un plano de proyección, y un objeto o modelo; la manera como se pueden disponer estos componentes determina dos grandes sistemas de proyección, los cuales son, el sistema de proyección americano o ASA, y el sistema de proyección europeo o DIN. Cabe resaltar, que en todo sistema de proyección es necesario incluir un elemento de referencia, que permita establecer un orden con los demás; este elemento consiste en “el plano de apoyo”, y como su nombre lo indica, es el principal soporte en el cual se localizan los tres componentes principales; el plano de proyección, debe estar formando un ángulo de 90º respecto al plano de apoyo, el observador se considera una persona de pie, y el objeto se considera estático.

En la perspectiva cónica, las dimensiones reales de un objeto se proyectan deformadas en el plano de proyección, debido a la convergencia de los rayos visuales desde el objeto hacia el observador; en cambio, en la perspectiva diédrica, los rayos visuales son paralelos entre sí, y por lo tanto, los elementos rectos o planos del objeto que son paralelos al plano de proyección, se proyectan con las mismas medidas en él *(figuras 1.4 y 1.5).*

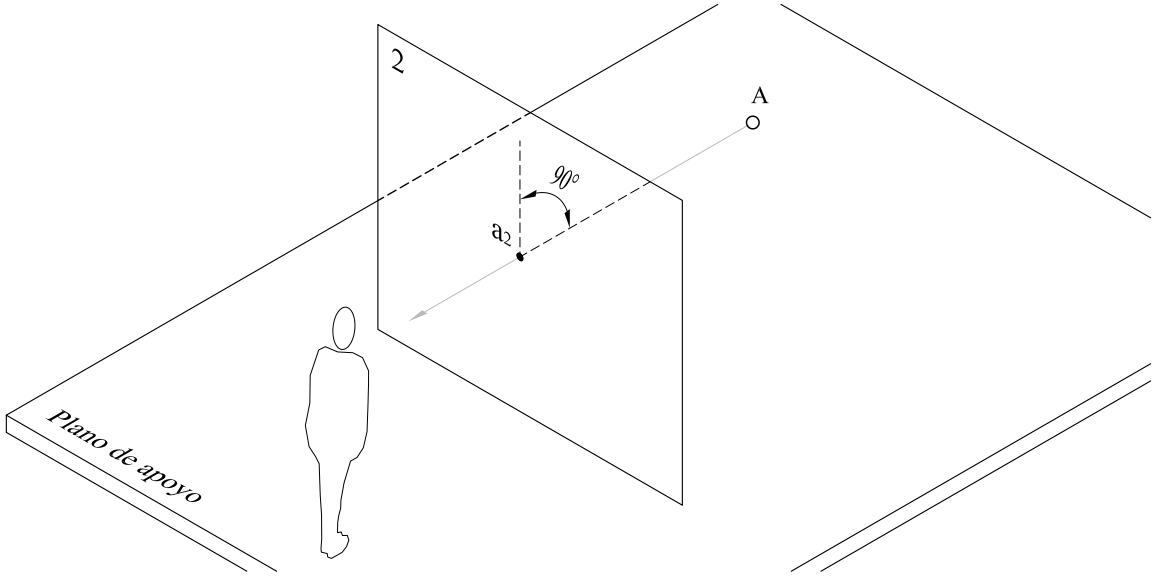


Diferencias entre la proyección cónica y la proyección diédrica
Figura 1.4



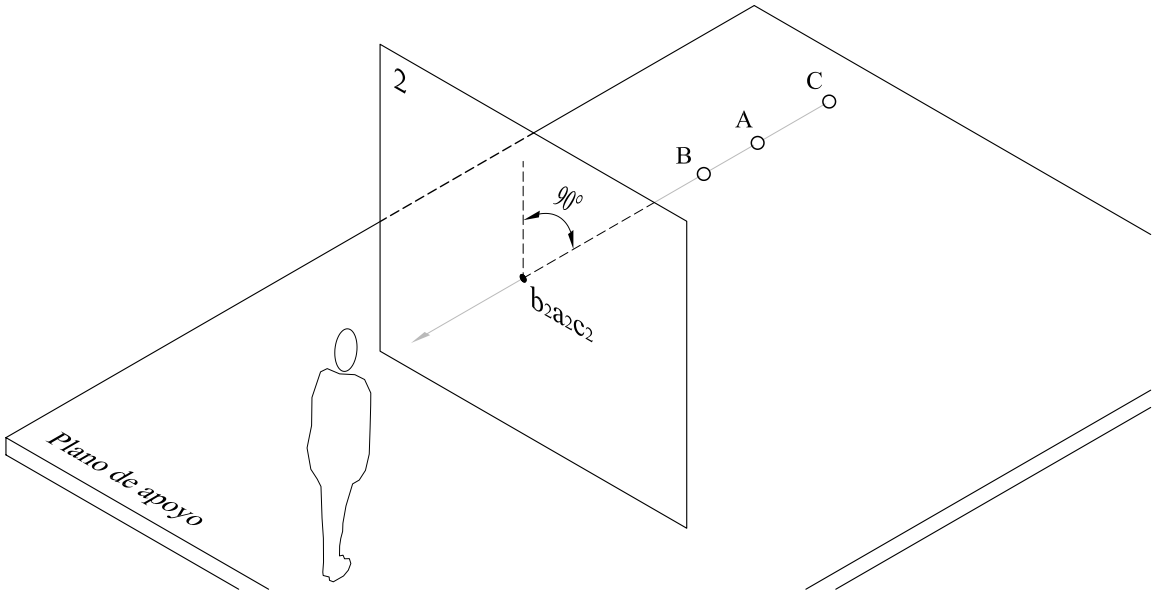
Diferencias entre la proyección cónica y la proyección diédrica
Figura 1.5

Todo punto situado en el espacio, se debe identificar con una letra mayúscula, de tal manera, que al proyectarlo en un plano de proyección, éste se designa con su respectiva letra en minúscula, acompañada del subíndice del plano en que se proyecta; la línea que parte desde el punto hacia el plano de proyección se denomina "línea de proyección", la cual es perpendicular al mismo *(figura 1.6).*



Proyección de un punto situado en el espacio
Figura 1.6

Cuando varios puntos coinciden en una misma línea de proyección, se deben designar los puntos en el orden de cercanía respecto al observador, es decir, primero se designa el punto que se encuentra más cerca al observador, luego, el segundo más cercano, y así sucesivamente *(figura 1.7).*

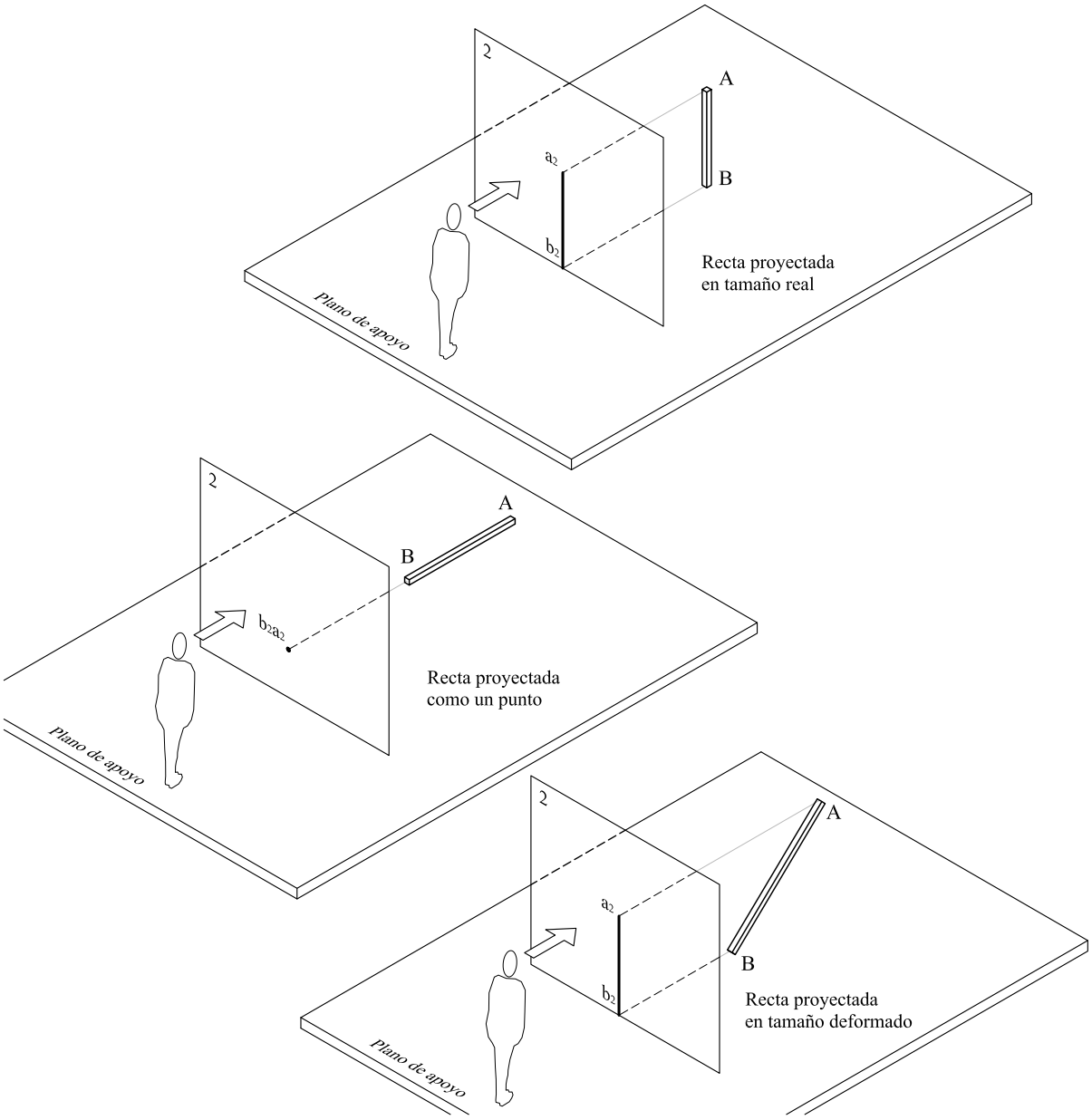


Proyección de puntos coincidentes situados en el espacio
Figura 1.7

La posición del objeto en el espacio, afecta de manera directa la forma en que se proyecta la imagen en el plano de proyección; a manera de introducción, se enuncian unas normas que deben tenerse en cuenta al proyectar líneas y planos.

Sobre las rectas (unidireccionales), situadas en el espacio *(figura 1.8)*.

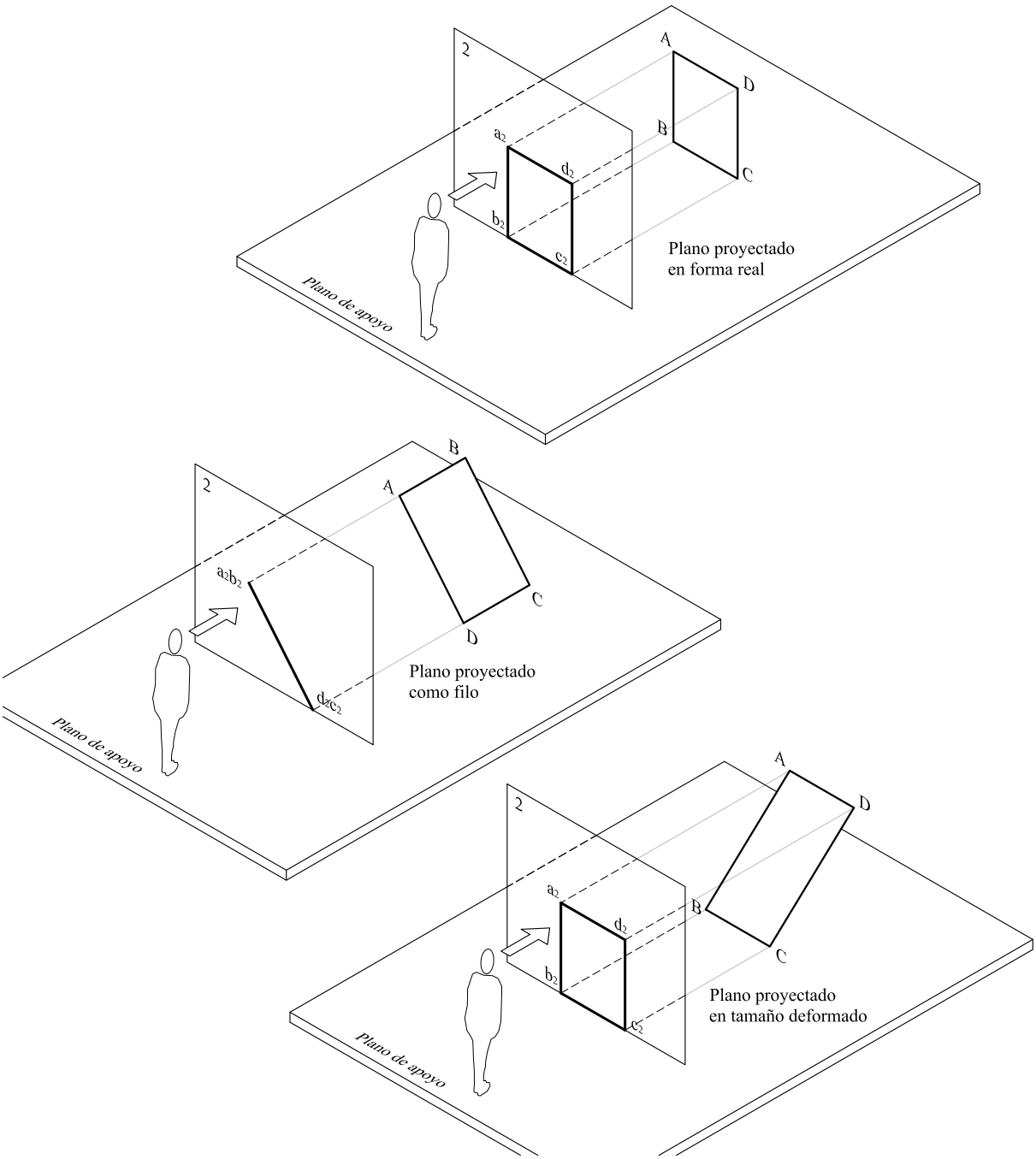
- Toda recta paralela a un plano de proyección, se proyecta en verdadera magnitud.
- Toda recta perpendicular a un plano de proyección, se proyecta como un "punto".
- Toda recta que no es paralela ni perpendicular a un plano de proyección, se proyecta deformada, con un tamaño menor al real.



Proyecciones de una recta situada en el espacio
Figura 1.8

Sobre los planos (superficies planas) situados en el espacio *(figura 1.9)*.

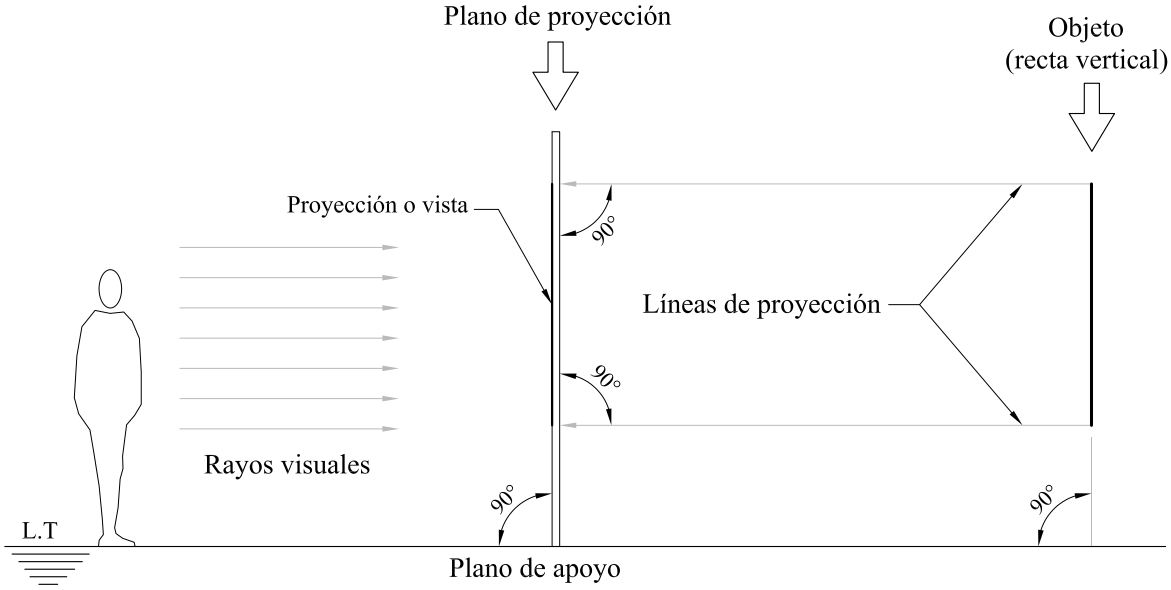
- Todo plano paralelo a un plano de proyección, se proyecta en verdadera forma.
- Todo plano perpendicular a un plano de proyección, se proyecta como una "recta" o "filo".
- Todo plano que no es paralelo ni perpendicular a un plano de proyección, se proyecta deformado, con un tamaño menor a su forma real.



Proyecciones de un plano situado en el espacio
Figura 1.9

1.2 Sistema de proyección ASA.

Este sistema, también conocido como sistema americano o proyección en tercer cuadrante, se caracteriza porque el plano de proyección está situado entre el observador y el objeto; teóricamente, el observador se considera localizado en el infinito; el plano de proyección se supone transparente, ya que el observador debe visualizar el objeto a través de él, y de esta manera, se obtiene la proyección o vista del mismo *(figura 1.10).*

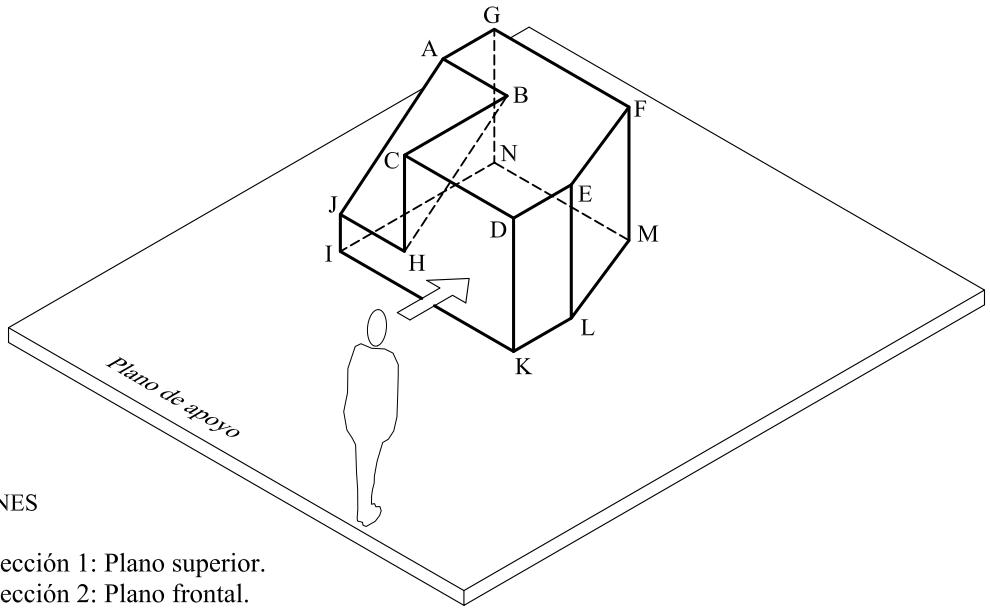


Sistema de proyección ASA
Figura 1.10

Cuando se requiere proyectar un sólido, es necesario identificar sus vértices y aristas, con el propósito de designarlos correctamente en sus respectivas proyecciones; dichos puntos proyectados se conectan entre sí, mediante líneas para determinar la vista del objeto. El lector deberá juzgar los elementos de la proyección que son visibles y ocultos, mediante líneas continuas e interrumpidas, respectivamente.

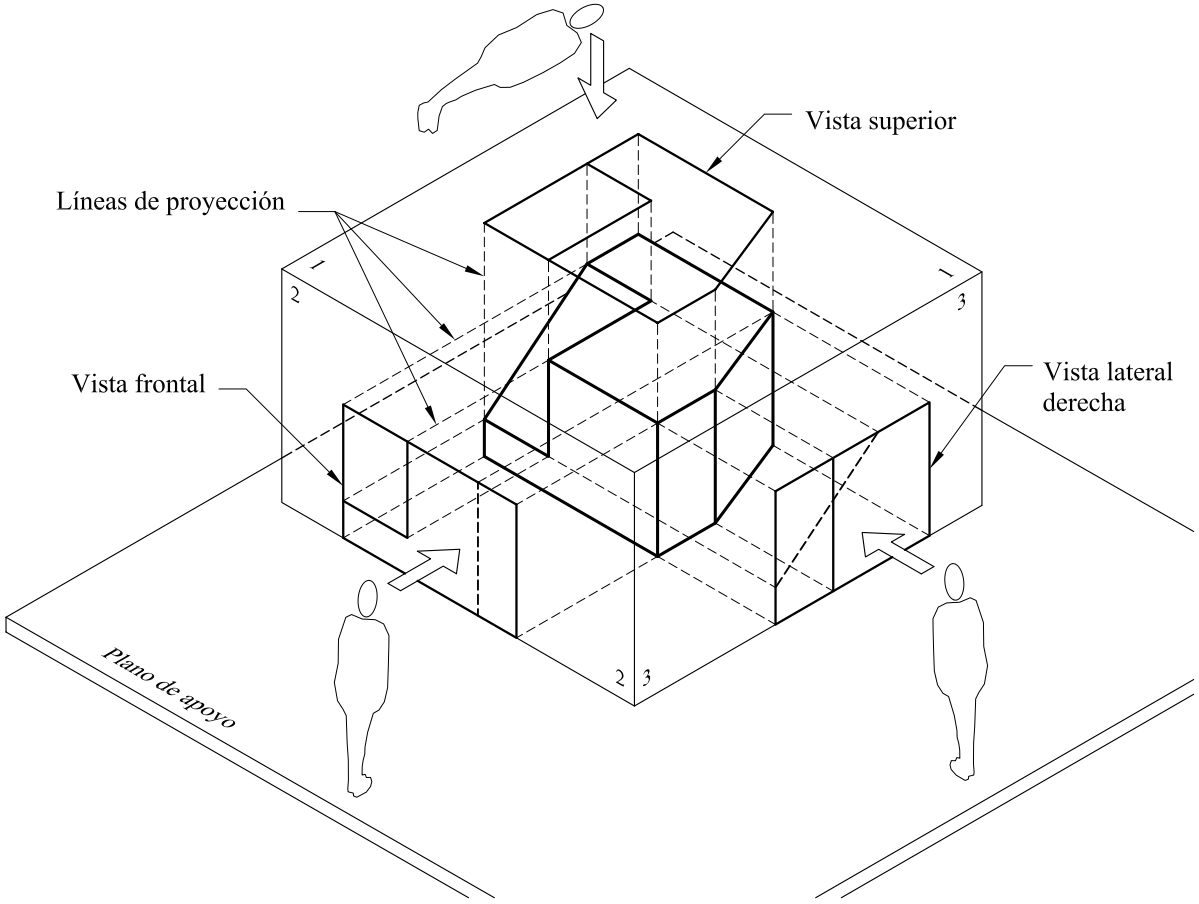
Para diseñar o construir un objeto se requiere leer e interpretar las proyecciones del mismo, esto quiere decir, que se necesita utilizar más de un plano de proyección, para concebir la forma real del objeto; lo esencial es precisar la mayor cantidad posible de verdaderas magnitudes de las proyecciones.

Por las razones descritas anteriormente, los planos de proyección que se utilizan, deben ser ortogonales entre sí, para cumplir con los requisitos del sistema diédrico; de esta forma, se determina la caja de proyección, la cual, contiene en su interior el objeto, y por fuera de ella, se ubica el observador. Según la geometría del objeto, se define la cantidad de planos de proyección que se necesitan para comprender y obtener la información completa del mismo; generalmente se utilizan tres planos de proyección principales, el plano superior (identificado con el Nº 1), el plano frontal (identificado con el Nº 2), y el plano lateral derecho (identificado con el Nº 3); los tres planos de proyección restantes de la misma caja, es decir, el plano inferior, el plano posterior, y el plano lateral izquierdo, se descartan porque sus proyecciones son similares a las obtenidas en los demás planos de proyección *(figura 1.11).*



CONVENCIONES

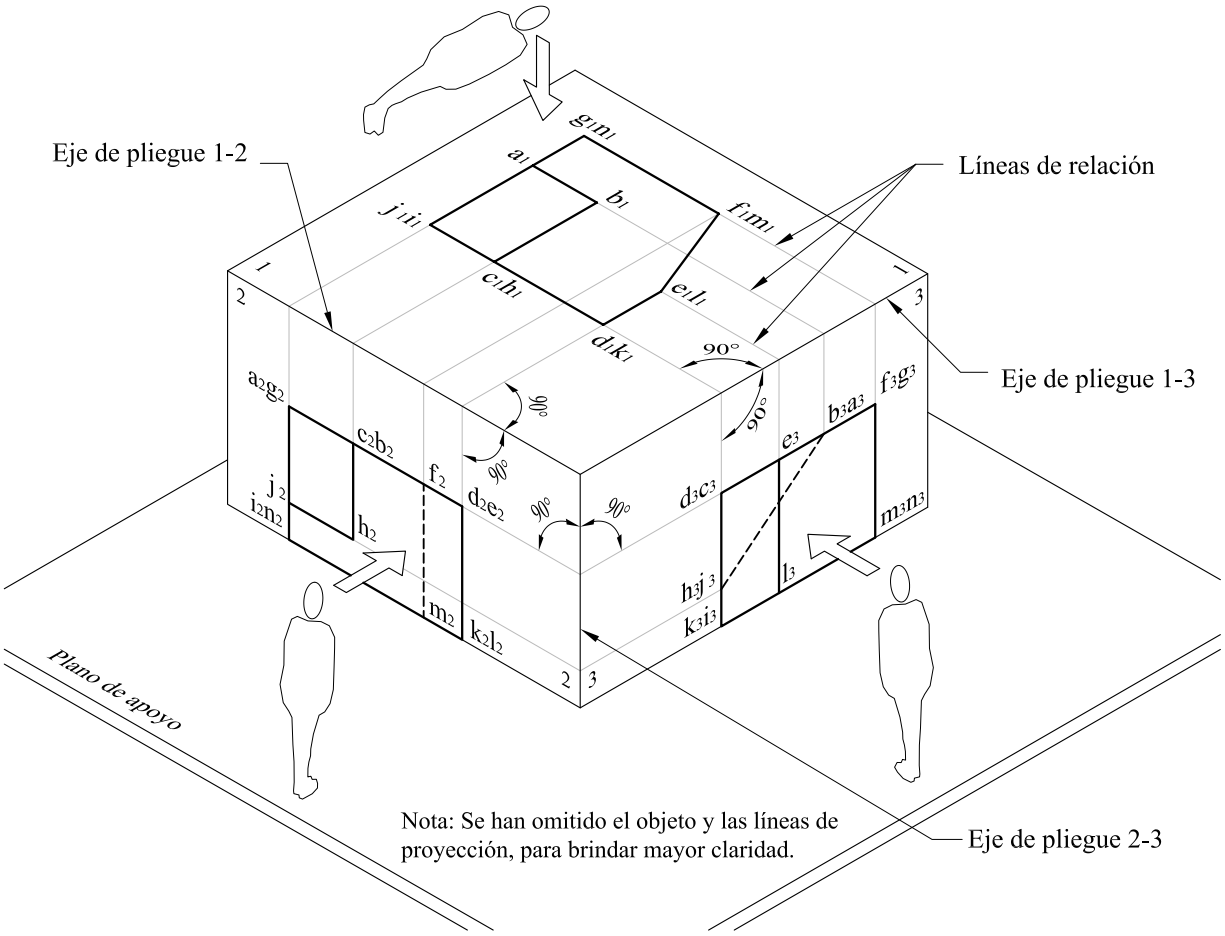
Plano de proyección 1: Plano superior.
Plano de proyección 2: Plano frontal.
Plano de proyección 3: Plano lateral derecho.



Objeto proyectado en sistema ASA
Figura 1.11

Dos planos de proyección consecutivos se intersecan entre sí formando un ángulo diedro de 90º, su intersección es una línea denominada “eje de pliegue”, la cual, debe referenciarse con los números de los planos de proyección que la definen; de esta manera, en la caja de proyección se identifican tres ejes de pliegues principales, 1-2, 1-3, y 2-3.

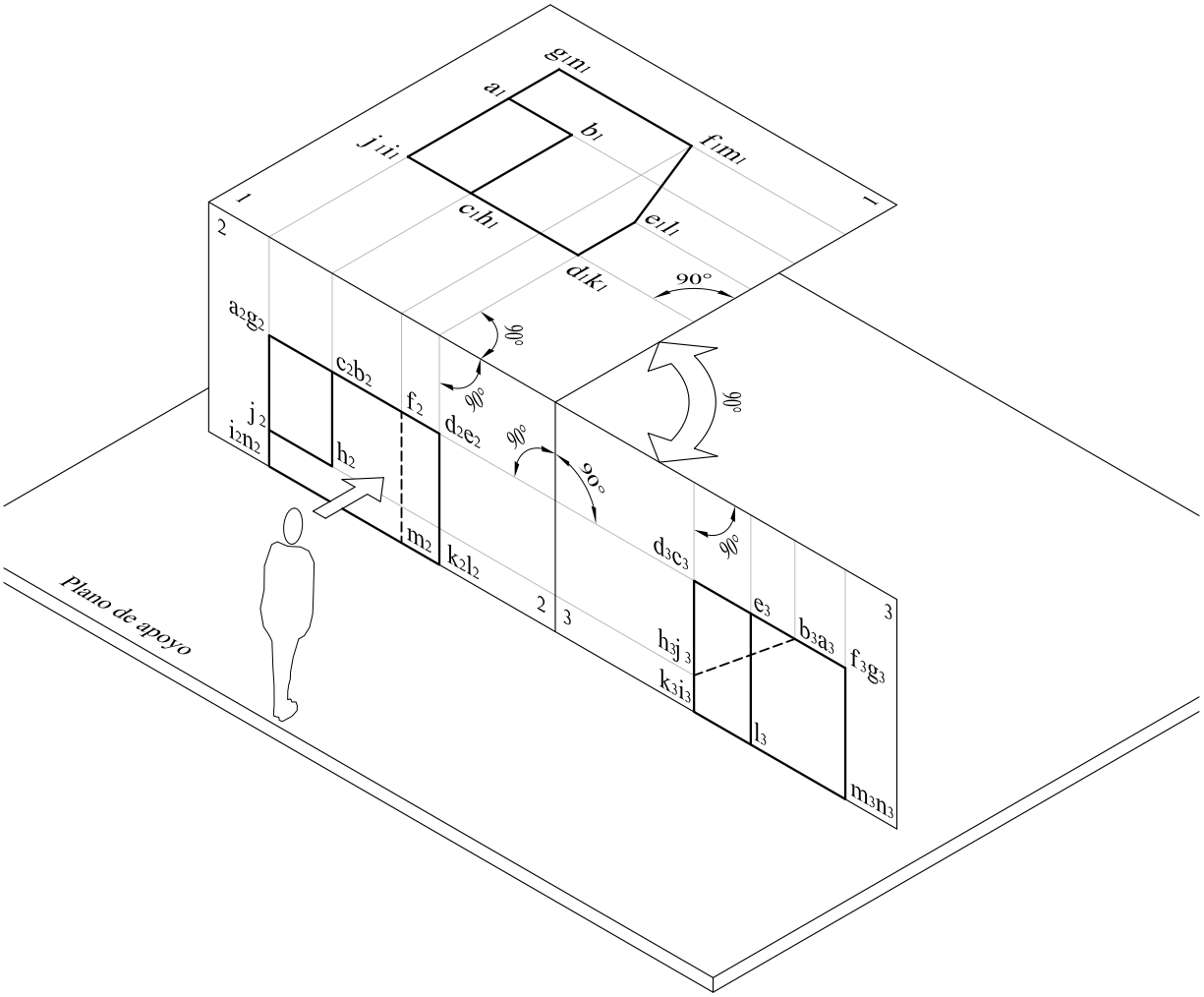
Cuando se proyectan las líneas de proyección hacia los planos de proyección principales de la misma caja, se obtienen unas líneas denominadas “líneas de relación”, las cuales, serán perpendiculares a los ejes de pliegue descritos anteriormente, estas líneas permiten relacionar una vista con otra, cuando son consecutivas *(figura 1.12).*



Vistas principales de un objeto, en sistema ASA
Figura 1.12

Después de obtener las tres vistas principales del objeto con sus respectivas líneas de relación, es necesario procesar esta información en un medio bidimensional, para ello, se giran los planos de proyección hasta que coincidan en un solo plano de trabajo, por conveniencia, el plano frontal se toma como referencia para realizar el abatimiento de los demás planos de proyección; este proceso da origen a la “planimetría” del objeto, la cual, se convierte en el lenguaje gráfico primordial que comunica la idea acerca de la forma del objeto tridimensional, proporcionando los fundamentos de la construcción y el diseño en Ingeniería.

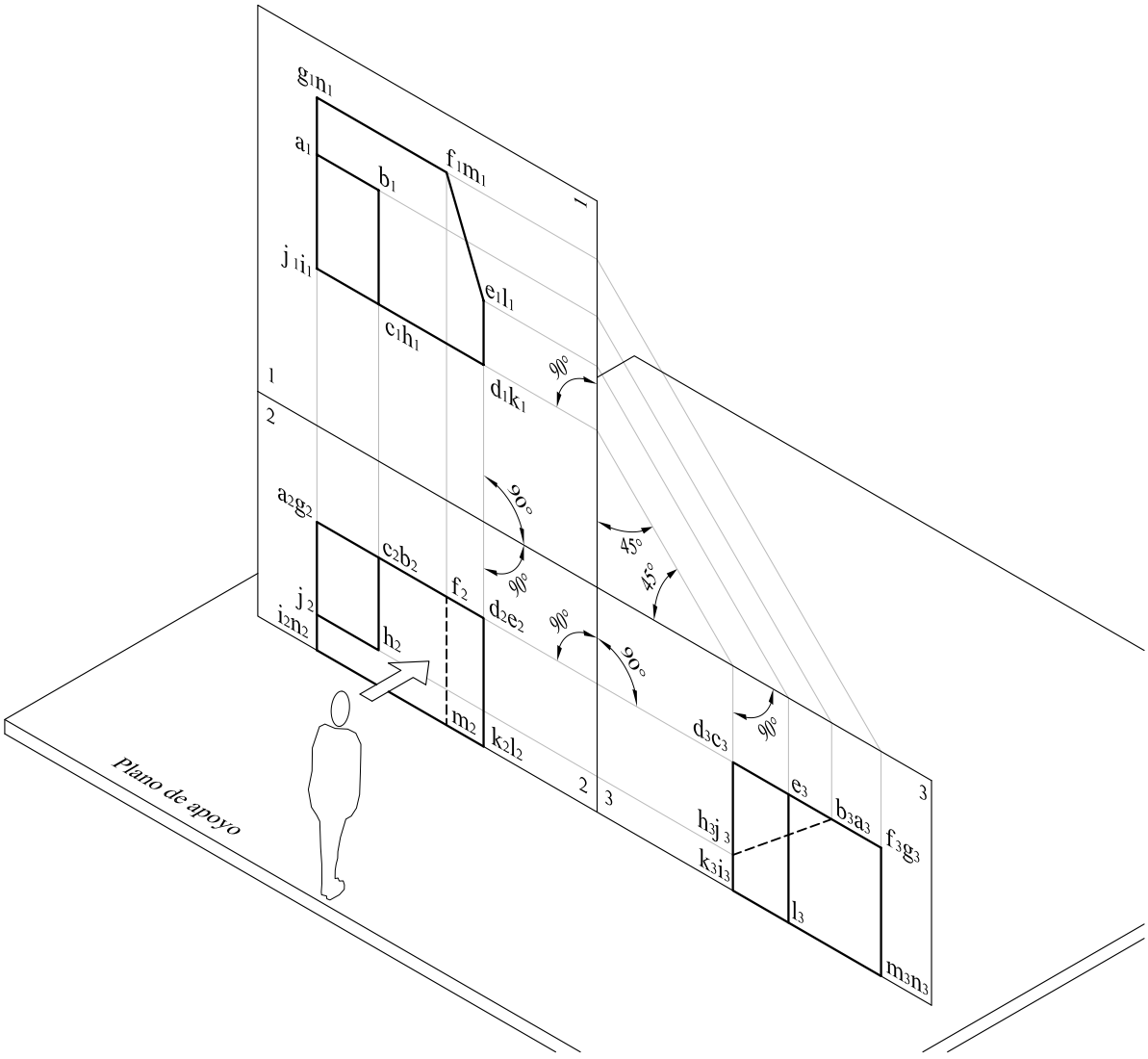
Para explicar este abatimiento de los planos de proyección, en primer lugar, se procede a girar 90º el plano lateral derecho hasta que coincida con el plano frontal de proyección (*figura 1.13).*



Abatimiento del plano lateral derecho de proyección, en sistema ASA
Figura 1.13

Luego, se procede a girar el plano superior de proyección 90º hasta que coincida con el mismo plano referenciado; de esta manera, se evidencia que la longitud medida desde un punto cualquiera en la vista superior hasta el eje de pliegue 1-2, es la misma longitud medida desde su punto homólogo en la vista lateral derecha hasta el eje de pliegue 2-3; por esta razón, dichas longitudes se trasladan a 45º desde el plano superior de proyección hasta el plano lateral derecho de proyección entre los ejes de pliegue 1-3.

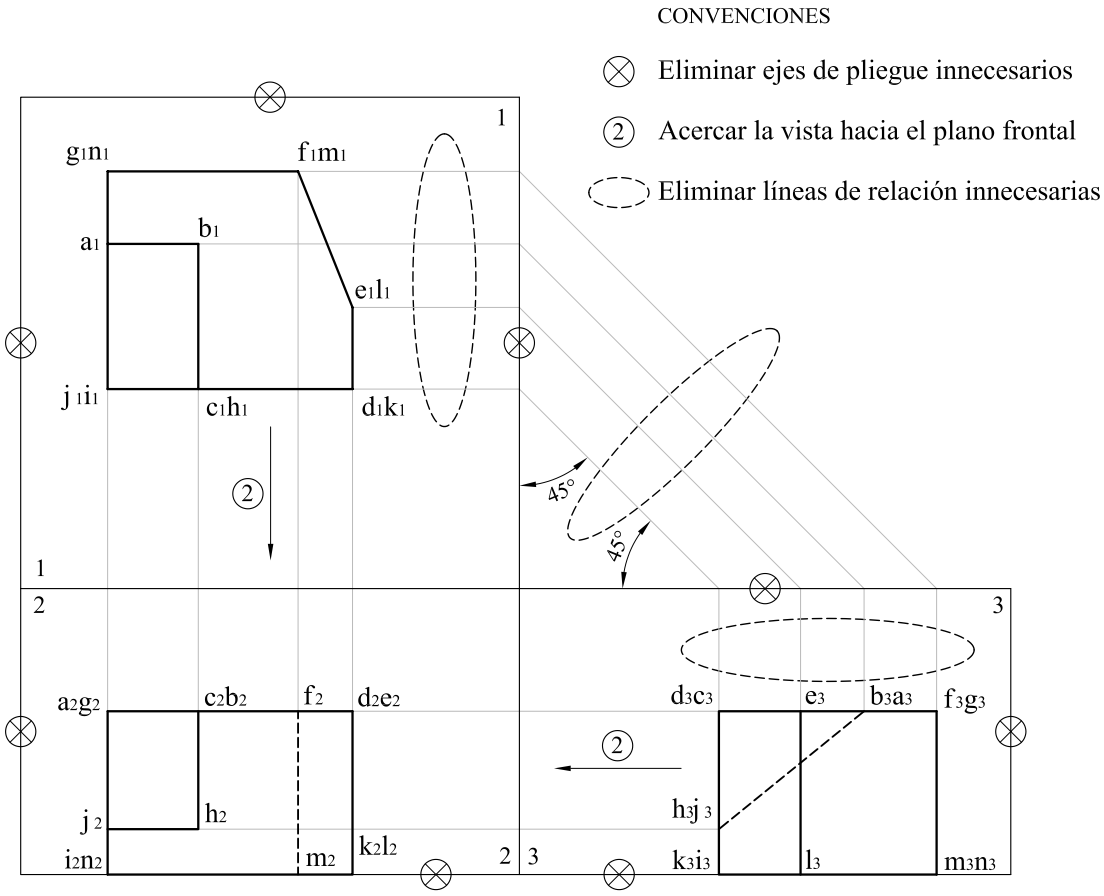
Es cierto, que el eje de pliegue 1-3 queda separado en dos ejes después del abatimiento de los planos de proyección, determinándose un ángulo de 90º entre sí; lo primordial es trasladar las distancias a 45º entre estos dos ejes separados; generalmente, este procedimiento se utiliza para comprobar y construir una vista lateral derecha cuando se tienen las dos vistas restantes *(figura 1.14).*



Abatimiento del plano superior de proyección, en sistema ASA
Figura 1.14

Al final de este proceso, quedan las tres proyecciones principales en un solo plano de representación; dicha información, es la que realmente se procesa en el papel, considerando los aspectos relacionados con la escala, por supuesto.

Al analizar esta planimetría resultante, cabe resaltar, que la información no es del todo adecuada, debido a que existen elementos que se pueden eliminar, e incluso las vistas deben acomodarse de tal manera que queden proporcionadas, es decir, ni tan cercanas, ni retiradas respecto a los ejes de pliegue principales; todas estas observaciones deben tenerse en cuenta para proporcionar una mayor claridad en el dibujo que se realiza *(figura 1.15).*

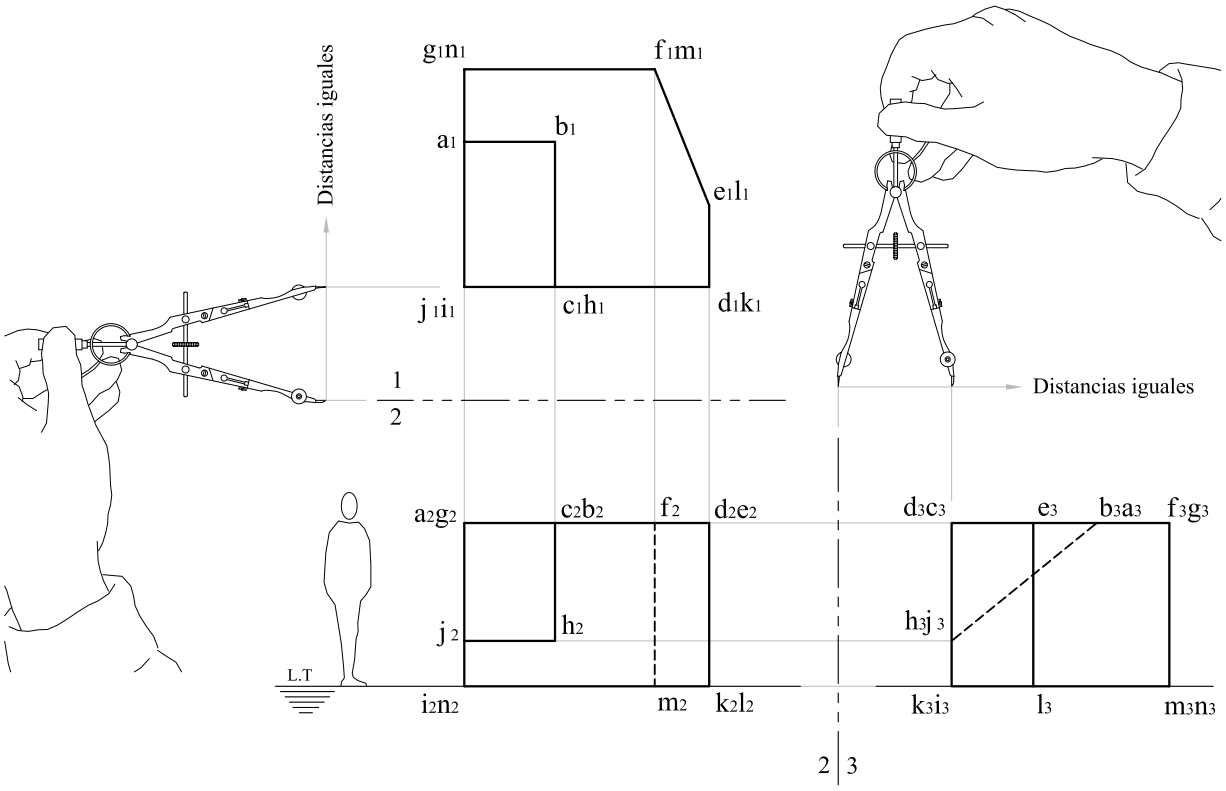


Nota del Autor: El hecho de que las vistas superior y lateral derecha, hayan quedado retiradas de los ejes de pliegue 1-2 y 2-3, respectivamente; se debe principalmente, a la información clara que se necesitaba en las perspectivas anteriores, evitando en lo posible el cruce de las vistas con el objeto.

Planimetría del objeto en sistema ASA, con sus respectivas observaciones para corregir
Figura 1.15

El lenguaje gráfico que se maneja en geometría descriptiva debe ser limpio y ordenado, de tal manera, que las vistas sean convenientes al usuario que las interprete, correctamente proporcionadas y a escala; tanto las proyecciones como los ejes de pliegue no se deben cruzar entre sí, las líneas de relación se dibujan únicamente en las vistas consecutivas, conservando el ángulo de 90º respecto al eje de pliegue que las comparte, y las distancias se miden directamente con un compás de precisión.

El plano de apoyo al ser paralelo al plano superior de proyección, será perpendicular a los planos de proyección frontal y lateral derecho, y por tal razón, se proyecta como filo en dichos planos; cuando el plano de apoyo se proyecta como filo suele denominarse “línea de tierra”, la cual, se considera como un elemento de referencia para medir alturas, cotas o niveles, y ángulos de rectas y planos respecto al plano de apoyo, también puede ser un BM o nivel de referencia, donde se emplaza un proyecto u objeto en general *(figura 1.16).*



Planimetría adecuada del objeto que se emplea en geometría descriptiva, sistema ASA
Figura 1.16

Después de la planimetría obtenida, se evidencia que existen vistas adyacentes a una en común, las cuales se denominan “vistas anexas entre sí”, en el ejemplo anteriormente descrito, las vistas anexas entre sí, son la vista superior y la vista lateral derecha, porque comparten la vista frontal; tanto en las vistas anexas entre sí como en las vistas adyacentes, se cumplen las siguientes reglas:

Regla 1: A todo punto proyectado le corresponde una sola línea de relación, desde una vista cualquiera hacia otra vista adyacente, la cual será perpendicular al eje de pliegue que las comparte.

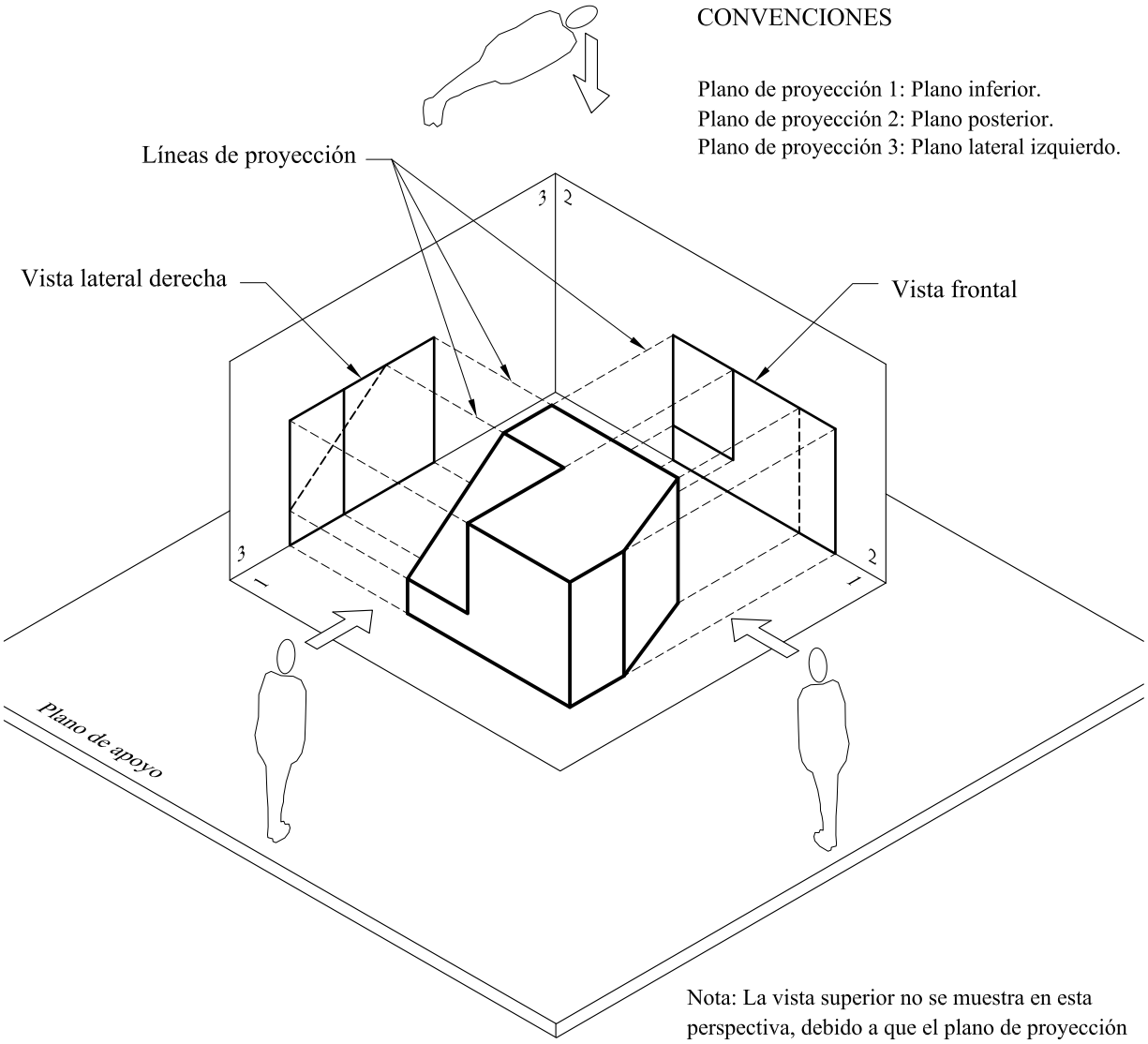
Regla 2: En todas las vistas anexas entre sí, la distancia medida desde un punto hasta el plano de proyección común, es igual; es decir, la distancia medida desde el punto proyectado hasta el eje de pliegue que comparte con la vista común, es la misma en todas estas vistas.

En dibujo técnico, los trazos de línea que se utilizan para representar proyecciones deben diferenciarse, con el fin de lograr una expresión gráfica ordenada y agradable a la vista; esto se consigue empleando criterios de intensidad, espesor, y tipo de línea *(figura 1.17).*

———————————	Línea visible: Contornos y proyecciones.
- - -

Los criterios de proyección diédrica estudiados en el sistema ASA son los mismos; lo que sucede en el sistema DIN, es que la vista o representación que aprecia el observador, se proyecta en un plano de proyección que se localiza atrás del objeto.

En la caja de proyección se utilizan los planos de proyección contrarios, donde se proyectan las mismas vistas que se obtuvieron en el sistema ASA, es decir, la vista superior se proyecta en el plano inferior, la vista frontal se proyecta en el plano posterior, y la vista lateral derecha se proyecta en el plano lateral izquierdo; en el sistema DIN, el plano inferior de proyección es equivalente al plano de apoyo, donde se localizan el objeto y el observador *(figura 1.19*).

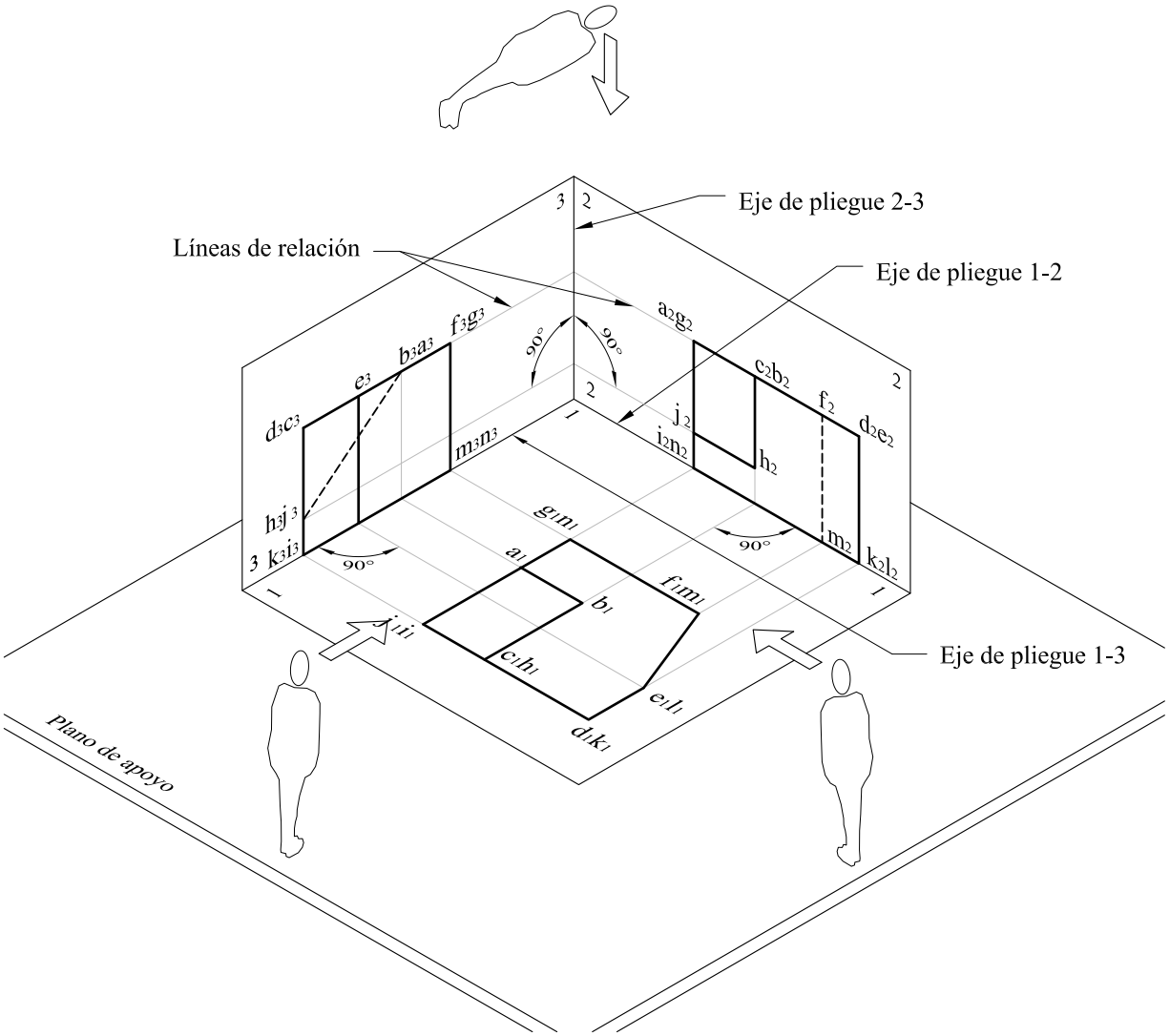


Objeto proyectado en sistema DIN
Figura 1.19

Los planos de proyección se designarán de acuerdo a la vista obtenida, de la siguiente manera:

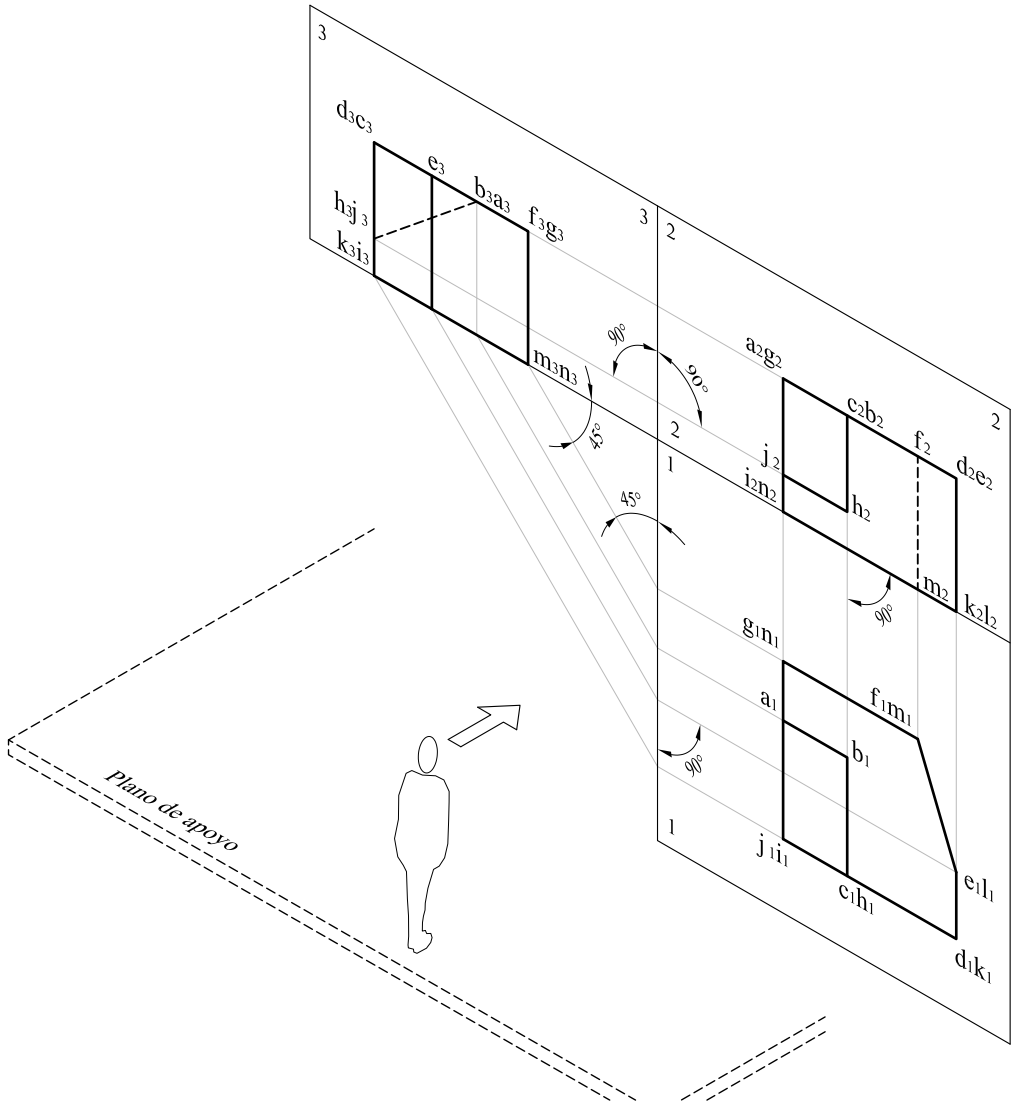
El plano de proyección inferior, en el cual se proyecta la vista superior, se identifica con el Nº 1.
El plano de proyección posterior, en el cual se proyecta la vista frontal, se identifica con el Nº 2.
El plano de proyección lateral izquierdo, en el cual se proyecta la vista lateral derecha, se identifica con el Nº 3.

Con estas consideraciones, se procede a reconocer y designar los ejes de pliegue que existen entre dos planos de proyección consecutivos, determinándose los ejes de pliegue 1-2, 1-3, y 2-3; de esta forma, las líneas de relación que conectan dos vistas adyacentes serán perpendiculares al eje de pliegue que las conforma *(figura 1.20).*



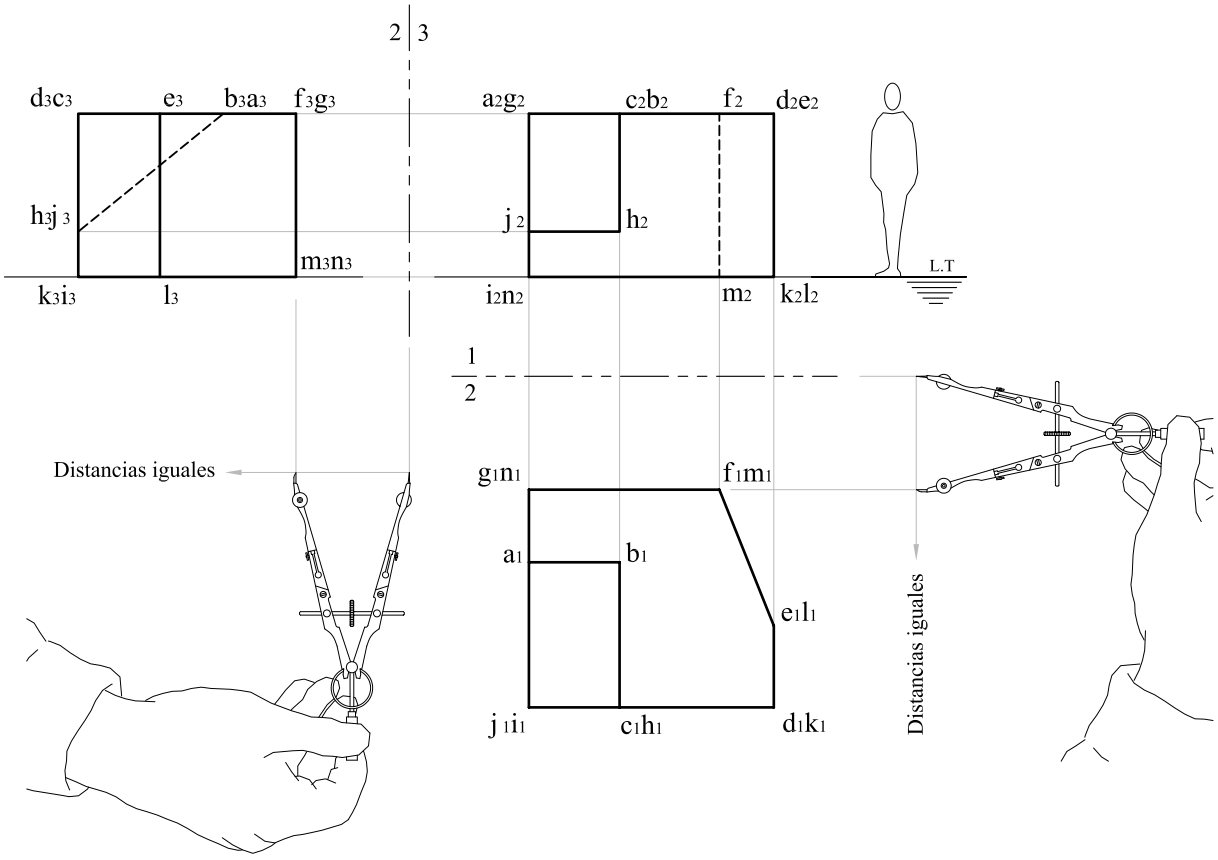
Vistas principales de un objeto, en sistema DIN
Figura 1.20

Después de obtener las vistas principales en la caja de proyección, se procede a realizar el abatimiento de los planos de proyección; tanto el plano lateral izquierdo como el plano inferior, giran un ángulo de 90º, alineándose con el plano frontal de proyección. Se identifican las vistas anexas entre sí, las cuales poseen las mismas distancias medidas hasta el plano común *(figura 1.21).*



Abatimiento de los planos de proyección, en sistema DIN
Figura 1.21

La planimetría obtenida se procesa en un medio bidimensional, teniendo en cuenta las consideraciones para realizar un dibujo técnico apropiado al lenguaje que se maneja en geometría descriptiva; como la línea de tierra coincide con el eje de pliegue 1-2, es conveniente alejarla un poco del mismo, en las vistas donde se proyecta *(figura 1.22).*



Planimetría del objeto realizada en sistema DIN
Figura 1.22

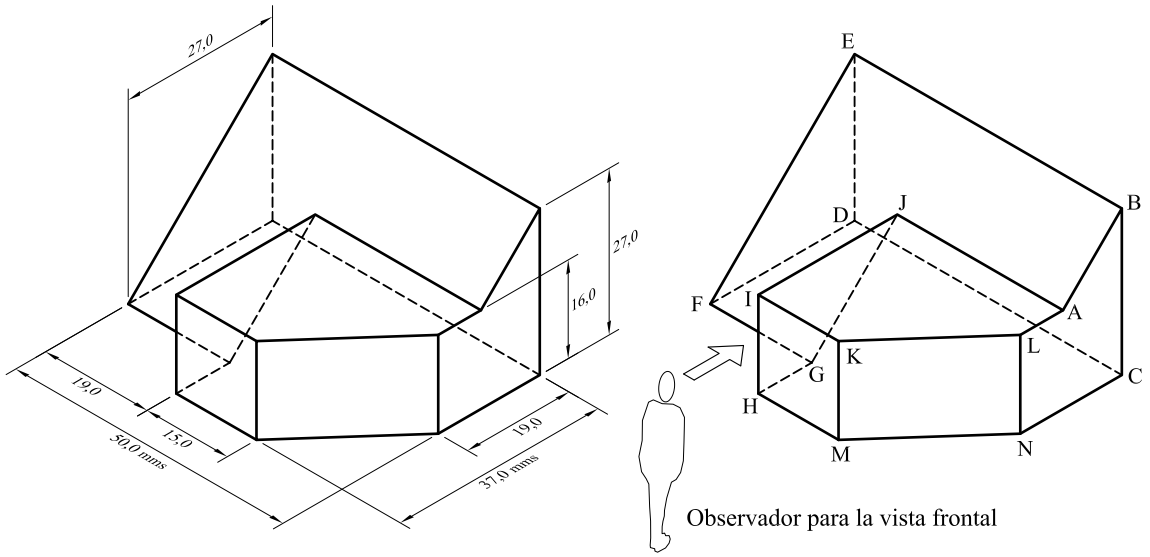
1.4 Ejemplos.

1.4.1 Ejemplo 1.

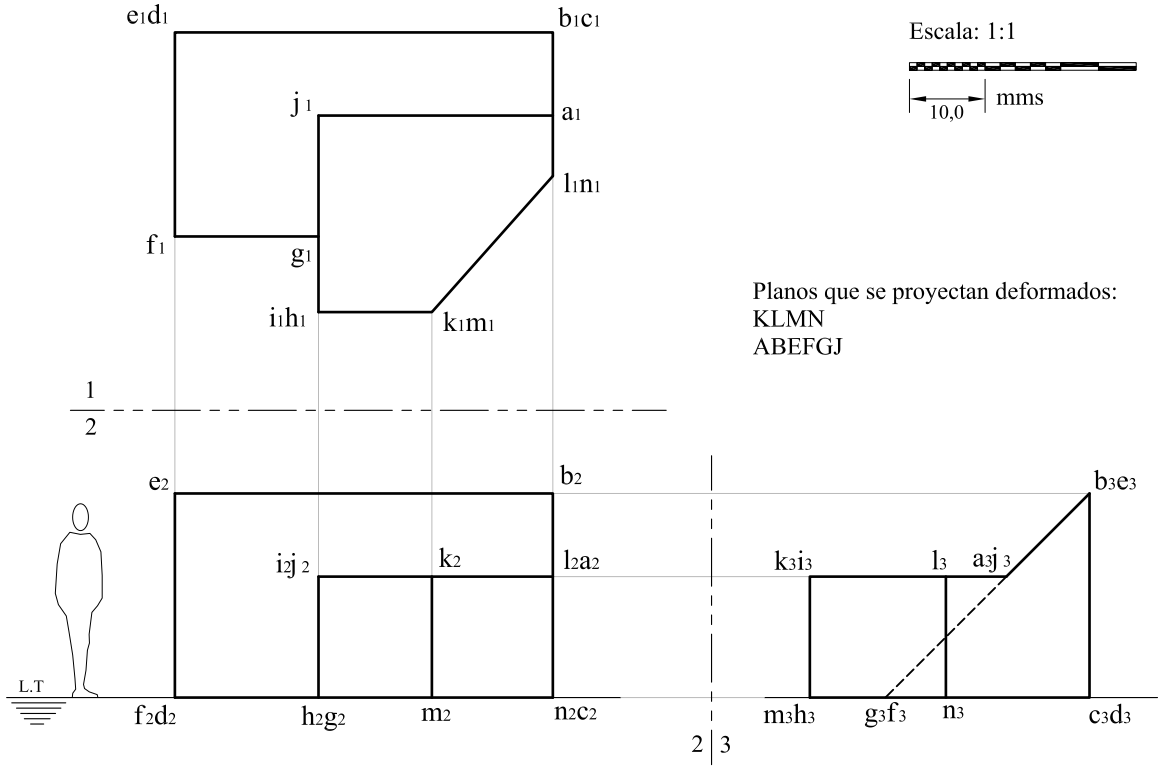
Partiendo del objeto representado en perspectiva, y cuyas dimensiones están expresadas en mms; identifique los vértices, y construya las tres vistas principales del mismo; trabajar en sistema ASA, a escala 1:1. Analice las vistas y establezca los planos que se proyectan deformados *(figura 1.23).*

En primer lugar, se procede a identificar los vértices del objeto mediante letras, sin importar el orden; luego, se plantea la ubicación del observador, para que aprecie la vista frontal; enseguida, se miden las dimensiones a escala, y se dibujan las vistas y las líneas de relación entre vistas adyacentes, teniendo en cuenta los criterios de expresión gráfica, vistos anteriormente.

Por conveniencia, se dibuja la vista superior en forma simultánea con la vista frontal, y la vista lateral derecha por ser anexa entre sí con la vista superior, se dibuja por construcción, manejando las mismas distancias desde los puntos hasta el plano frontal *(figura 1.24).*



Perspectiva del objeto con sus vértices designados
Figura 1.23



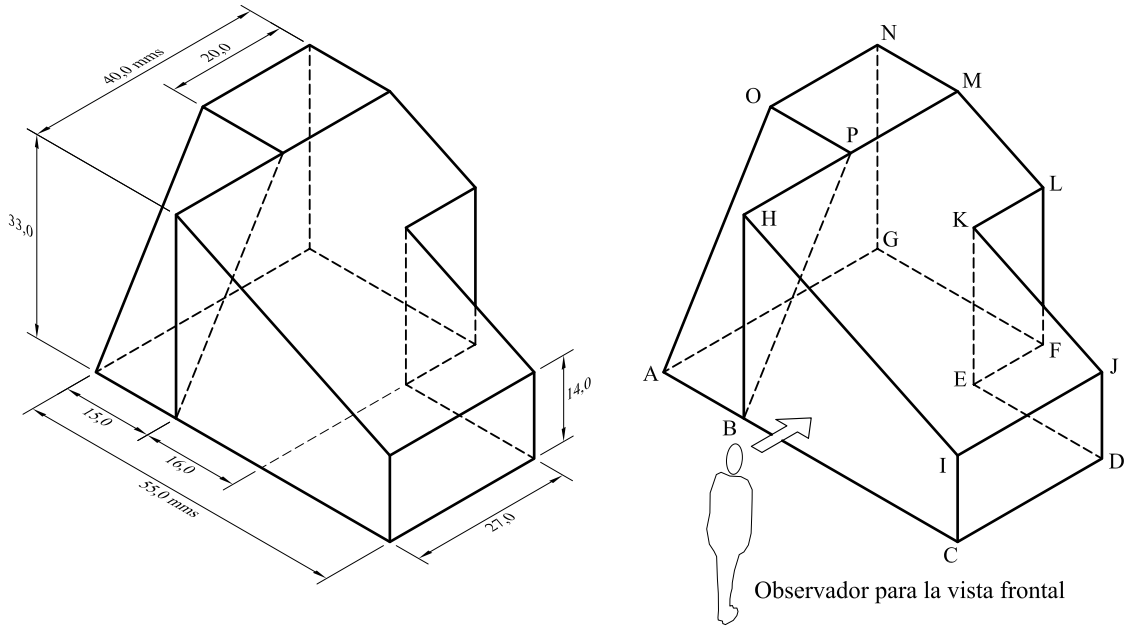
Planimetría del objeto realizada en sistema ASA
Figura 1.24

1.4.2 Ejemplo 2.

Partiendo del objeto representado en perspectiva *(figura 1.25)*, cuyas dimensiones están expresadas en mms; designe los vértices, y construya las tres vistas principales del mismo; trabajar en sistema DIN, a escala 1:1. Analice las vistas y establezca los planos que se proyectan deformados.

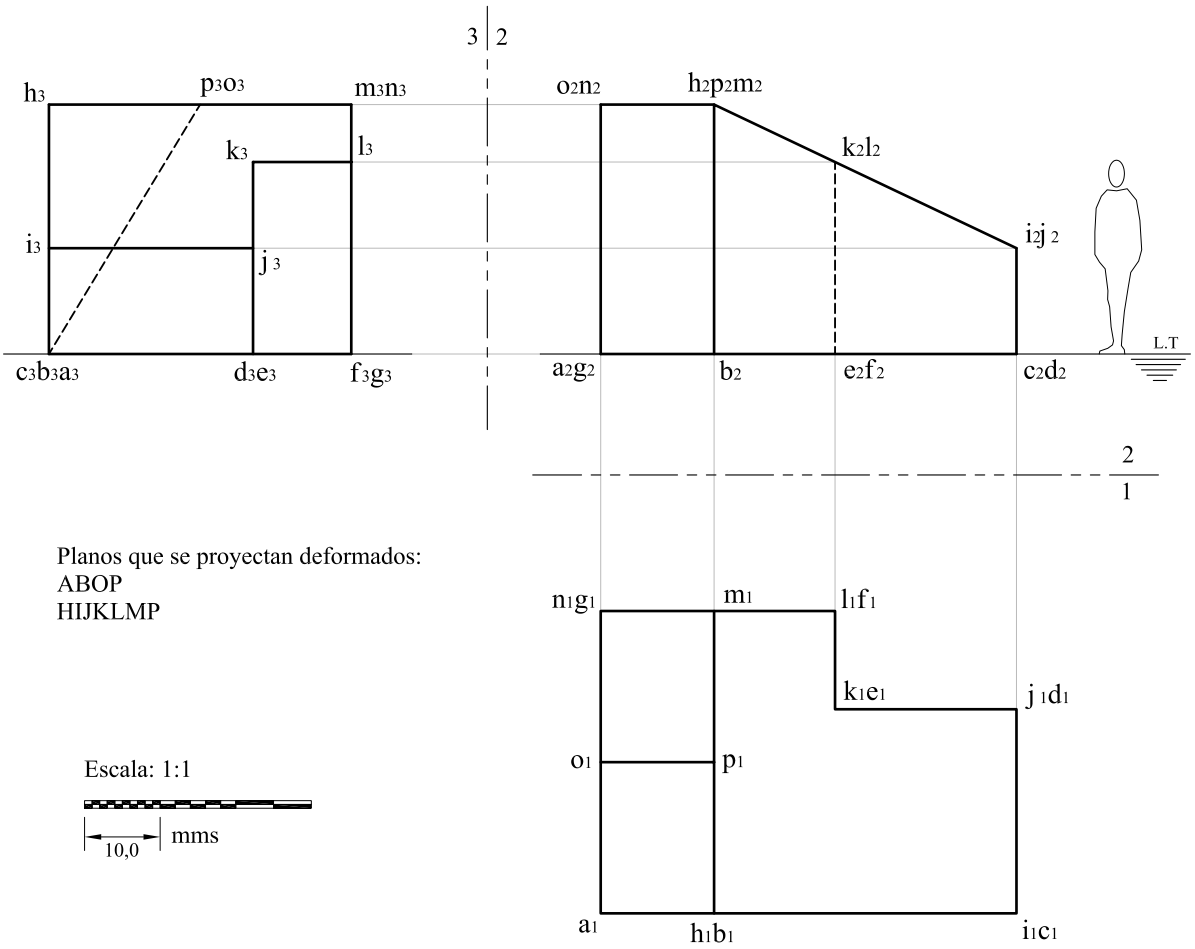
Al igual que en el anterior ejemplo, se procede a identificar los vértices del objeto mediante letras, sin importar el orden; luego, se plantea la ubicación del observador, para que aprecie la vista frontal; enseguida, se miden las dimensiones a escala, y se dibujan las vistas y las líneas de relación entre vistas adyacentes, teniendo en cuenta los criterios de expresión gráfica, vistos anteriormente.

Por conveniencia, se dibuja la vista superior en forma simultánea con la vista frontal, y la vista lateral derecha por ser anexa entre sí con la vista superior, se dibuja por construcción, manejando las mismas distancias desde los puntos hasta el plano frontal *(figura 1.26)*.



Perspectiva del objeto con sus vértices designados
Figura 1.25

En síntesis, al proyectar diédricamente en ambos sistemas de proyección (ASA y DIN), se obtienen las mismas vistas, lo que es diferente, es el abatimiento y posición de los planos de proyección. Plantear la línea de tierra en ambos sistemas, proporciona una mayor orientación para el observador que aprecia el objeto en diferentes puntos de vista; además, permite establecer criterios para la ubicación del plano de apoyo y el cielo.

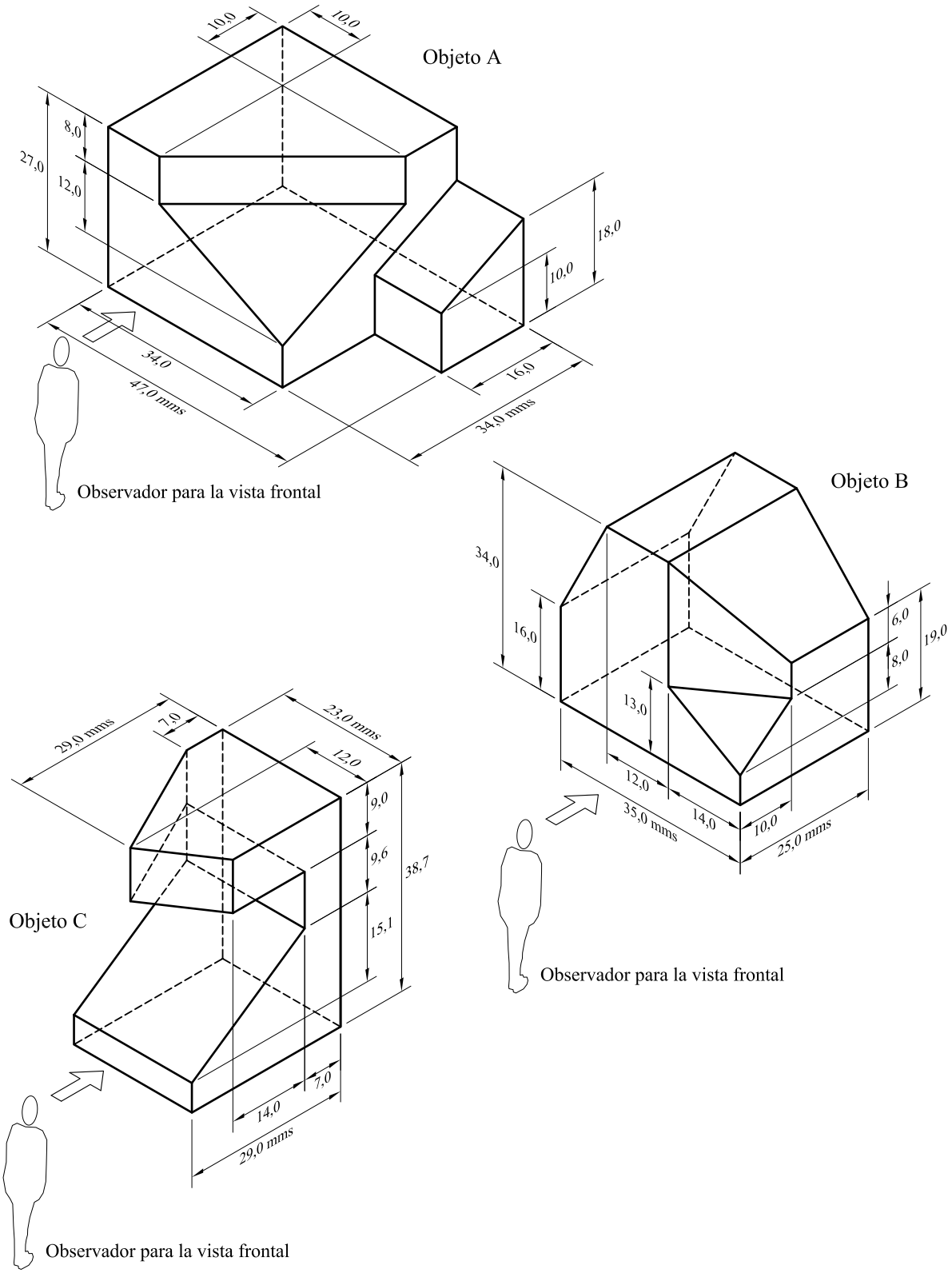


Planimetría del objeto realizada en sistema DIN
Figura 1.26

1.5 Ejercicios.

Partiendo de los objetos planteados en perspectiva *(figura 1.27)*, y cuyas dimensiones están expresadas en mms, designe los vértices, y dibuje las tres vistas principales de los mismos; trabaje a escala: 1,5: 1, en sistema ASA y DIN. Visualice y establezca los planos que se proyectan deformados [1].

[1] Nota del Autor: Se recomienda trabajar los ejercicios en formatos de papel bond de 90 gms, tamaño 1/4 ó 1/2 pliego, según el caso; realice los dibujos con lápiz HB y 3H, de acuerdo a los criterios de trazo adecuados y utilizados en dibujo técnico.



Perspectiva de los objetos planteados para resolver
Figura 1.27

2.0 Vistas auxiliares

2.0 ¿Que son vistas auxiliares?

Las vistas auxiliares, son aquellas vistas que son diferentes a las tres proyecciones principales de un objeto; éstas permiten representar el mismo desde una dirección específica, y por consiguiente, obtener información geométrica adicional que se requiera del objeto. La utilización de las vistas auxiliares constituye un recurso importante dentro de la geometría descriptiva, ya que éstas se emplean para:

- Conseguir nuevas visualizaciones del objeto, y por consiguiente, analizar detalles constructivos.
- Determinar representaciones especiales de los elementos geométricos.
- Encontrar verdaderas magnitudes y formas, de rectas, planos, y ángulos.
- Determinar elevaciones o cotas de elementos geométricos.
- Demostrar los teoremas y normas que intervienen en una determinada situación geométrica.

Dependiendo de los diferentes puntos de vista del observador, se pueden plantear y construir infinitas vistas auxiliares para representar un objeto; por tal razón, es necesario conocer la construcción de éstas, y estudiar los tipos de vistas auxiliares más empleados.

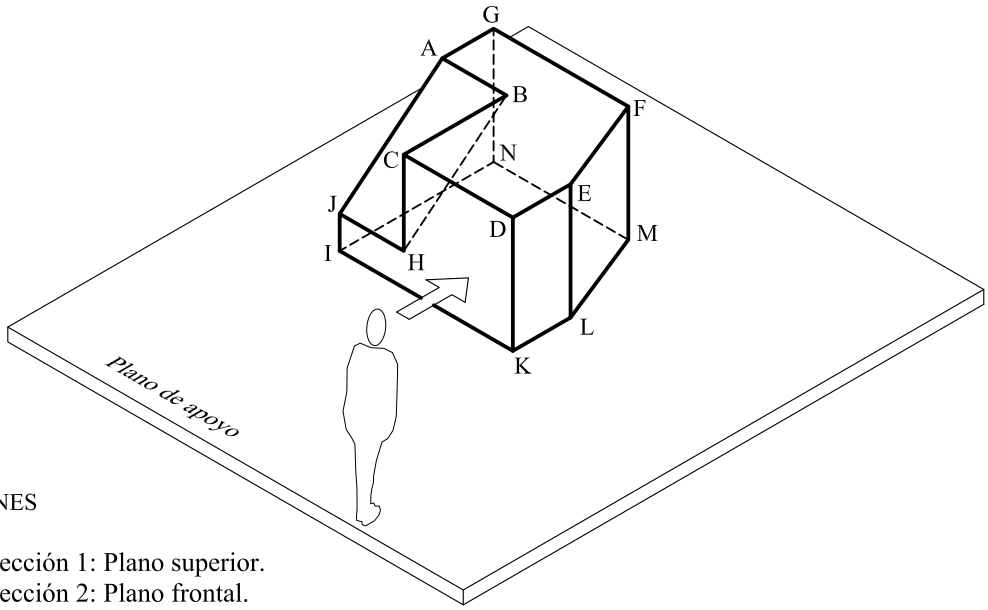
2.1 Construcción de las vistas auxiliares.

El principio por el cual se rige la construcción de las vistas auxiliares, se fundamenta en la aplicación del concepto de las vistas anexas entre sí, en las cuales, la distancia desde un punto del objeto hacia el plano de proyección común, es igual; sencillamente, la nueva proyección que se va a construir, partirá desde una vista adyacente, la cual, será identificada como la vista común, y por consiguiente, la nueva proyección será una vista anexa entre sí, con respecto a las demás que comparten la vista común.

De acuerdo al sólido que se planteó en el anterior capítulo *(véase figura 1.11)*, se comprobó que los planos ABHJ y EFLM se proyectan deformados; para ello, se procede a plantear y construir unas vistas auxiliares que permitan determinar la verdadera forma de los mismos; de esta manera, se consigue información geométrica adicional del objeto, tales como: la forma, el perímetro, los ángulos internos, y el área.

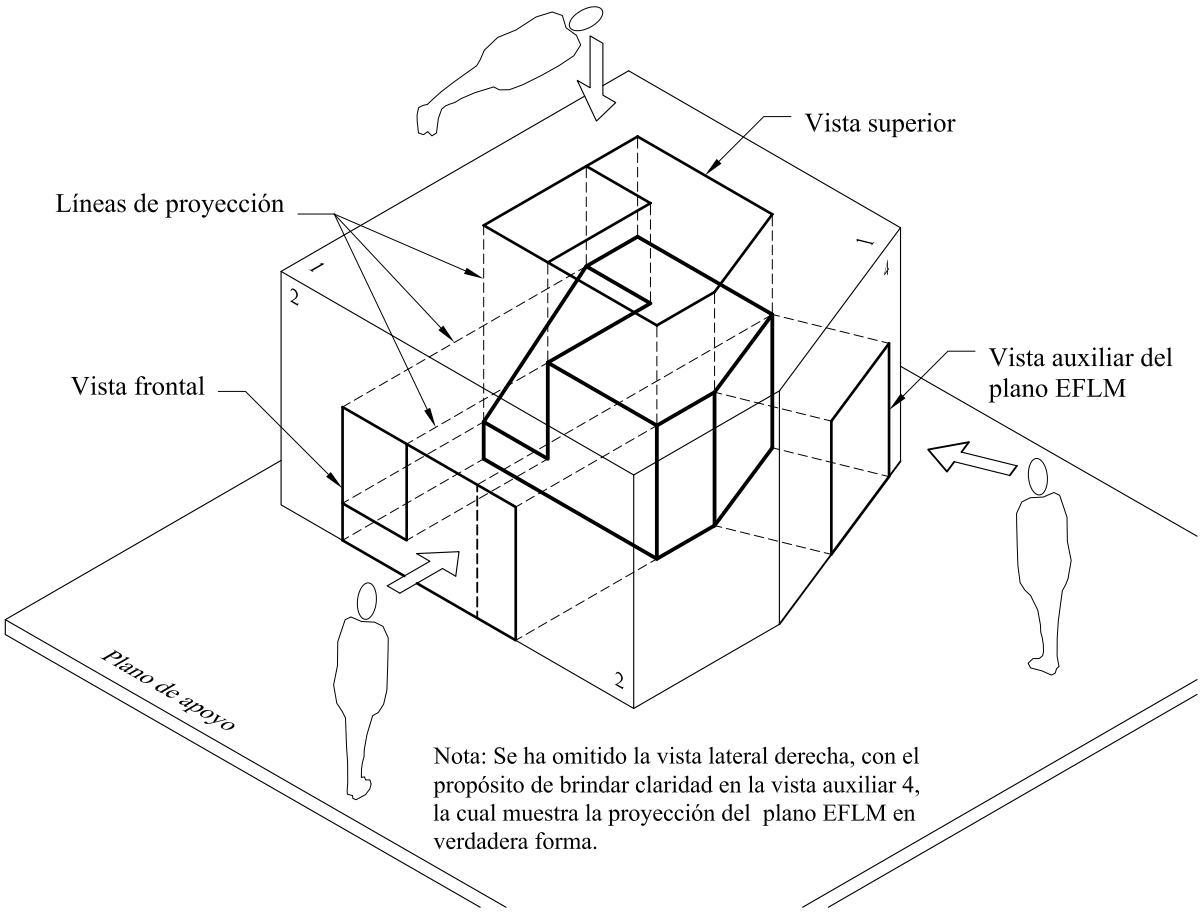
A manera de introducción, se estudiará la construcción de un plano de proyección auxiliar que permita apreciar la verdadera forma del plano EFLM, el cual deberá ser paralelo al mismo; esto significa, que la caja de proyección deberá ser seccionada por un plano que sea perpendicular al plano superior de proyección; recuérdese que la condición entre dos planos adyacentes, es que éstos formen un ángulo diedro de 90º, determinándose el eje de pliegue 1-4. Los planos de proyección auxiliares se designan con el número 4 en adelante.

De esta forma, la nueva vista auxiliar 4 es adyacente a la vista superior, y a su vez, es una vista anexa entre sí, con respecto a la vista frontal, ya que, éstas comparten la vista superior (vista común). Al proyectar perpendicularmente los vértices E, F, L, y M hacia el plano de proyección auxiliar 4, se obtiene la vista auxiliar 4, donde el plano EFLM se proyecta en verdadera forma *(figura 2.1)*.



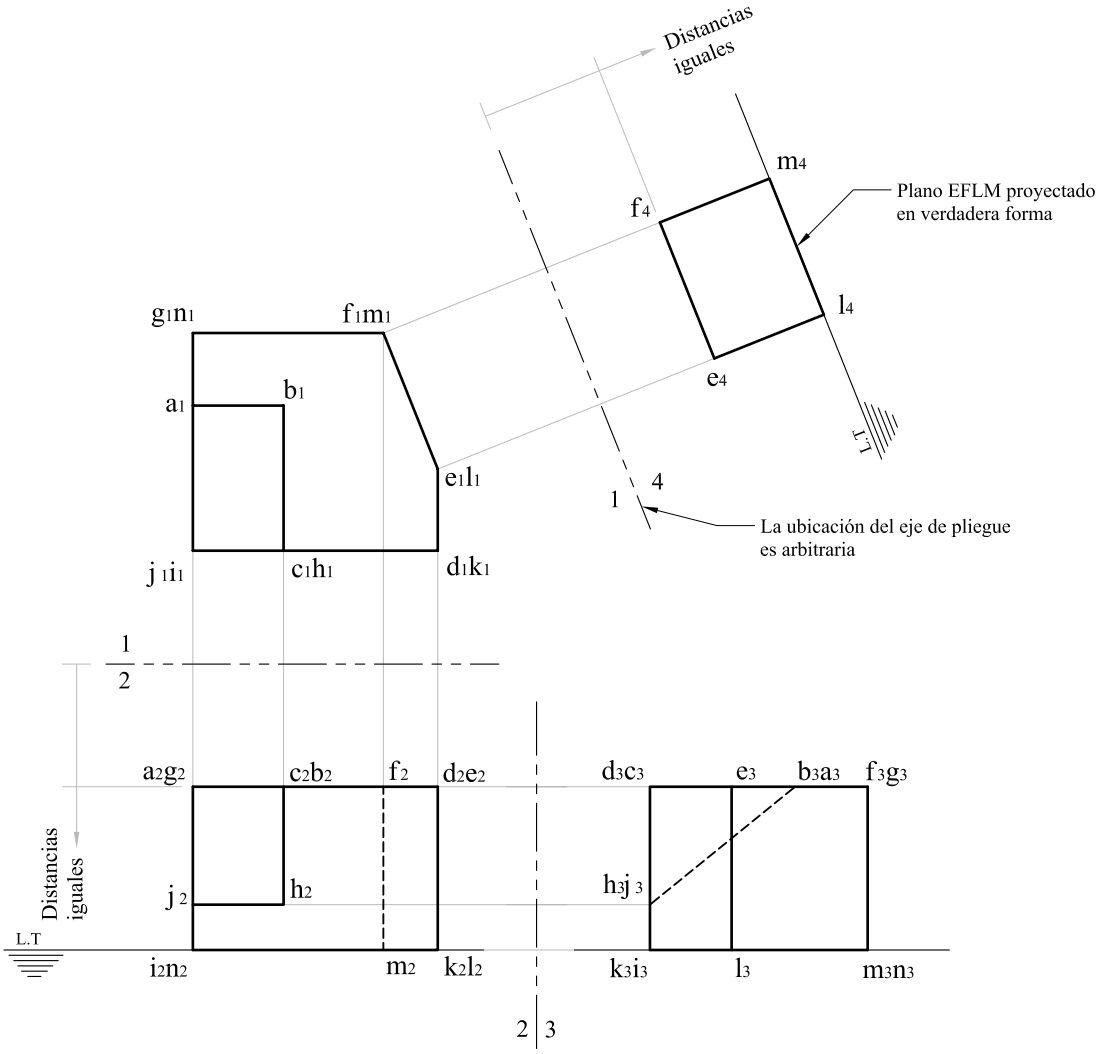
CONVENCIONES

Plano de proyección 1: Plano superior.
Plano de proyección 2: Plano frontal.
Plano de proyección 4: Plano auxiliar.



Construcción de un plano de proyección auxiliar 4
Figura 2.1

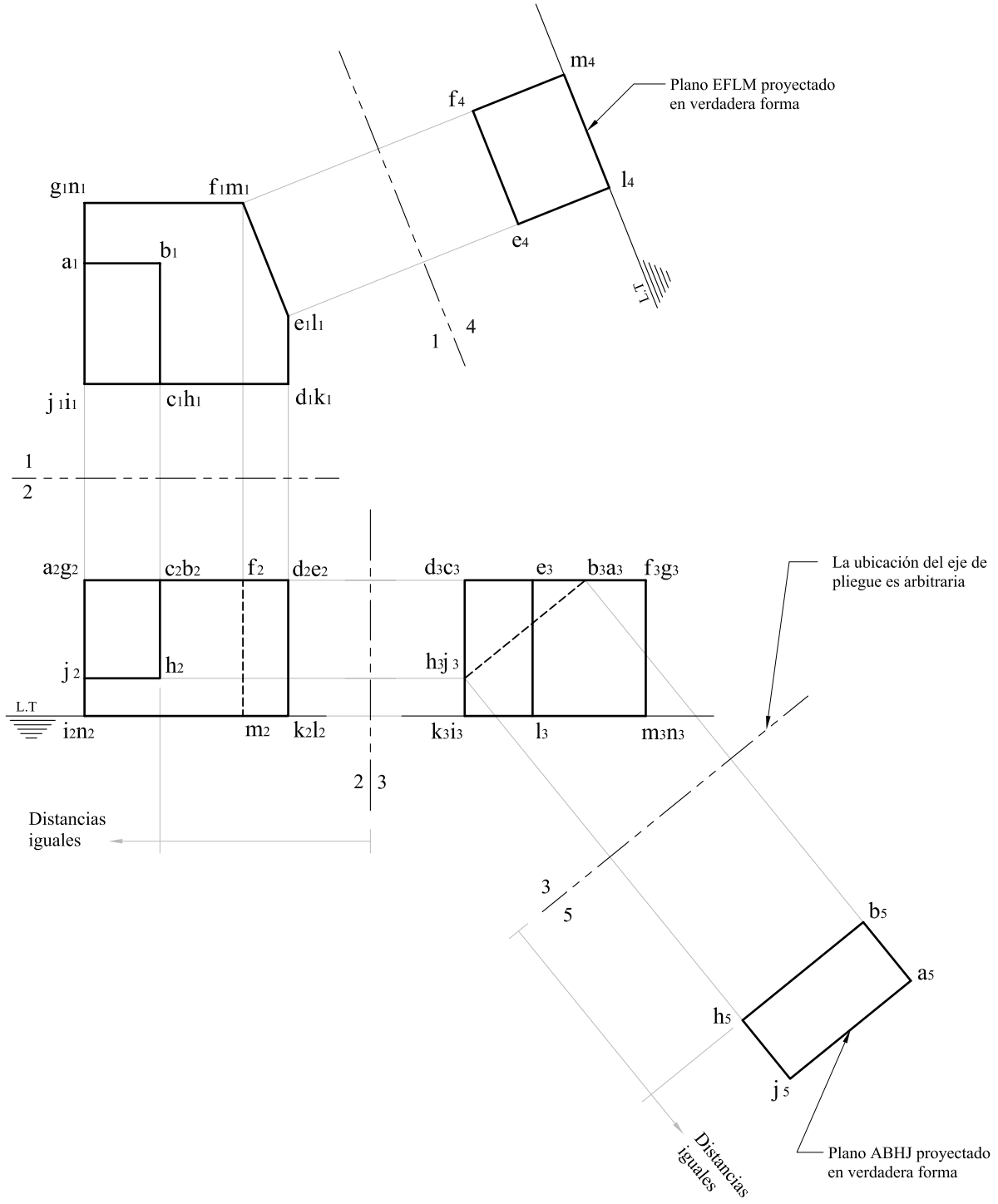
Para representar esta información en 2 dimensiones, se procede a medir las distancias desde los puntos e_2, f_2, l_2, m_2 hasta el eje de pliegue 1-2, utilizando para ello un compás de precisión, y se trasladan dichas distancias respectivamente desde el eje de pliegue 1-4 hacia los puntos e_4, f_4, l_4, m_4, a lo largo de las líneas de relación que le corresponde a cada punto *(figura 2.2).*



Planteamiento y construcción de la vista auxiliar 4
Figura 2.2

Con la misma metodología utilizada anteriormente, se plantea una vista auxiliar 5, adyacente a la vista lateral derecha, y a su vez, paralela al plano proyectado como filo a_3, b_3, h_3, j_3; de esta forma, la vista auxiliar 5 será anexa entre sí, con respecto a la vista frontal.

Se miden las distancias desde los puntos a_2, b_2, h_2, j_2, hasta el eje de pliegue 2-3, y se trasladan éstas medidas respectivamente desde el eje de plegue 3-5 hacia los puntos a_5, b_5, h_5, j_5, sobre cada línea de relación que le corresponde a cada punto *(figura 2.3)*



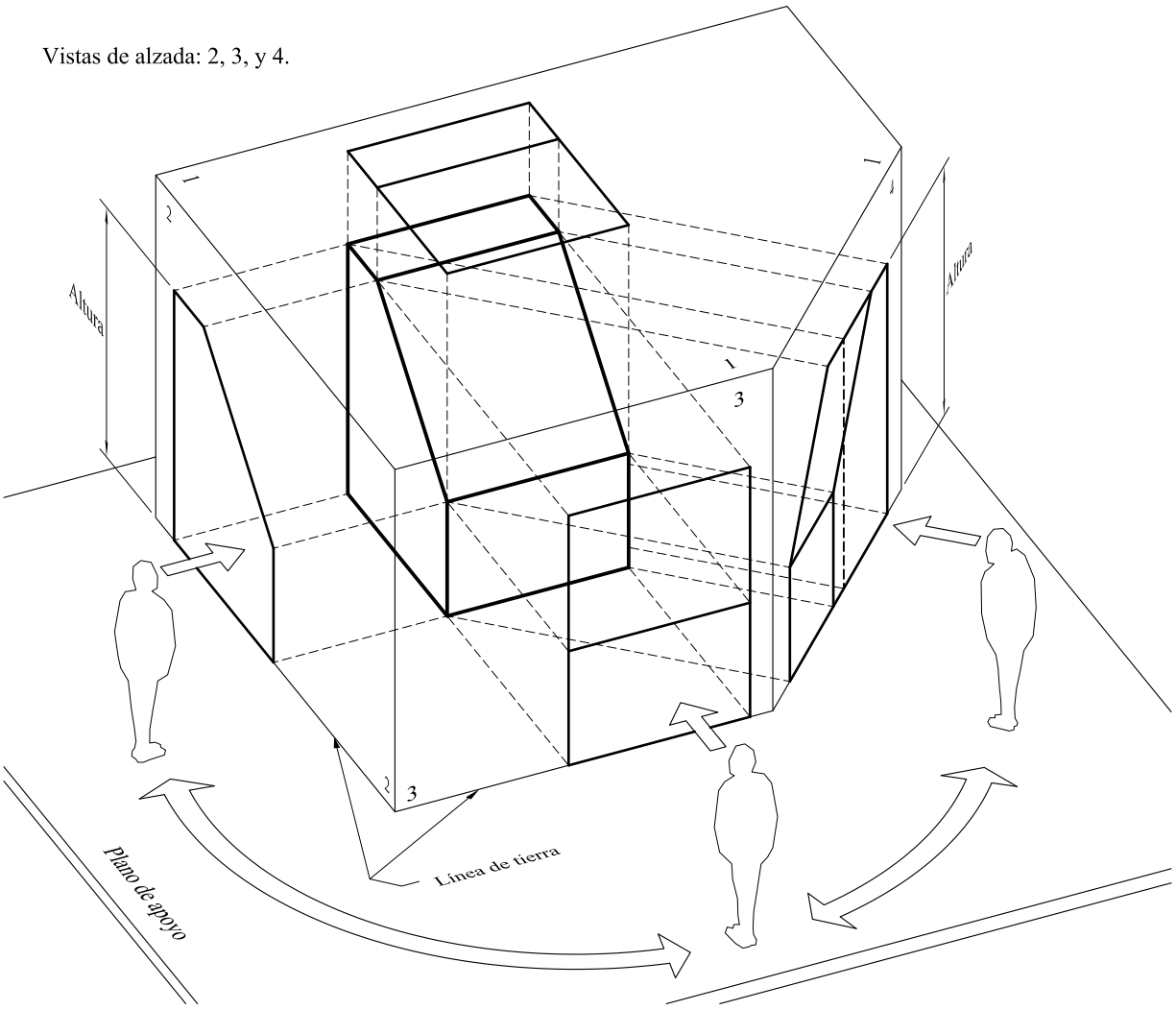
Planteamiento y construcción de la vista auxiliar 5
Figura 2.3

2.2 Clasificación de las vistas auxiliares.

Tanto las vistas principales como las vistas auxiliares, generalmente son adyacentes y anexas entre sí, dependiendo de cómo se construyan; pero, se pueden agrupar según los puntos de vista del observador hacia el objeto, los cuales, reúnen características similares.

2.2.1 Vistas de alzada.

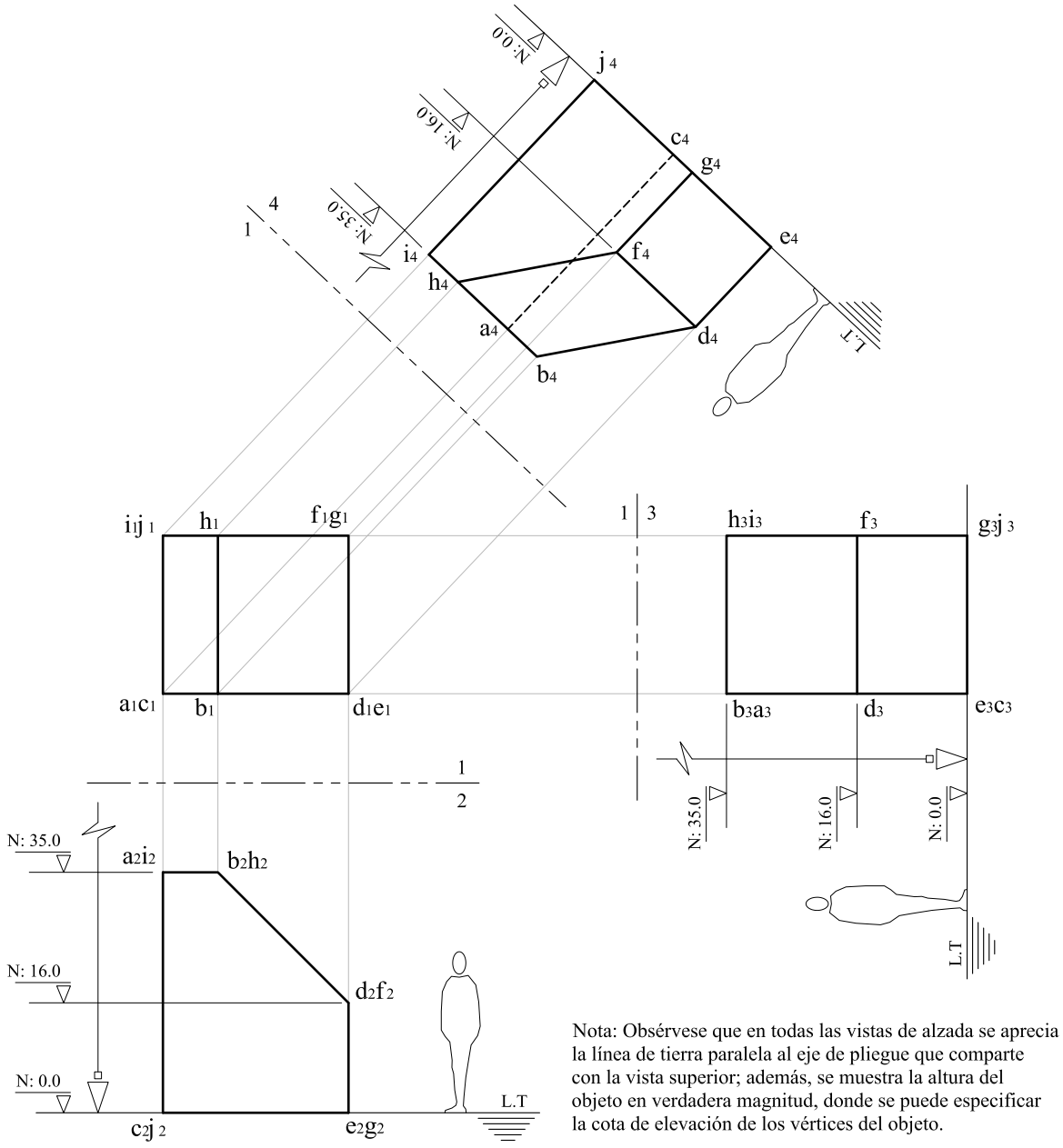
Son todas las vistas adyacentes a la vista superior; se caracterizan porque en ellas se visualiza la línea de tierra, la cual, se representa paralela al eje de pliegue que comparte con la vista superior, debido a que todos estos planos de proyección son perpendiculares al plano de apoyo; también se distinguen, porque la altura real del objeto se proyecta en verdadera magnitud, ya que los planos de proyección son paralelos a la vertical. En otras palabras, es como si un observador caminara alrededor de la caja de proyección y visualizara hacia el objeto, apreciando la altura del mismo, y la línea de tierra en diversos puntos de vista; de ahí su nombre *(figura 2.4).*



Vistas de alzada
Figura 2.4

A continuación, se procede a realizar el abatimiento de los planos de proyección, tomando como referencia el plano superior de proyección; de esta manera, las vistas de alzada por el simple hecho de compartir la vista superior, serán anexas entre sí.

Al visualizar la línea de tierra y la altura en verdadera magnitud en las vistas de alzada, se facilita la medición de cotas de elevación de puntos o vértices del objeto, respecto al plano de apoyo; esta lectura debe realizarse a lo largo de una línea vertical o línea a plomada perpendicular a la línea de tierra. Este tipo de proyecciones son muy utilizadas en Arquitectura e Ingeniería para proyectar y dibujar fachadas, secciones, perfiles, y altimetrías *(figura 2.5).*



Abatimiento y representación de las vistas de alzada
Figura 2.5

De las vistas de alzada se deducen las siguientes reglas:

Regla 3: En cada vista de alzada se percibe la línea de tierra, la cual es paralela al eje de pliegue que comparte con la vista superior.

Regla 4: En todas las vistas de alzada se visualiza la altura del objeto en verdadera magnitud.

2.2.2 Vistas inclinadas.

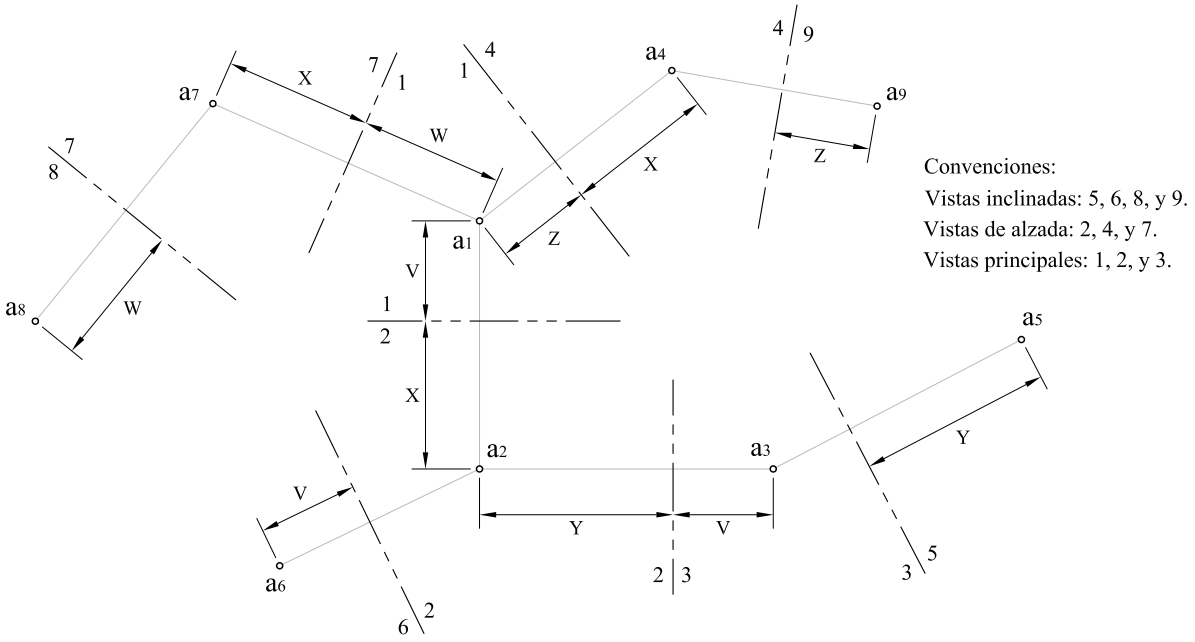
Son vistas adyacentes a las vistas de alzada; se caracterizan porque sus planos de proyección no son paralelos, ni perpendiculares al plano superior de proyección; esto quiere decir, que los rayos visuales del observador, en ningún momento apreciarán el plano de apoyo como filo, ni mucho menos en verdadera forma. Las vistas inclinadas más utilizadas son las vistas adyacentes al plano frontal, y las vistas adyacentes al plano lateral derecho; en dichas vistas se deducen las siguientes reglas:

Regla 5: En todas las vistas inclinadas nunca se aprecia la línea de tierra.

Regla 6: En todas las vistas inclinadas adyacentes al plano frontal de proyección, incluidas las demás vistas adyacentes al mismo, se visualiza la profundidad del objeto en verdadera magnitud.

Regla 7: En todas las vistas inclinadas adyacentes al plano lateral derecho de proyección, incluidas las demás vistas adyacentes al mismo, se visualiza el ancho del objeto en verdadera magnitud.

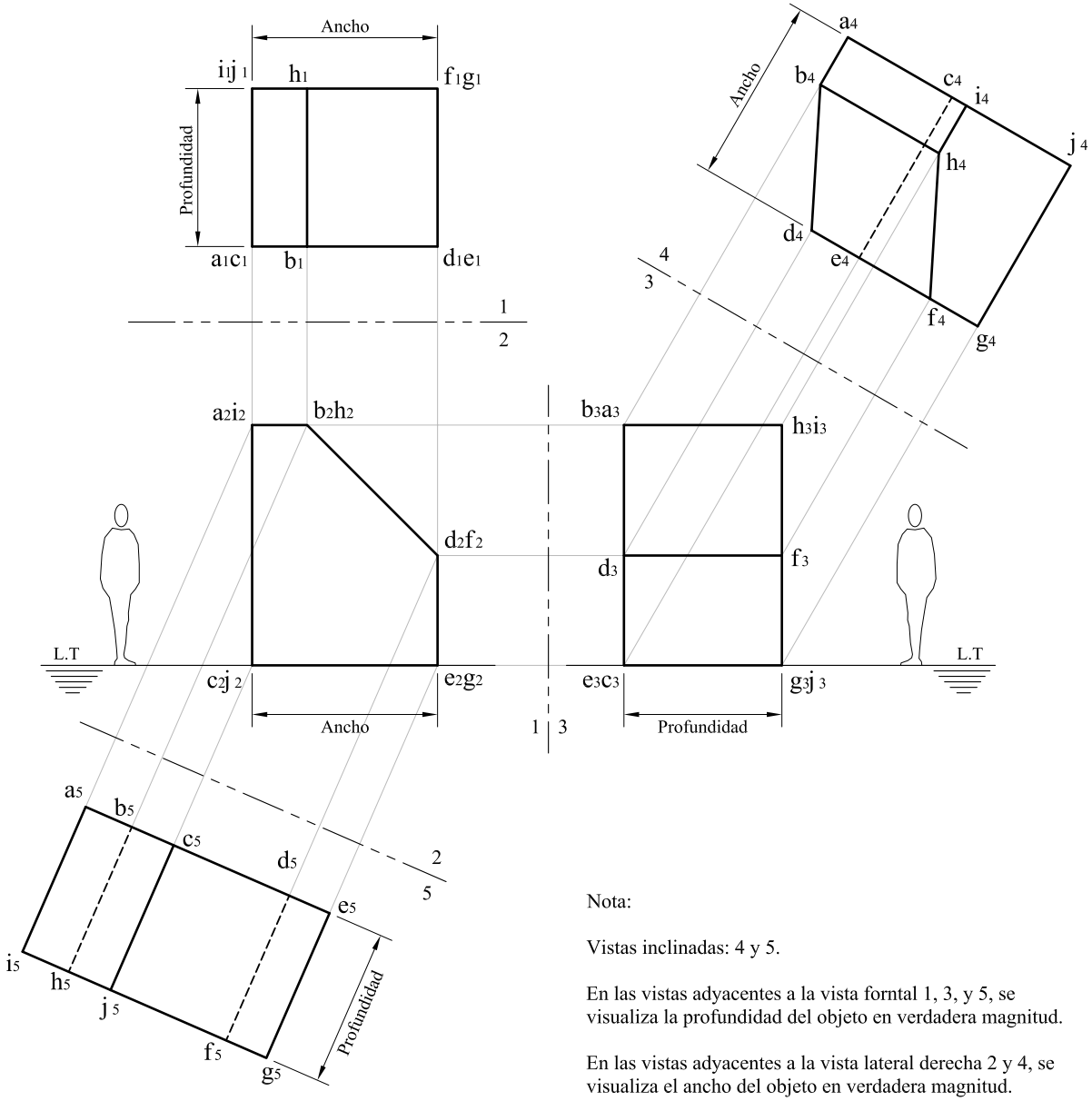
Dichas vistas, son utilizadas para visualizar detalles constructivos por encima o por debajo del objeto, en forma diagonal, tales como: cimentaciones, taludes, planos de cubierta, y elementos estructurales inclinados; a continuación, se muestran diversas vistas inclinadas de un punto A *(figura 2.6).*



Vistas auxiliares de un punto A - vistas principales, de alzada, e inclinadas
Figura 2.6

Tomando como referencia el objeto planteado en la figura 2.5, se procede a plantear 2 vistas inclinadas con el fin de explicar las reglas 6 y 7, anteriormente descritas *(figura 2.7).*

Por el momento, el lector podrá ejercitar la destreza para visualizar las proyecciones auxiliares que se vayan construyendo, pues deberá juzgar los planos y aristas que sean visibles y ocultos; lo importante es tener en cuenta, la dirección de los rayos visuales para las nuevas proyecciones que se planteen.



Nota:

Vistas inclinadas: 4 y 5.

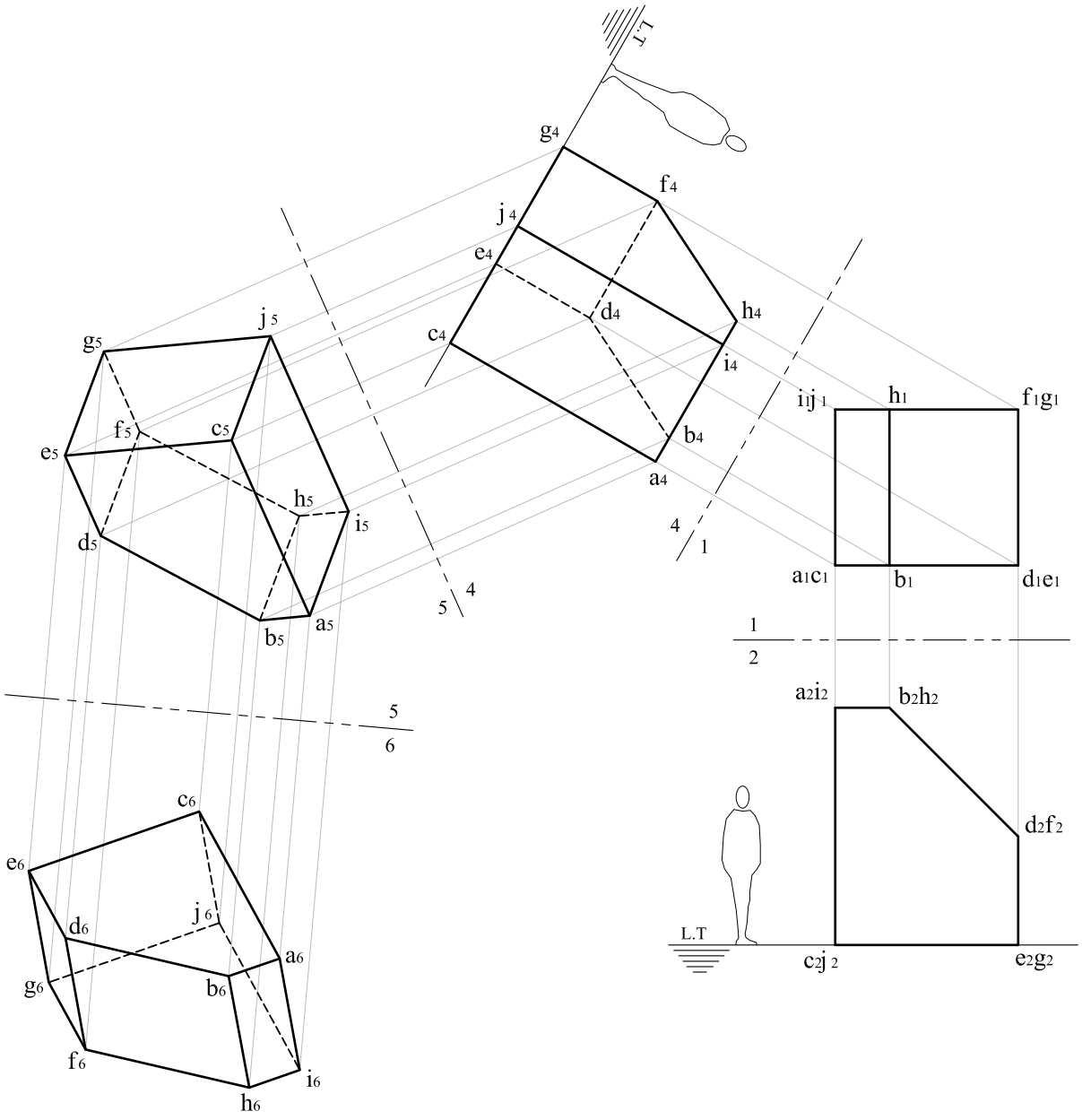
En las vistas adyacentes a la vista forntal 1, 3, y 5, se visualiza la profundidad del objeto en verdadera magnitud.

En las vistas adyacentes a la vista lateral derecha 2 y 4, se visualiza el ancho del objeto en verdadera magnitud.

Planteamiento de dos vistas inclinadas de un objeto
Figura 2.7

2.2.3 Vistas adyacentes a otra vista auxiliar.

Son vistas adyacentes a una vista inclinada y/o de alzada, y de aquí en adelante; se caracterizan porque brindan la sensación de “tridimensionalidad” del objeto, debido a la mayoría de apreciación de planos del objeto en proyecciones deformadas; es decir, que las tres dimensiones del objeto no se proyectan en verdadera magnitud. Por esta razón, son vistas difíciles de visualizar, ya que el dibujante debe utilizar destreza con la imaginación, cumpliendo el papel de observador *(figura 2.8).*



Vistas adyacentes a otra vista auxiliar de un objeto
Figura 2.8

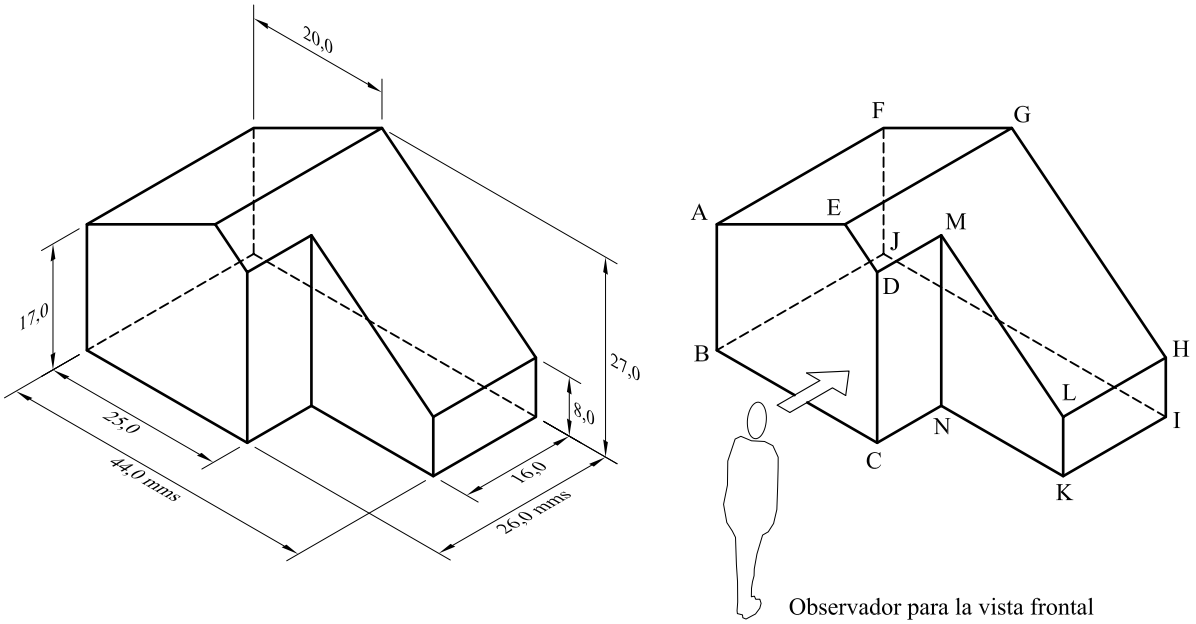
Cuando se siguen dibujando este tipo de vistas en forma continua, el dibujante podrá evidenciar que el objeto va rotando cada 90º, como si se tratara de una orbita 3D de Autocad, brindando la sensación de movimiento y perspectiva tridimensional.

Si el proceso de visualizar las proyecciones que se construyan, se dificulta; es necesario tener en cuenta la aplicación de ciertas “normas de visibilidad”, que permitan conseguir la visualización, mediante un análisis mecánico y sencillo. Estos aspectos se considerarán en el siguiente capítulo.

2.3 Ejemplos.

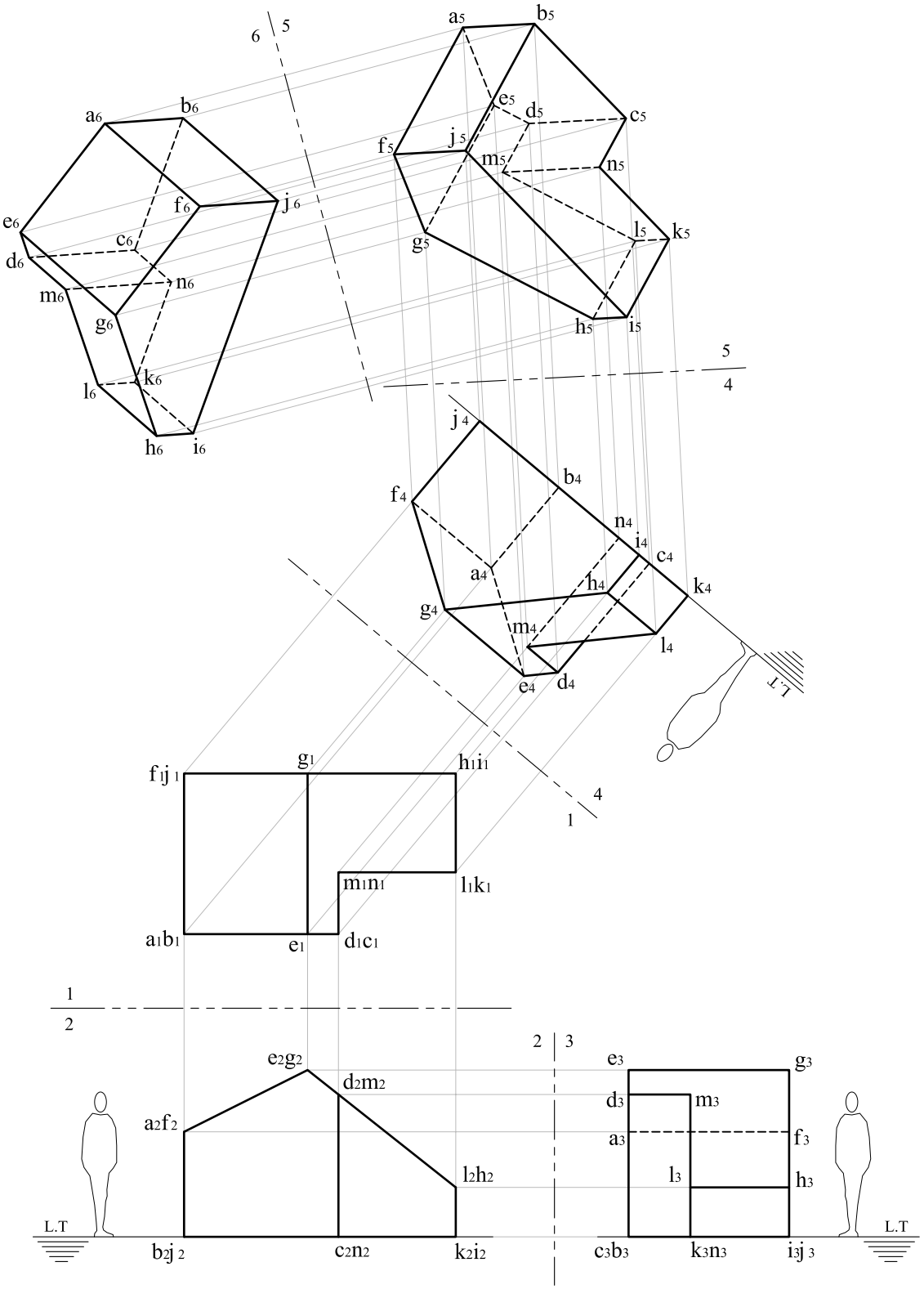
2.3.1 Ejemplo 1.

De acuerdo al objeto planteado en perspectiva *(figura 2.9)*, cuyas dimensiones están expresadas en mms, y sus vértices debidamente designados con letras; construya las tres proyecciones principales del mismo en sistema ASA; además, se debe plantear una vista de alzada, una vista inclinada, y una vista adyacente a esta última. Trabajar a escala: 1: 1, y dibuje la línea de tierra donde corresponda; visualice en todas las proyecciones construidas.



Objeto del ejemplo 1 – Perspectiva y designación de vértices
Figura 2.9

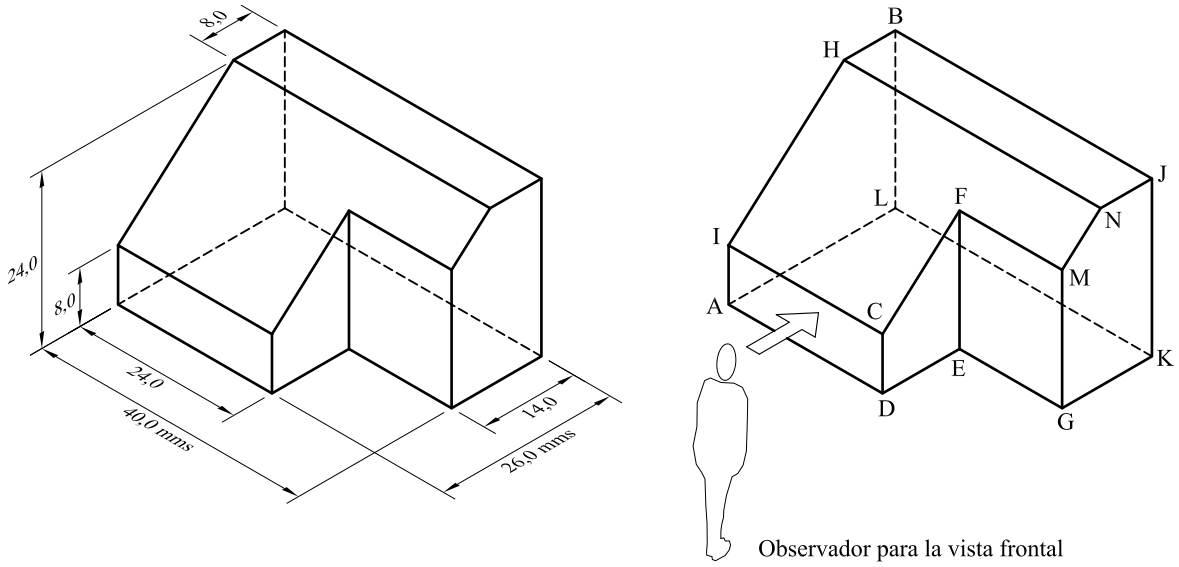
En primer lugar, se construyen las vistas principales y auxiliares solicitadas, midiendo con precisión las distancias en las vistas anexas entre sí, a lo largo de cada línea de relación que le corresponde a cada punto designado; luego, se unen estos vértices mediante líneas, para obtener las respectivas vistas; y finalmente, se estudia la dirección de los rayos visuales en cada proyección, para realizar el ejercicio de visualización *(figura 2.10).*



Desarrollo del ejemplo 1 – Vistas auxiliares solicitadas en sistema ASA
Figura 2.10

2.3.2 Ejemplo 2.

De acuerdo al objeto planteado en perspectiva *(figura 2.11)*, cuyas dimensiones están expresadas en mms, y sus vértices debidamente designados con letras; construya las tres proyecciones principales del mismo en sistema DIN; además, se debe plantear dos vistas de alzada, una vista inclinada, y una vista adyacente a esta última. Trabajar a escala: 1: 1, y dibuje una línea de tierra auxiliar 10 mms por encima del plano de apoyo; finalmente, visualice en todas las proyecciones construidas.

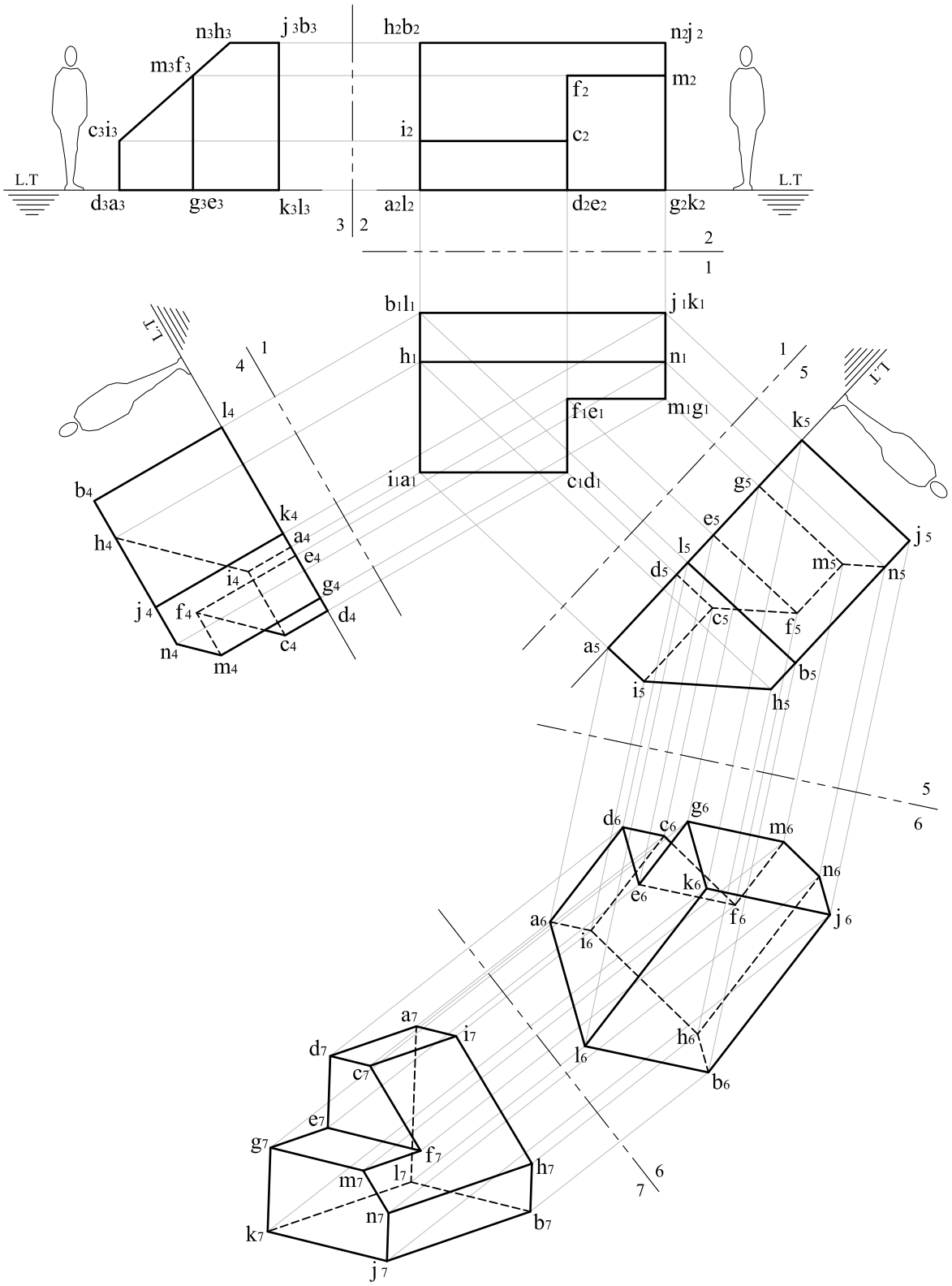


Objeto del ejemplo 2 – Perspectiva y designación de vértices
Figura 2.11

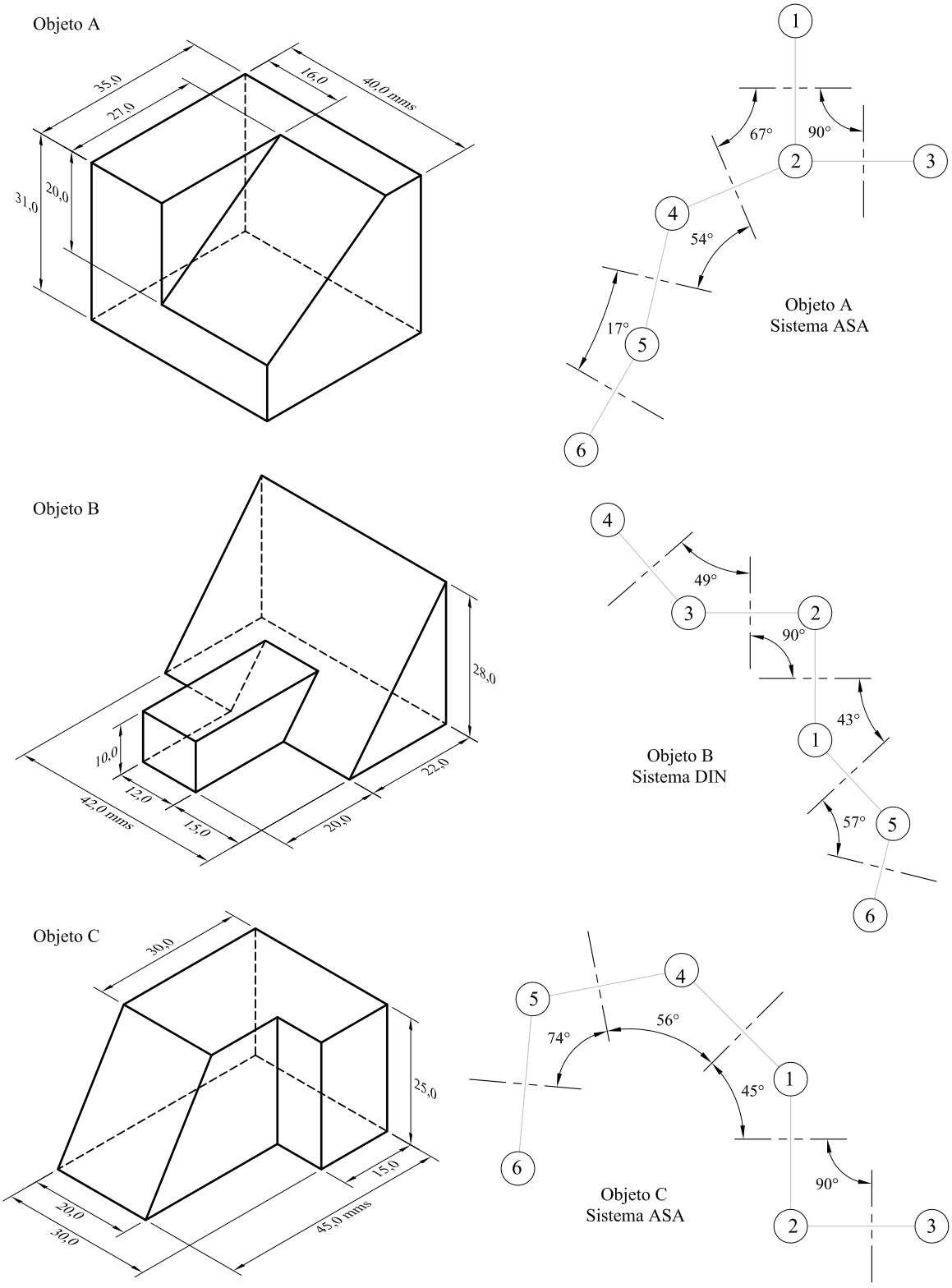
En primer lugar, se construyen las vistas principales y auxiliares solicitadas, midiendo con precisión las distancias en las vistas anexas entre sí, a lo largo de cada línea de relación que le corresponde a cada punto designado; luego, se unen estos vértices mediante líneas, para obtener las respectivas vistas; enseguida, se dibuja la línea de tierra auxiliar 10 mms por encima del plano de apoyo; y finalmente, se estudia la dirección de los rayos visuales en cada proyección, para visualizar *(figura 2.12)*.

2.4 Ejercicios.

Partiendo de los objetos en perspectiva, y cuyas dimensiones están expresadas en mms, designe los vértices mediante letras, y construya las tres vistas principales; además, dibuje las vistas auxiliares solicitadas, según el esquema de localización de los ejes de pliegue, y sistema de proyección indicado al lado de cada objeto; identifique y clasifique las vistas que se construyan. Trabaje a escala: 1,4:1, en 1/4 de pliego para cada objeto, dibuje la línea de tierra donde corresponda; finalmente, visualice en todas las vistas *(figura 2.13)*.



Desarrollo del ejemplo 2 – Vistas auxiliares solicitadas en sistema DIN
Figura 2.12



Perspectiva de objetos para resolver, con sus respectivos esquemas de localización de ejes de pliegue
Figura 2.13

3.0 Visualización de proyecciones

3.0 Visualización de proyecciones

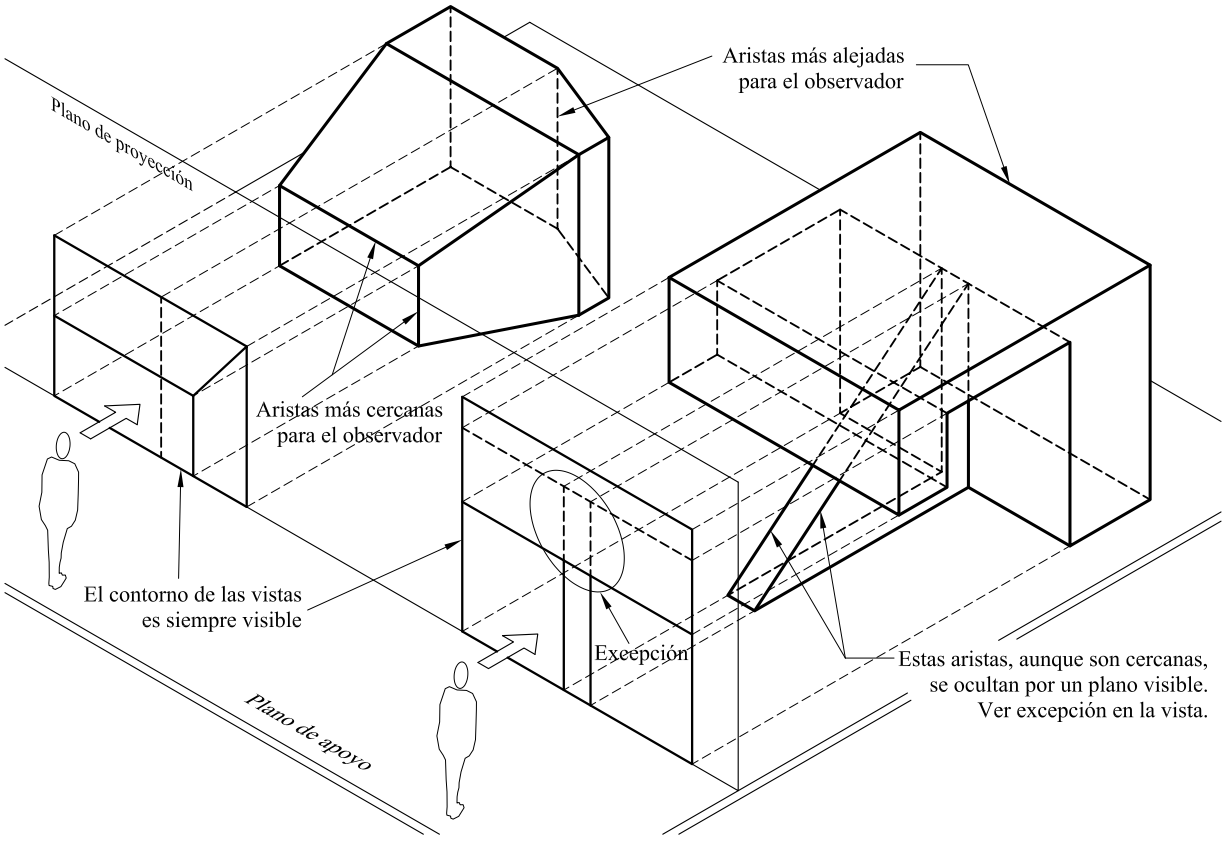
Después de construir una vista principal o auxiliar de un objeto, se deben considerar los aspectos de visibilidad, es decir, determinar los elementos visibles y ocultos del objeto para el observador que está apreciando dicha vista; cuando al lector se le dificulta este proceso, se debe recurrir a la aplicación de unas normas de visibilidad, que facilite dicho análisis en forma mecánica y ordenada.

Cabe resaltar que en este procedimiento, se debe tener en cuenta la posición de los vértices y aristas del objeto, así como, la geometría del mismo.

Existen cinco normas básicas para la visibilidad de proyecciones:

1) *La línea de contorno siempre es visible.*
2) *El vértice o arista del objeto más alejado del observador, y dentro del contorno, será oculto.*
3) *El vértice o arista del objeto más cercano al observador será visible, excepto, cuando la arista se cruce con un plano visible para el observador.*

A continuación, se muestra un gráfico alusivo a las normas anteriormente descritas *(figura 3.1).*

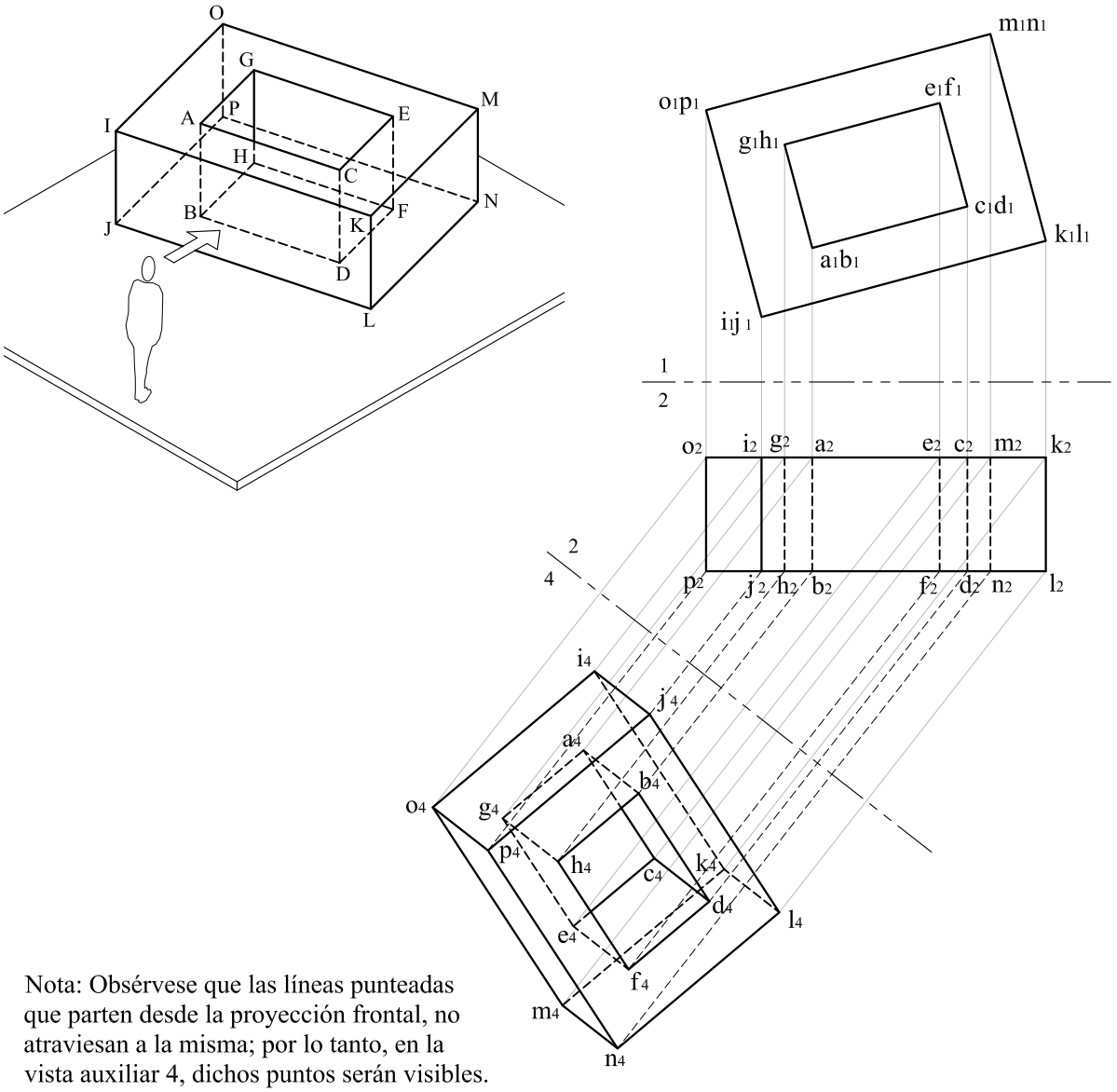


Visibilidad de proyecciones, donde se aplican las 3 primeras normas
Figura 3.1

En el caso de sólidos con agujeros o huecos, se debe precisar la visibilidad del borde del agujero, así como, las aristas que están dentro del campo visual del observador; para ello, se debe considerar la cuarta norma:

4) *Si la línea de relación que parte de un punto de la proyección no atraviesa ninguna parte de esta misma proyección; quiere decir, que el punto será visible en la nueva proyección.*

Es necesario darle prioridad a la aplicación de las dos primeras normas, especialmente definir la línea de contorno; pues de esta manera, se adelanta en gran parte el proceso de visibilidad, y así, emplear la cuarta norma *(figura 3.2).*



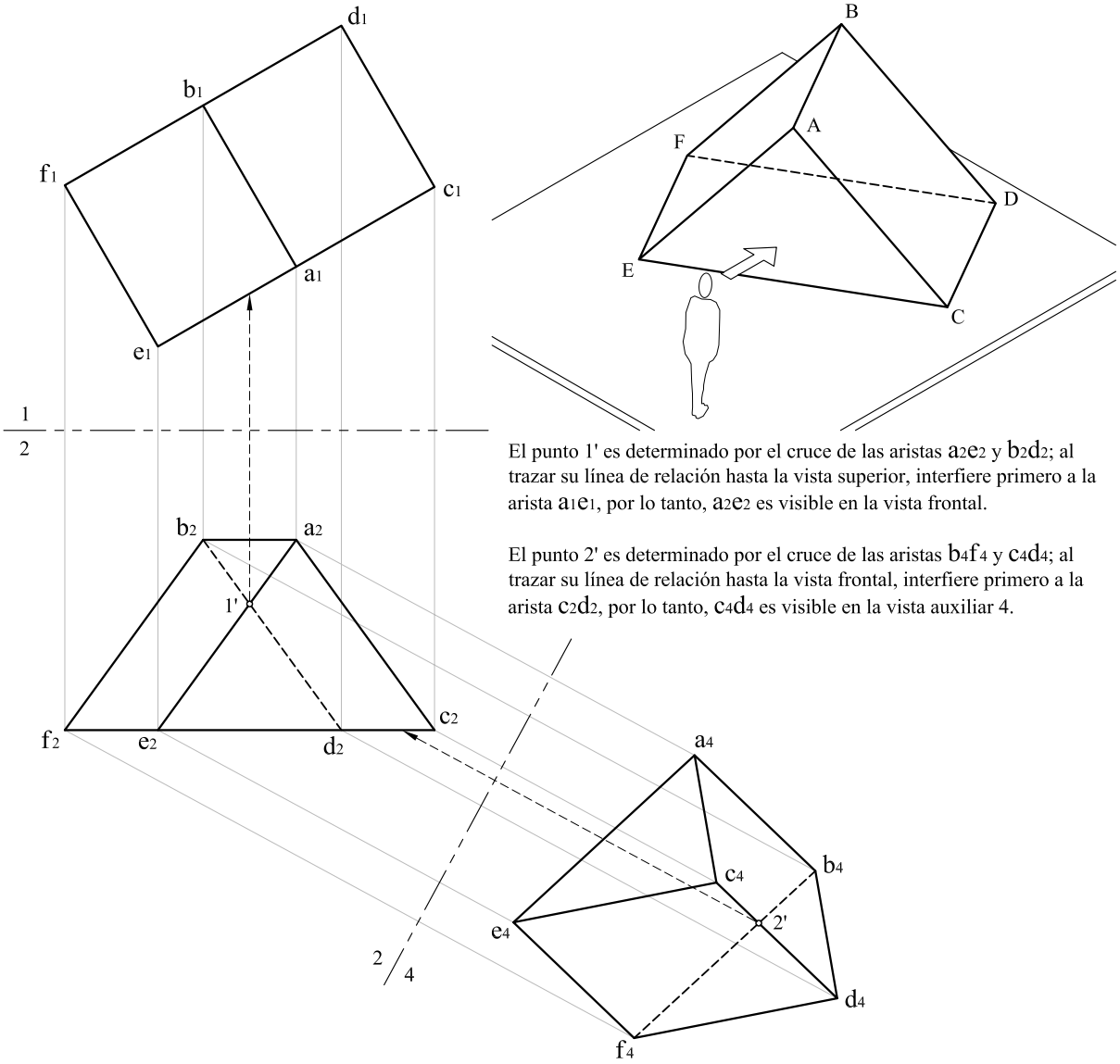
Nota: Obsérvese que las líneas punteadas que parten desde la proyección frontal, no atraviesan a la misma; por lo tanto, en la vista auxiliar 4, dichos puntos serán visibles.

Visibilidad de sólidos con huecos o agujeros, donde se aplica la 4ta norma
Figura 3.2

En algunas ocasiones las aristas del objeto se cruzan; en este caso, se debe aplicar la 5ta norma:

5) *Si dos aristas se cruzan en una vista, definen un punto de intersección ficticio, el cual, mediante su línea de relación, determina en su proyección adyacente, la cercanía o la lejanía de dichas aristas en la vista de referencia.*

La norma anteriormente descrita, es de mucha utilidad en el caso de dos rectas que se cruzan, es decir, que las rectas no se interceptan, ni son paralelas entre sí. Para emplear dicha norma, se debe partir de una vista, donde las rectas determinan el punto ficticio de intersección (vista de referencia); se procede a dibujar su respectiva línea de relación hacia una vista adyacente; la primera arista interferida por dicha línea de relación, será visible en la vista de referencia *(figura 3.3).*

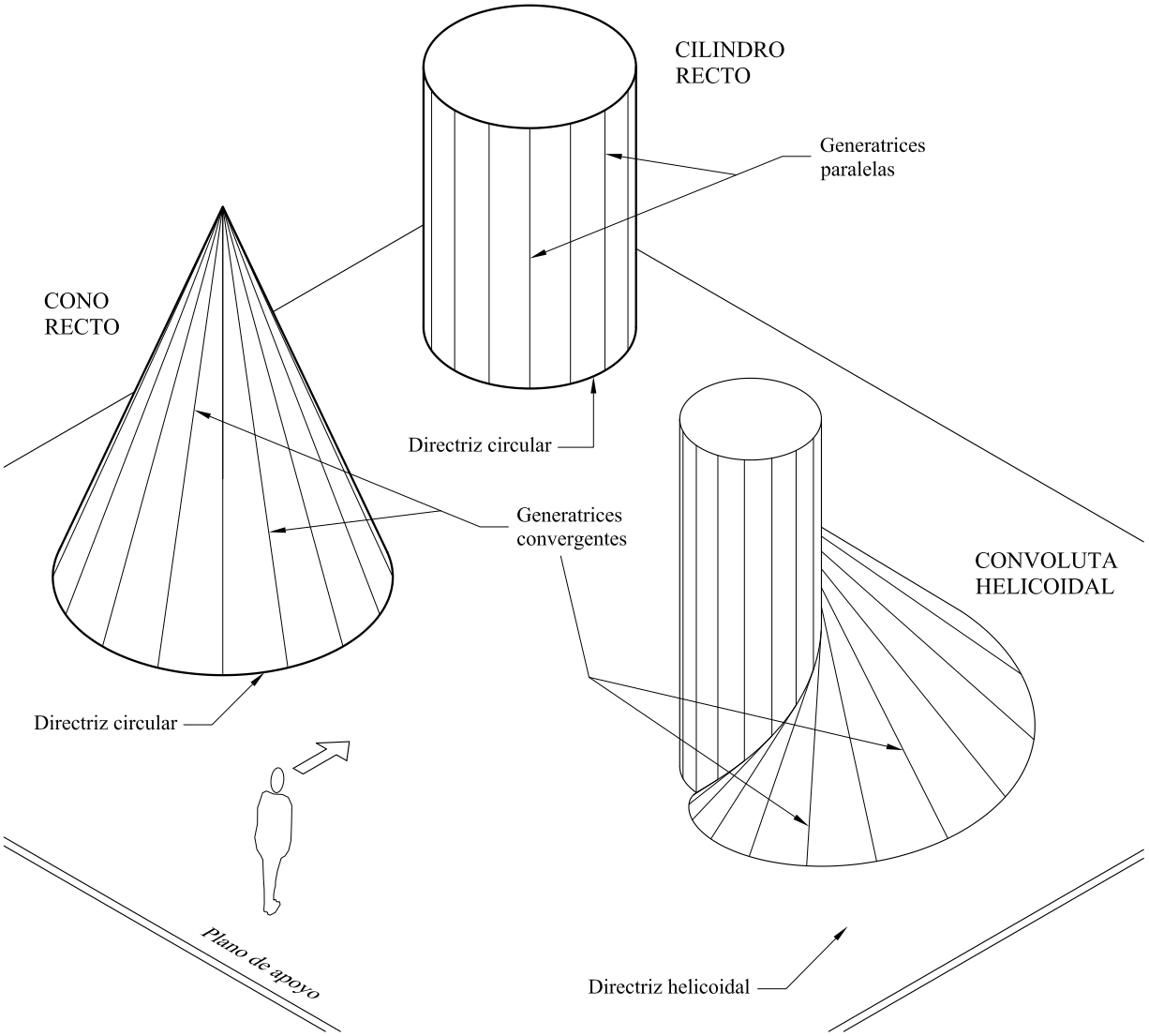


Visibilidad de sólidos con rectas que se cruzan, donde se aplica la 5ta norma
Figura 3.3

3.1 Visualización y representación de superficies de simple curvatura.

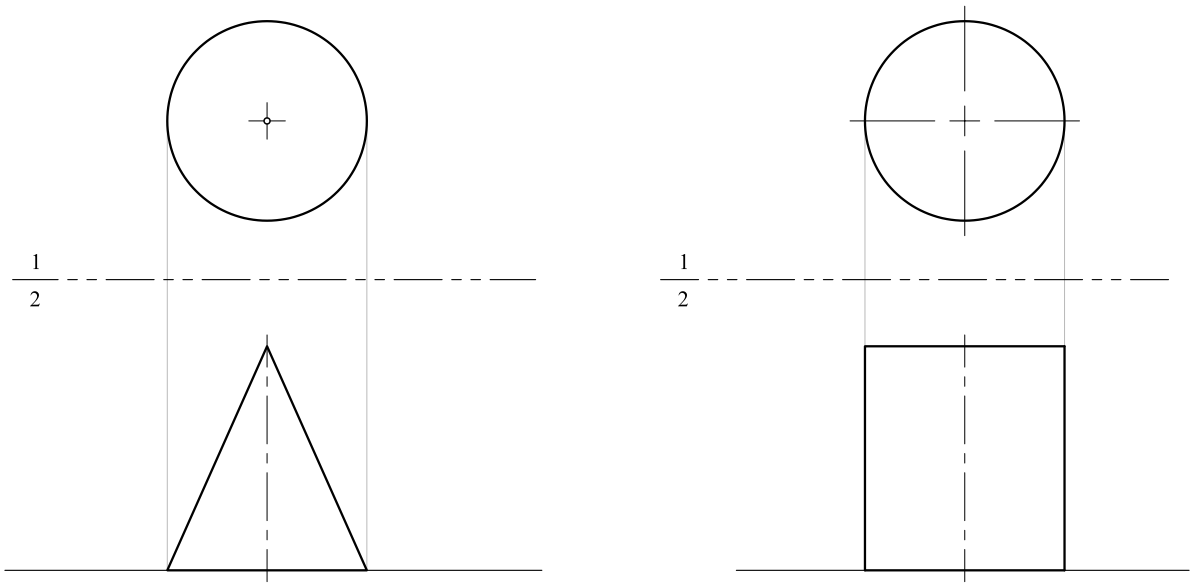
Las superficies de simple curvatura, son aquellas que tienen una recta que se desplaza a lo largo de una línea circular situada en un mismo plano; dicha recta en movimiento se denomina “generatriz”, y la trayectoria curva se denomina “directriz”; aunque existen infinitas generatrices a lo largo de una directriz, dos generatrices consecutivas pueden interceptarse en un solo punto o ser paralelas entre si. Las superficies de simple curvatura son desarrollables, es decir, que se pueden desenvolver o acomodar en un solo plano de representación.

Las rectas directrices más utilizadas son: el círculo, la elipse, la parábola, y la hipérbola; y en menor importancia, se encuentran: el cicloide, el epicicloide, el hipocicloide, el helicoide, y las curvas trigonométricas. Las superficies de simple curvatura más representativas, son los conos, cilindros, y convolutas helicoidales *(figura 3.4).*



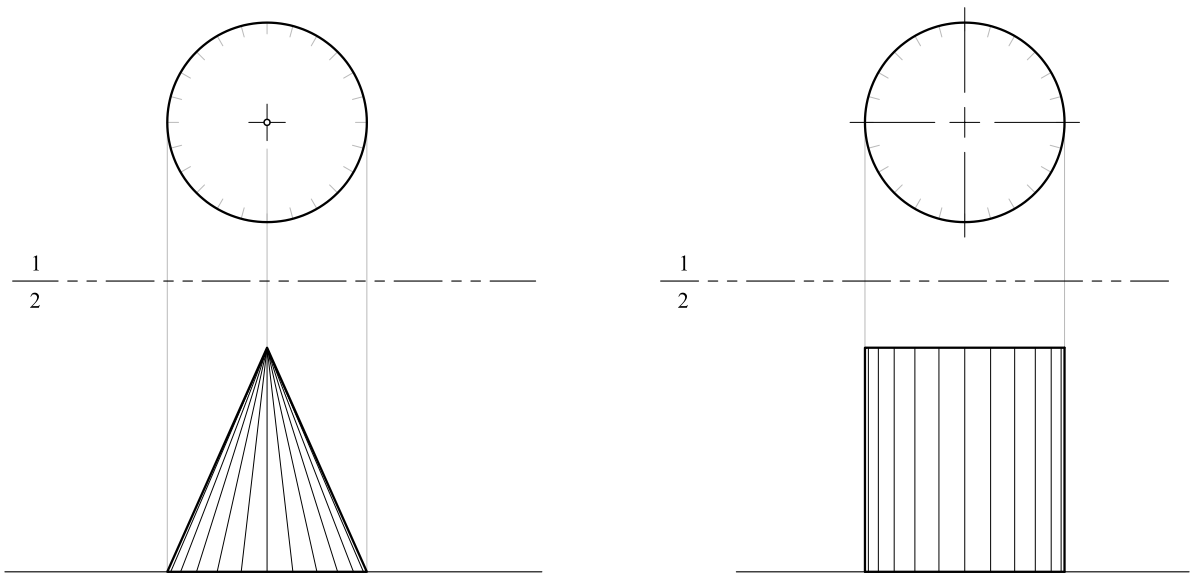
Sólidos definidos por superficies de simple curvatura
Figura 3.4

Al proyectar un cono o un cilindro, generalmente se dibujan los elementos que definen el contorno, es decir, la base y las rectas tangenciales; de esta forma, un cono recto se proyecta como un “triángulo” en la vista frontal, y un cilindro recto se proyecta como un “rectángulo” *(figura 3.5).*



Proyecciones de un cono recto y un cilindro recto
Figura 3.5

Con el fin de resaltar la expresión gráfica en este tipo de geometría, se procede a dibujar las rectas generatrices; para ello, se divide la directriz curva en segmentos de cuerdas iguales, preferiblemente en número par, y planteando mínimo desde 12 hasta 36 divisiones *(figura 3.6).*

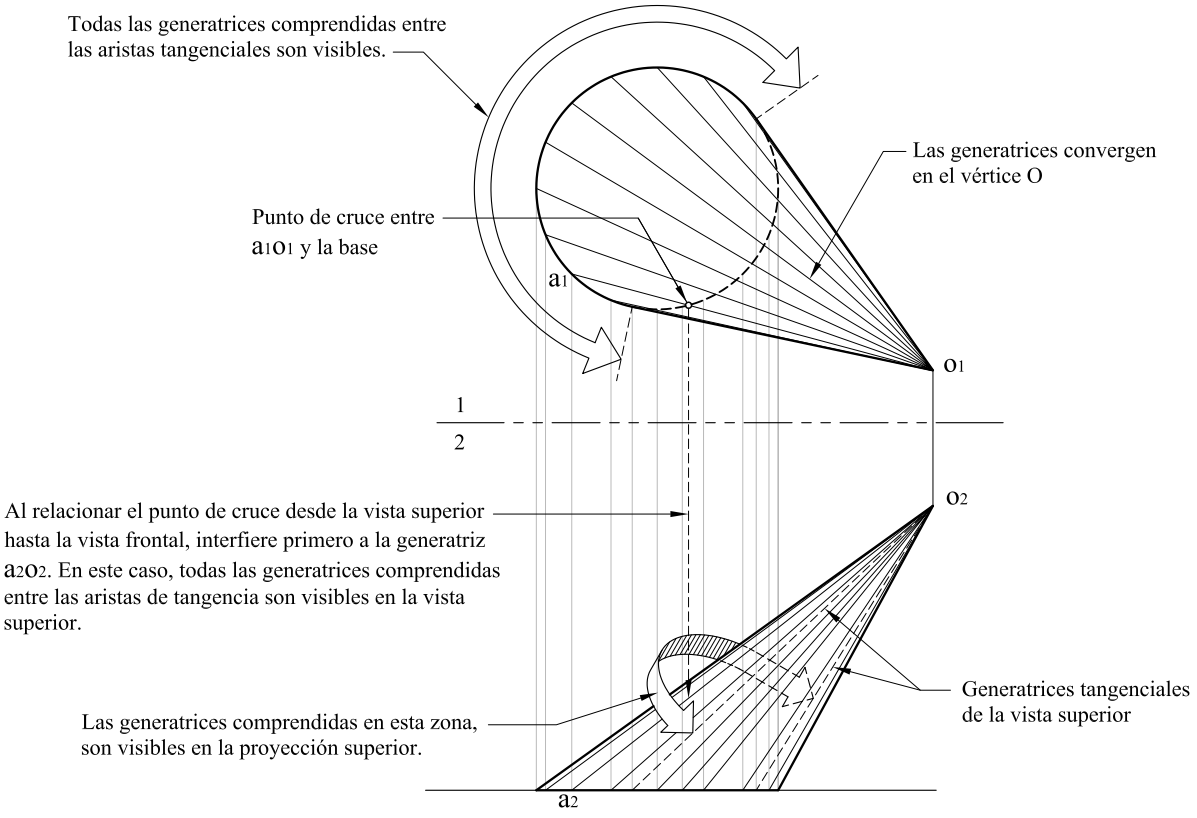


Representación de generatrices de un cono recto y un cilindro recto
Figura 3.6

Las generatrices representadas en dichas superficies brindan una impresión de curveado y sombreado, siendo muy utilizadas en los siguientes casos:

- En alzadas y secciones con acabados finales.
- En el análisis de intersecciones con otras superficies y/o planos.
- Para plantear y construir los desarrollos de las mismas.

Al establecer los criterios de visibilidad de dichas superficies, se debe tener en cuenta la aplicación de la 1ra y 5ta norma; de aquí surgen dos posibilidades, las generatrices dentro del contorno y comprendidas entre las aristas de tangencia, son todas visibles u ocultas; en cualquiera de los dos casos, basta analizar una sola generatriz que se cruce con el borde de la base; por último, se consideran aspectos de tangencia que existe tanto en los elementos de contorno, como de los rayos visuales del observador; a continuación, se muestran los criterios de visibilidad de un cono oblicuo *(figura 3.7)*.



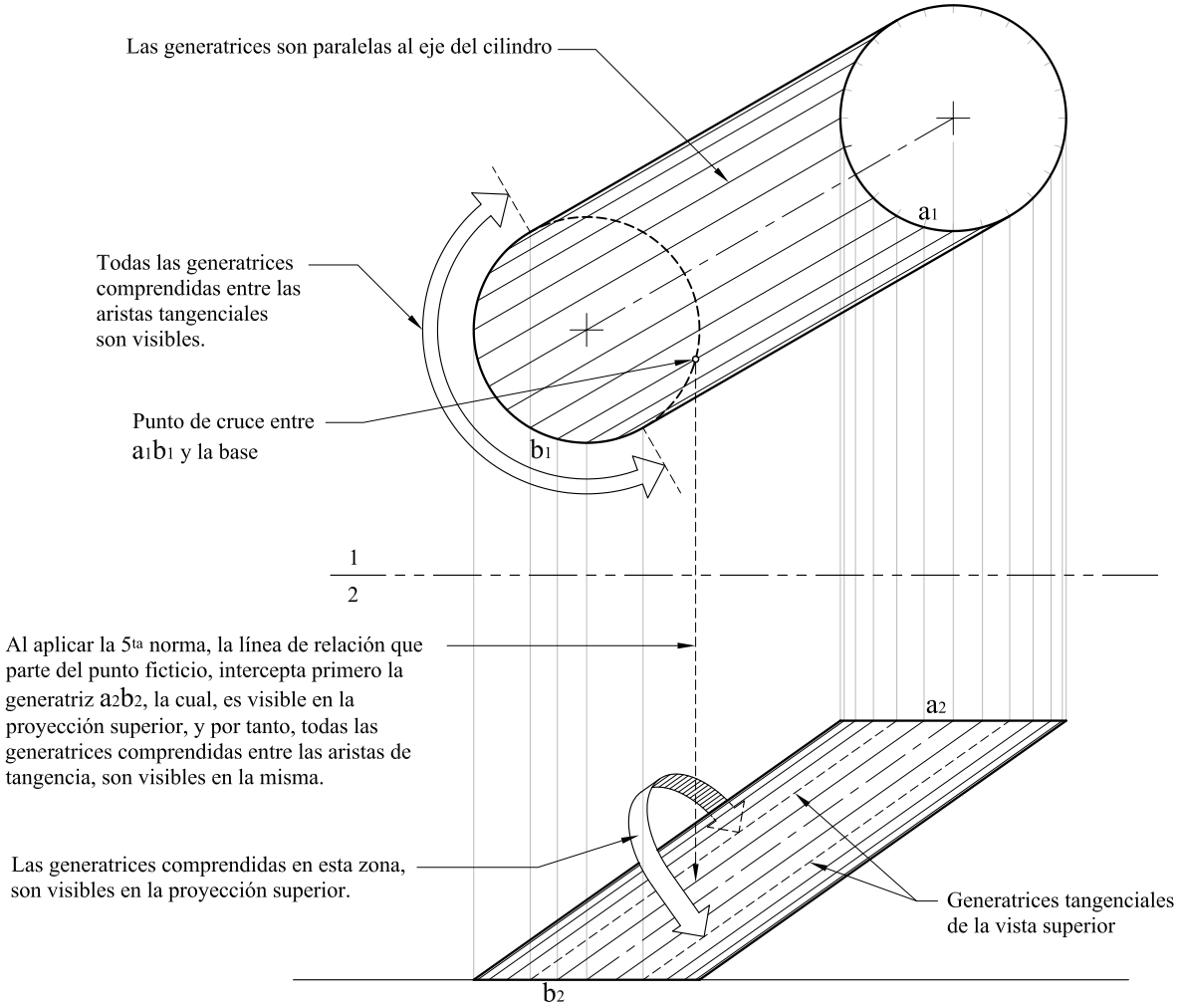
Nota: Por conveniencia, se dibujan sólo las generatrices visibles, para brindar mayor claridad en el dibujo.

Criterios de visibilidad en un cono oblicuo
Figura 3.7

Cuando los conos o cilindros son oblicuos, se requiere realizar un análisis minucioso de visibilidad de las generatrices y directrices; lo más importante es dibujar con precisión las rectas tangenciales, así como, las subdivisiones de la directriz.

En el caso de los cilindros, todas las generatrices son paralelas a su propio eje; de igual manera, se aplican las mismas consideraciones anteriormente descritas; se define el contorno con las aristas de tangencia, el cual, es visible; luego, se analiza el cruce de una generatriz respecto a una recta de borde, para determinar su visibilidad.

Como el cilindro tiene dos bases circulares, una lectura de una vista de alzada, es suficiente para justificar que la base más elevada, es visible en la vista superior *(figura 3.8).*



Nota: Por conveniencia, se dibujan sólo las generatrices visibles, para brindar mayor claridad en el dibujo.

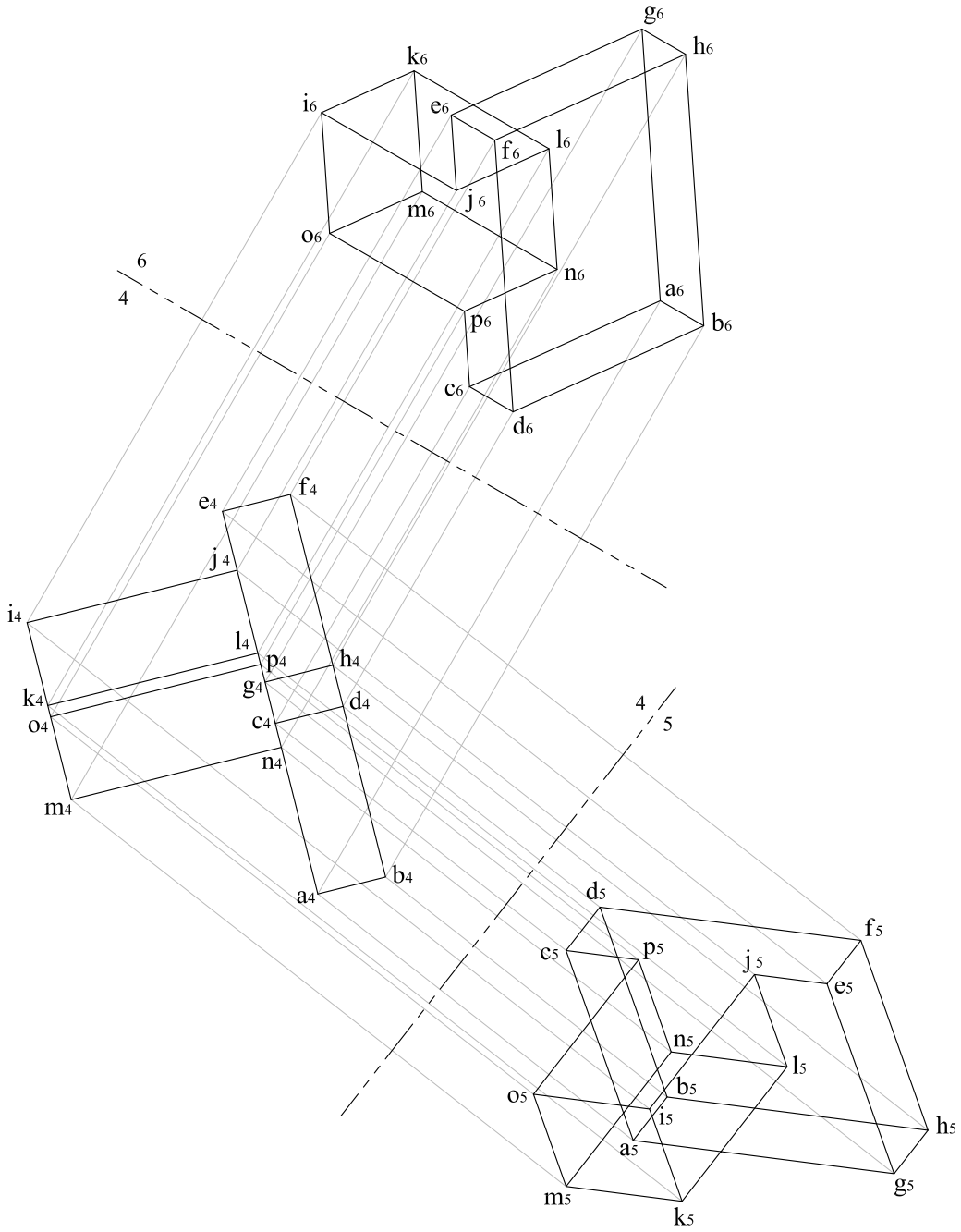
Criterios de visibilidad en un cilindro oblicuo
Figura 3.8

Las consideraciones de visibilidad vistas anteriormente, son de gran utilidad cuando se analiza la intersección con otros elementos geométricos, así como, en la localización de puntos y rectas sobre los sólidos.

3.2 Ejemplos.

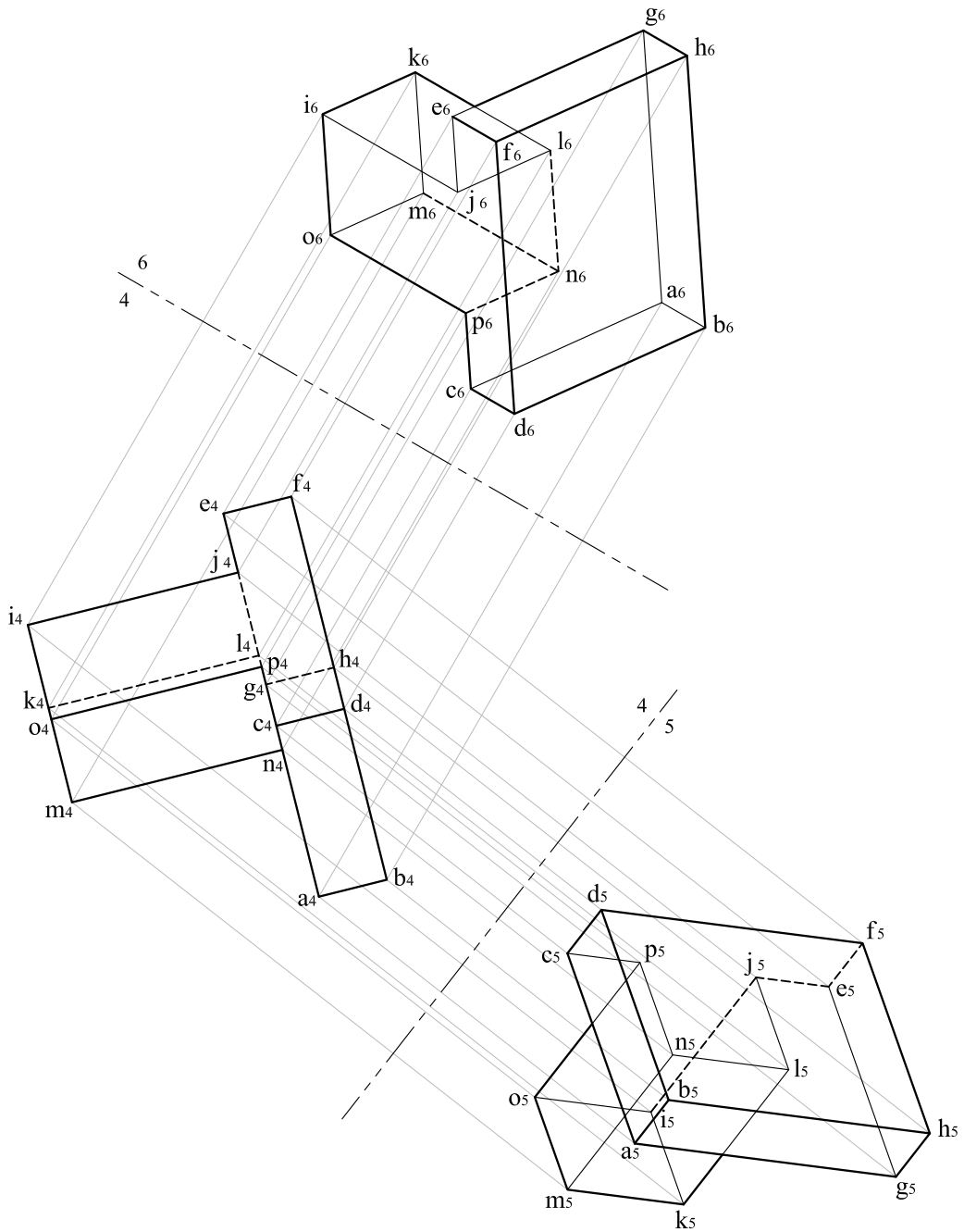
3.2.1 Ejemplo 1.

A partir de las proyecciones mostradas, calque y establezca los criterios de visibilidad; destaque líneas visibles y ocultas en cada proyección. Trabajar en sistema ASA, a escala: 1:1 *(figura 3.9).*



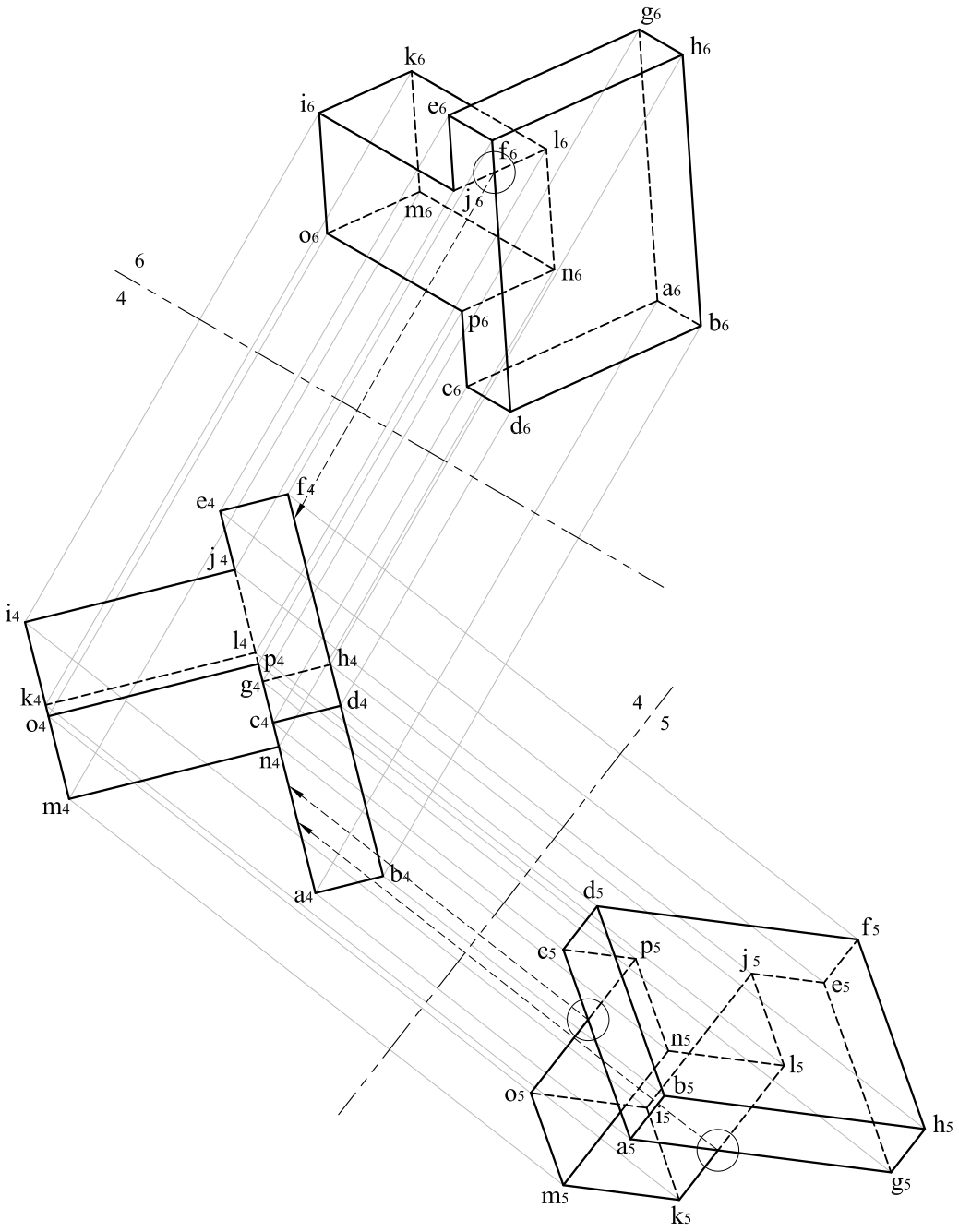
Proyecciones para visualizar – Ejemplo 1, sistema ASA
Figura 3.9

En primer lugar se define el contorno en cada vista, el cual es siempre visible; de esta manera, se procede a destacar dicho contorno con un trazo continuo, oscuro y grueso. Luego, se identifican las aristas más cercanas y alejadas del objeto para el observador en cada vista. Por ejemplo, el observador que se ubica en la vista 5 mirando hacia la vista 4, apreciará las aristas a_4b_4, b_4d_4, y b_4h_4 como las más cercanas a el, y las aristas e_4f_4, i_4j_4, y e_4j_4, serán las más alejadas; por eso, dichas aristas serán visibles y ocultas respectivamente en la vista 5. Este procedimiento se aplica en las demás vistas *(figura 3.10)*.



Desarrollo del ejemplo 1, donde se aplican las 3 primeras normas de visibilidad (ASA)
Figura 3.10

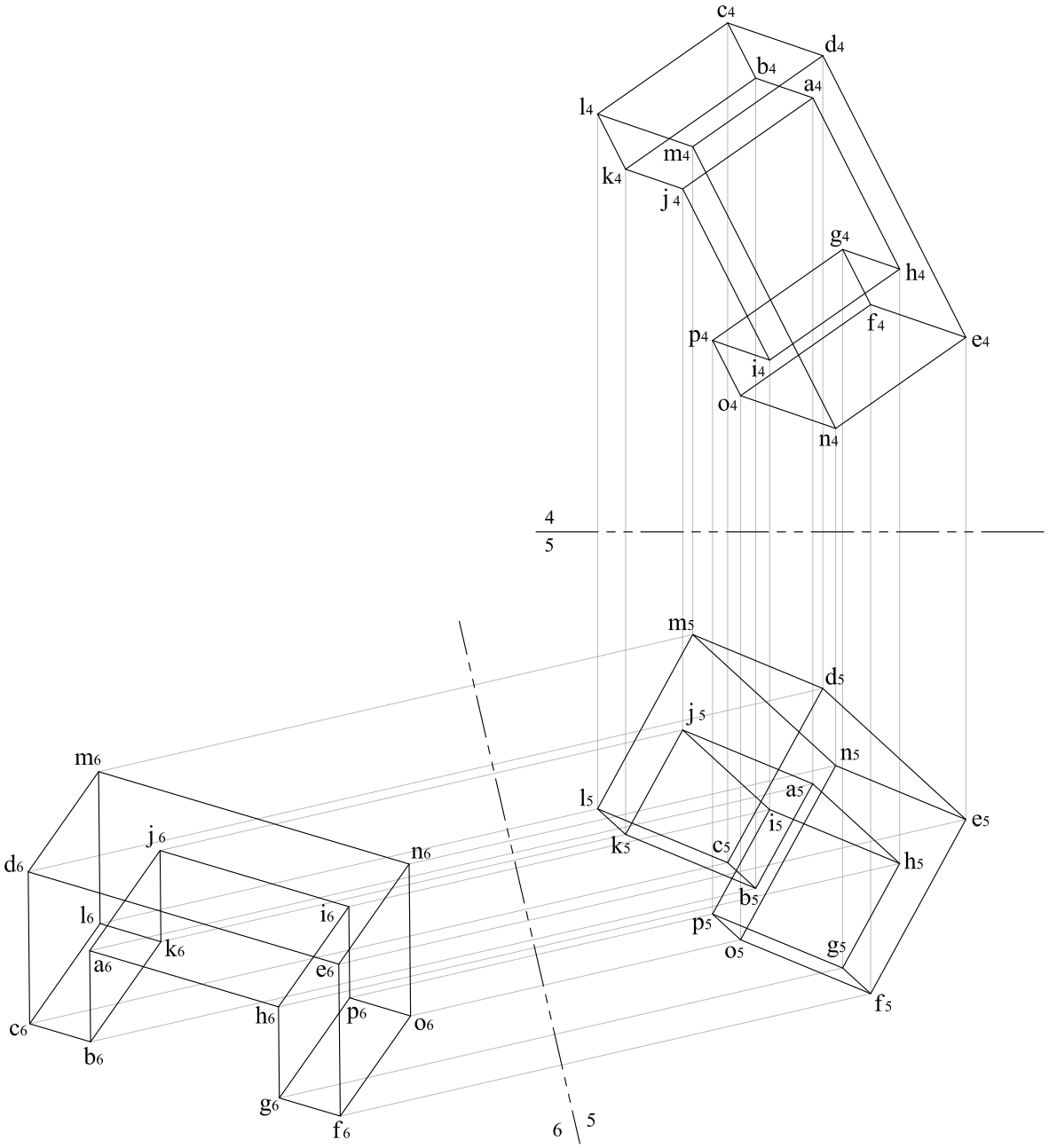
Al haber predefinido el contorno, las aristas más cercanas, y alejadas en cada proyección, el problema se simplifica para completar dicha visibilidad. Si el lector tiene una idea cercana a la forma del objeto, puede completar fácilmente dicho proceso; y en el caso de presentarse cruce de aristas, se debe recurrir a la aplicación de la 5ta norma, como ocurre en los cruces de las aristas d_6f_6 y j_6l_6 en la vista 6, y el cruce de c_5p_5 con o_5p_5, y k_5l_5 con a5g5 en la vista 5 *(figura 3.11*).



Desarrollo del ejemplo 1, definición de visibilidad y aplicación de la 5ta norma (ASA)
Figura 3.11

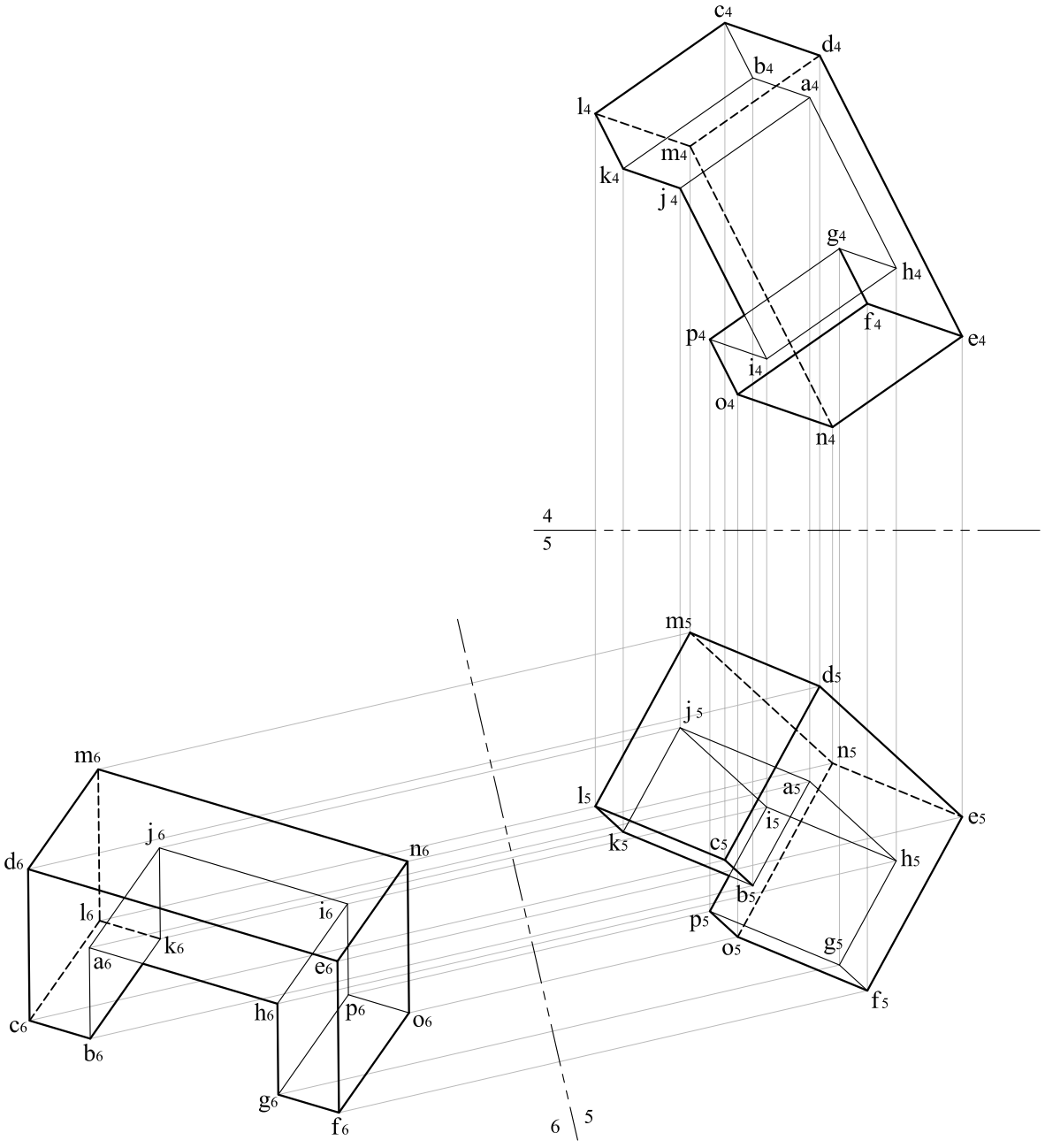
3.2.2 Ejemplo 2.

A partir de las proyecciones mostradas, calque y establezca los criterios de visibilidad; destaque líneas visibles y ocultas en cada proyección. Trabajar en sistema DIN, a escala: 1:1 *(figura 3.12).*



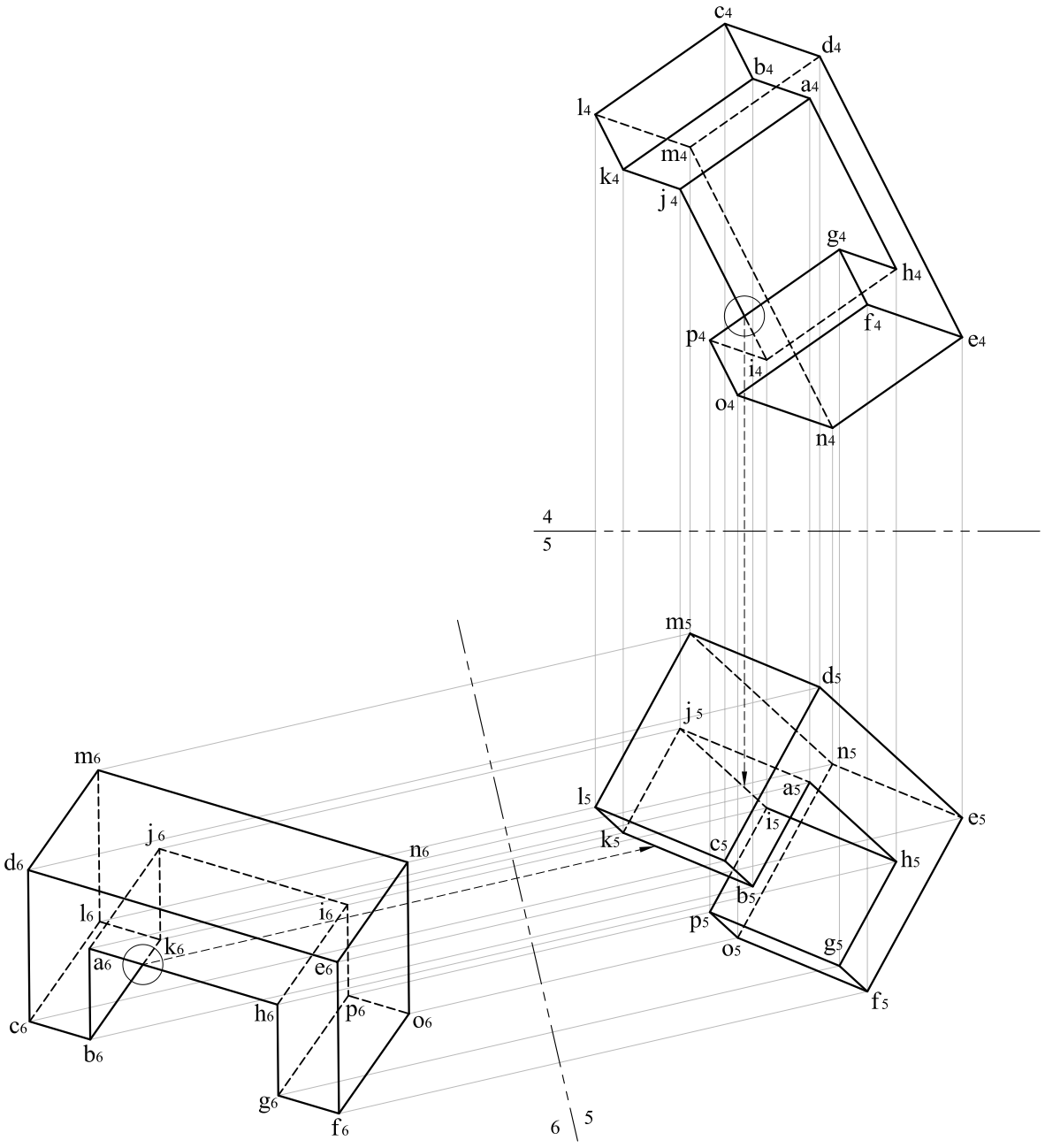
Proyecciones para visualizar – Ejemplo 2, sistema DIN
Figura 3.12

Al igual que el anterior, se define el contorno en cada proyección; luego, se identifican las aristas más cercanas y alejadas del objeto para el observador en cada vista; en este caso, el observador que necesita visualizar en la vista 5, deberá ubicarse desde la vista 6 o 4 mirando hacia la vista 5; por ejemplo, desde la vista 6 en dirección hacia la vista 5, apreciará las aristas c_6d_6, b_6c_6, y c_6l_6 como las más cercanas a el, y las aristas e_6n_6, y o_6n_6 serán las más alejadas; por eso, dichos elementos serán visibles y ocultos respectivamente en la vista 5. Este proceso, se realiza en las demás vistas *(figura 3.13)*



Desarrollo del ejemplo 2, donde se aplican las 3 primeras normas de visibilidad (DIN)
Figura 3.13

Este proceso de visibilidad se completa utilizando la 5ta norma; en el sistema DIN, dicho proceso es a la inversa, es decir, que la relación del punto de cruce hacia la primera arista que se interfiera, dicha arista, será oculta. El lector podrá analizar el cruce de las aristas a_6h_6, y b_6k_6 en la vista 6, y el cruce de i_4j_4, y g_4p_4 en la vista 4 *(figura 3.14)*.

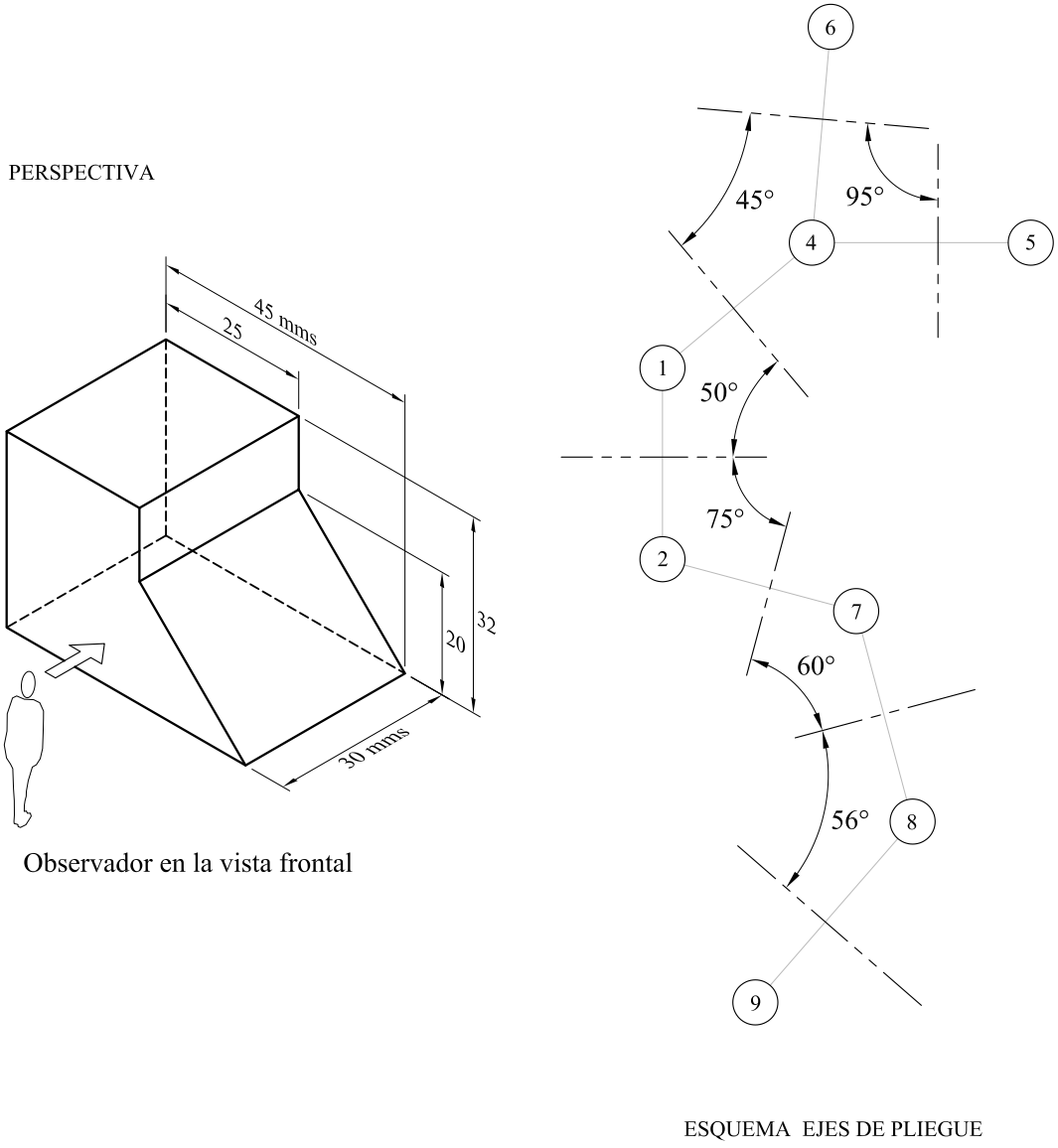


Desarrollo del ejemplo 2, definición de visibilidad y aplicación de la 5ta norma (DIN)
Figura 3.14

3.3 Ejercicios.

3.3.1 Ejercicio 1.

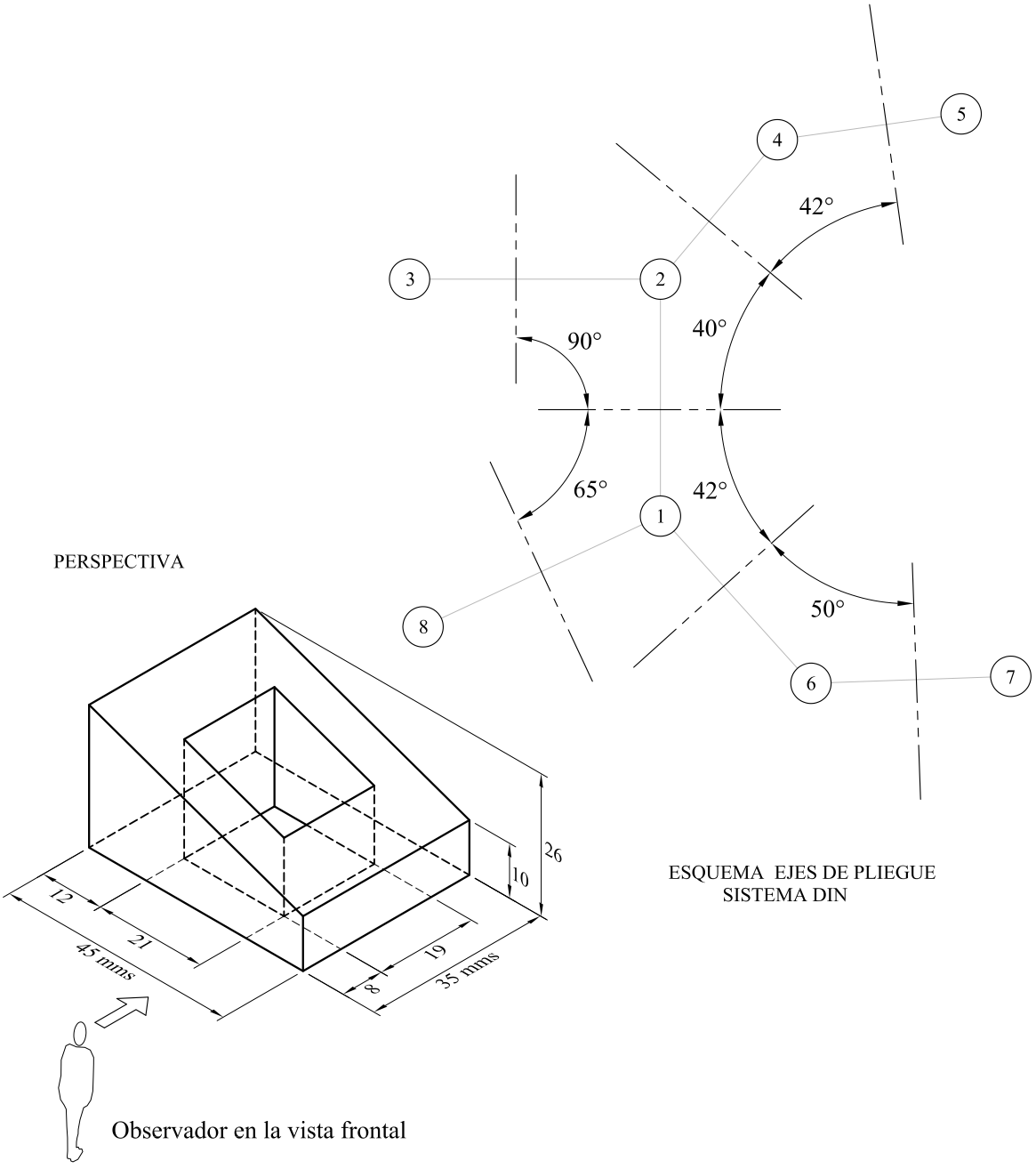
A partir del objeto en perspectiva, y cuyas dimensiones están expresadas en mms, designe los vértices mediante letras; construya y visualice las vistas solicitadas, según el esquema de localización de los ejes de pliegue proporcionado; trabajar en sistema ASA, a escala: 1:1 en 1/4 de pliego, dibuje la línea de tierra donde corresponda *(figura 3.15).*



Perspectiva del objeto para resolver, con su respectivo esquema de localización de ejes de pliegue
Figura 3.15

3.3.2 Ejercicio 2.

A partir del objeto en perspectiva, y cuyas dimensiones están expresadas en mms, designe los vértices mediante letras; construya y visualice las vistas solicitadas, según el esquema de localización de los ejes de pliegue proporcionado; trabajar en sistema DIN, a escala: 1,2:1 en 1/4 de pliego, dibuje la línea de tierra donde corresponda *(figura 3.16)*.



Perspectiva del objeto para resolver, con su respectivo esquema de localización de ejes de pliegue
Figura 3.16

4.0 El punto en el espacio

4.0 Definición del punto

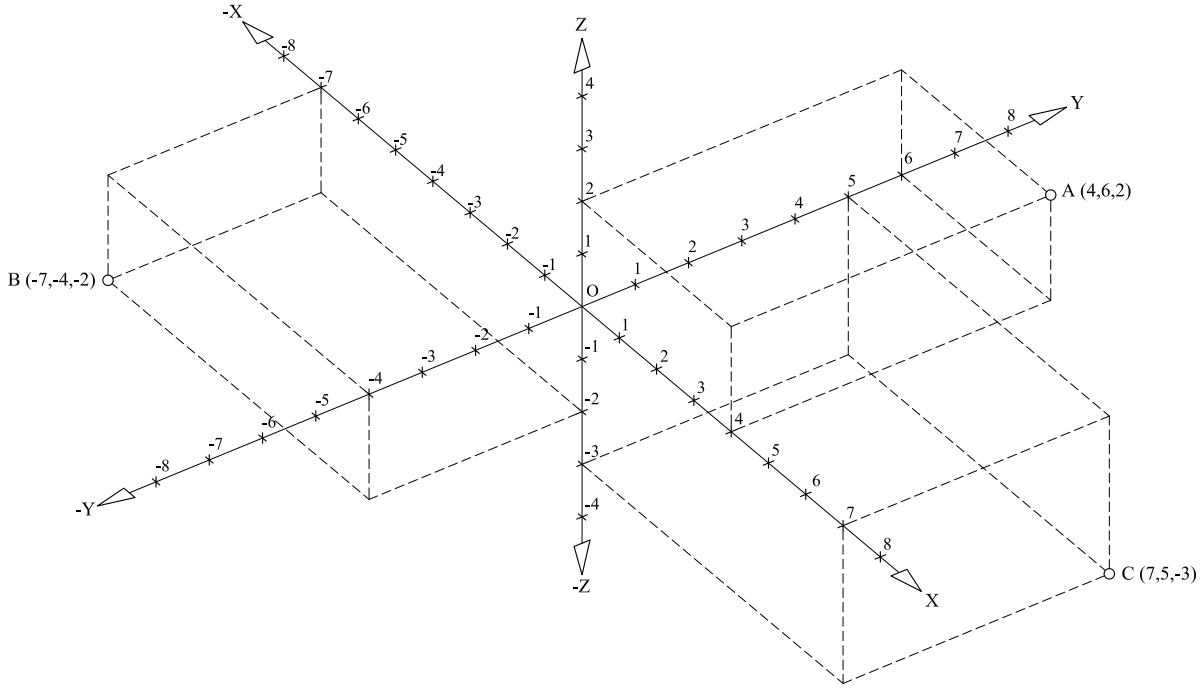
El punto es la entidad geométrica más sencilla que se puede identificar; no posee forma, dimensión, ni tamaño; pero, si se puede referenciar y localizar en el espacio mediante la utilización de un sistema de representación cartesiana (representación numérica), o un sistema de proyección diédrico.

En cualquiera de las dos maneras que se utilice, es necesario determinar un primer punto, el cual, será identificado como “punto de origen”; éste servirá de referencia para localizar otros puntos. Estos se emplean para representar intersecciones de ejes estructurales, puntos de instalaciones hidráulicas y sanitarias, vértices, deltas, y puntos de referencia en general, utilizados en planimetrías y altimetrías.

4.1 El punto en el sistema cartesiano

El sistema cartesiano o sistema de coordenadas rectangulares, es muy empleado en Matemáticas, sobre todo en la rama de geometría analítica de los cuerpos; este se caracteriza por tener un origen “O”, el cual, es determinado por la intersección de tres ejes perpendiculares entre sí (ejes X, Y, y Z).

Todo punto en este sistema se denomina “coordenada”, la cual, se designa por cantidades numéricas correspondientes a los desplazamientos rectangulares medidos en los tres ejes respecto al origen; de esta manera, un punto P (X, Y, Z) diferente al origen O (0, 0, 0), se puede localizar, trazando paralelas a estos ejes; siendo cada eje subdividido en unidades iguales; la dirección de dichos ejes respecto al origen puede ser positiva o negativa, según el caso *(figura 4.1)*.



Representación de puntos en el sistema cartesiano
Figura 4.1

Las coordenadas se pueden referenciar de dos maneras:

a) *Coordenadas universales*: Son aquellas que se localizan respecto al origen.
b) *Coordenadas relativas:* Son aquellas que se localizan respecto a otro punto distinto al origen.

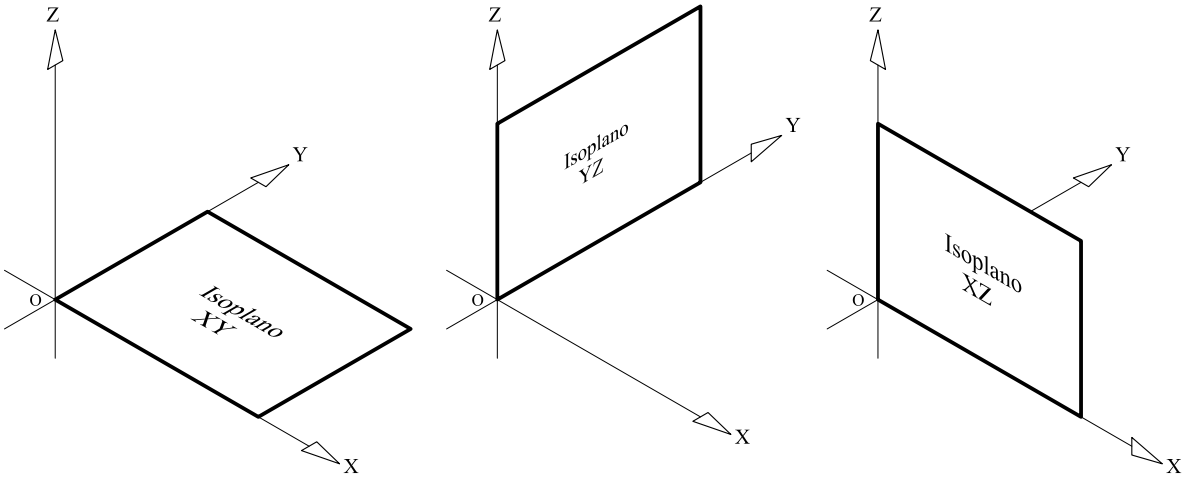
En el primer caso, las coordenadas se localizan de acuerdo a las cantidades numéricas establecidas en los ejes X, Y, y Z, tomando como referencia el origen; al trazar las paralelas a dichos ejes, se obtiene la localización de las mismas.

Las coordenadas relativas permiten determinar desplazamientos diferenciales cuando se mide desde un punto a otro (delta), sobre cada paralela de los ejes cartesianos; de acuerdo a la figura 4.1, se definen los desplazamientos diferenciales y direcciones que existen entre los puntos A, B, y C *(figura 4.2).*

Referencia de puntos	**Desplazamientos diferenciales (Δ) y direcciones**					
	Δ X	**Dirección**	**Δ Y**	**Dirección**	**Δ Z**	**Dirección**
Desde A hasta B	11	Negativo	10	Negativo	4	Negativo
Desde B hasta A	11	Positivo	10	Positivo	4	Positivo
Desde A hasta C	3	Positivo	1	Negativo	5	Negativo
Desde C hasta A	3	Negativo	1	Positivo	5	Positivo
Desde B hasta C	14	Positivo	9	Positivo	1	Negativo
Desde C hasta B	14	Negativo	9	Negativo	1	Positivo

Desplazamientos y direcciones de los puntos A, B, y C
Figura 4.2

Otro aspecto importante para considerar en el sistema cartesiano, consiste en determinar unos planos virtuales denominados “isoplanos”, los cuales son definidos por cada par de ejes; de esta manera, se establecen los isoplanos XY, YZ, y XZ *(figura 4.3).*



Definición de isoplanos en un sistema cartesiano
Figura 4.3

Los isoplanos descritos anteriormente, se comportan de forma análoga con los planos de proyección de un sistema diédrico, donde el isoplano XY representa el plano superior, el isoplano YZ representa el plano lateral derecho, y el isoplano XZ representa el plano frontal.

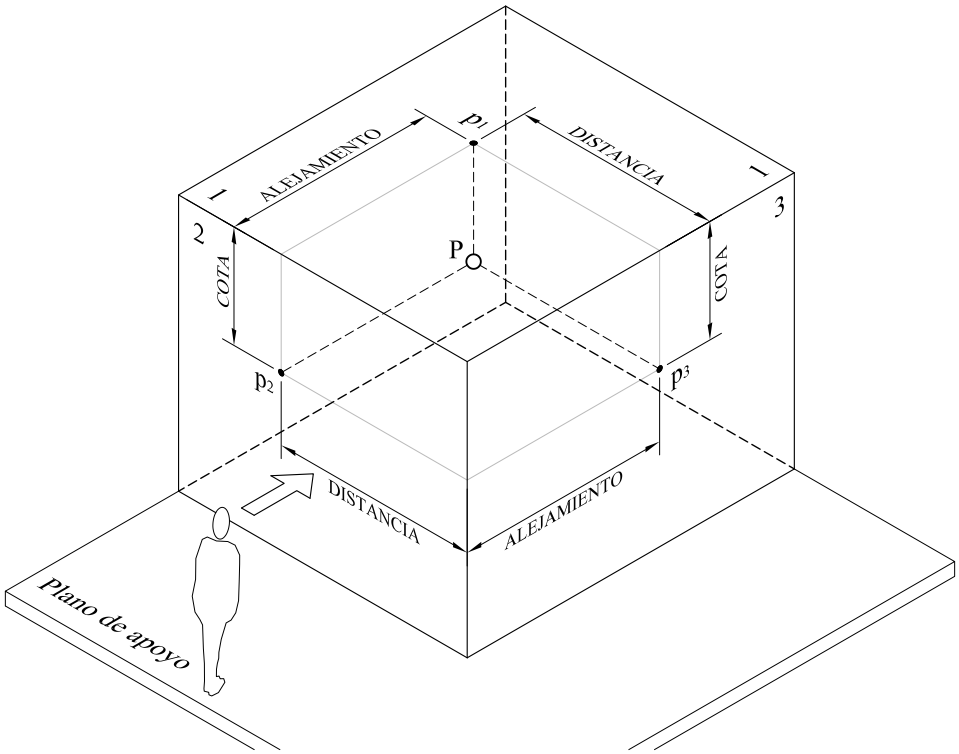
4.2 El punto en el sistema diédrico

Para localizar cualquier punto en el sistema diédrico, es necesario conocer la perpendicular o distancia mínima que existe desde el punto hasta cada uno de los planos de proyección principales; y cuando se requiere localizar más de un punto en dicho sistema, es necesario considerar el manejo de los desplazamientos diferenciales y las direcciones que existen entre ellos. El punto en este sistema, se determina conociendo la distancia, la cota, y el alejamiento.

DISTANCIA: Es la medida perpendicular desde el punto hasta el plano lateral derecho.
COTA: Es la medida perpendicular desde el punto hasta el plano superior.
ALEJAMIENTO: Es la medida perpendicular desde el punto hasta el plano frontal.

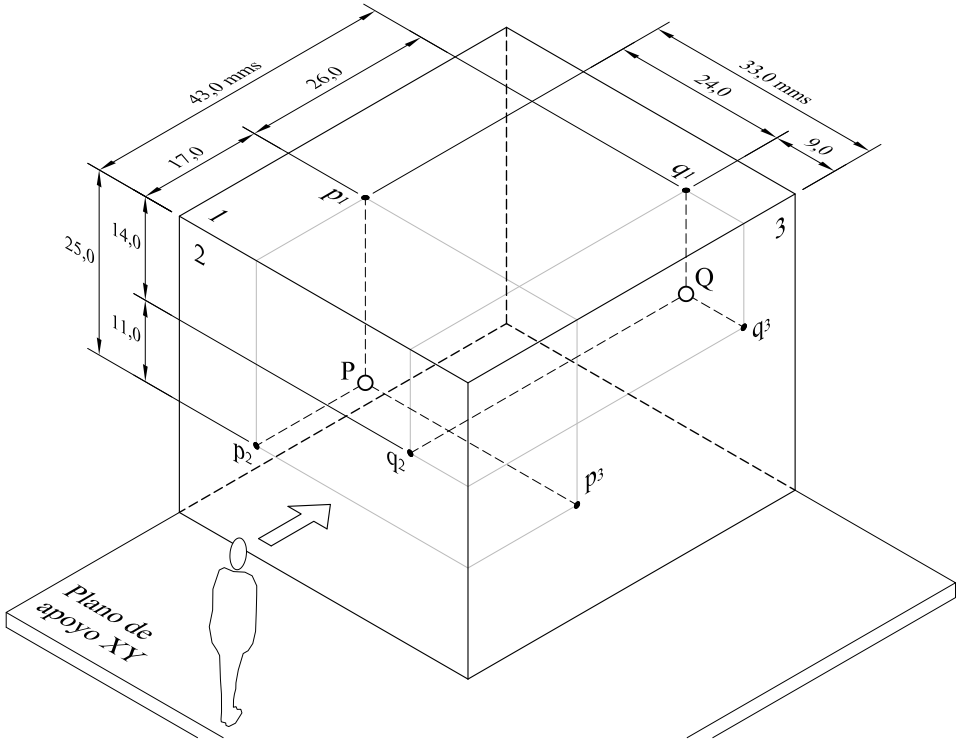
Teniendo estos tres valores establecidos se procede a determinar el punto, trazando las perpendiculares desde el punto a los respectivos planos de proyección principales *(figura 4.4)*.

El observador puede apreciar en la vista superior la distancia y el alejamiento del punto, pero no la cota, debido a que ésta se encuentra perpendicular al plano superior de proyección; de igual manera, en la vista frontal se aprecia la distancia y la cota, pero no el alejamiento de dicho punto; y en la vista lateral derecha se visualiza el alejamiento y la cota del punto, pero no su distancia.



Determinación y localización de un punto en el sistema diédrico
Figura 4.4

Cuando se requiere determinar varios puntos, es preciso considerar los desplazamientos diferenciales que existen entre ellos, así como, sus respectivas direcciones; a manera de ejemplo, se consideran dos puntos, P y Q, de tal forma que el punto P tiene una distancia: 33, cota: 25, y alejamiento: 17 mms, y el punto Q tiene una distancia: 9, cota: 14, y alejamiento: 43 mms; se procede a trazar las perpendiculares desde cada uno de los puntos hasta los planos de proyección correspondientes *(figura 4.5).*

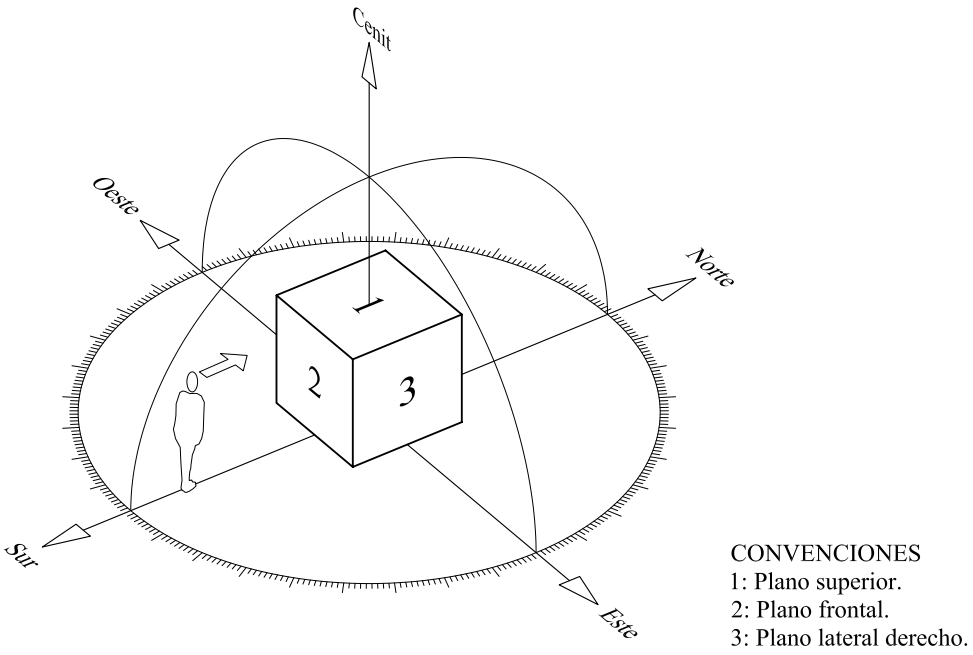


Determinación y localización de los puntos P y Q en el sistema diédrico
Figura 4.5

De esta manera, entre los puntos P y Q se obtienen los siguientes desplazamientos diferenciales, ΔDistancia: 24, Δcota:11 y un Δalejamiento:26; y para la dirección habrían inconvenientes, porque los puntos están referenciados desde los planos de proyección y no desde un origen universal; por esta razón, para evitar confusiones en el manejo de los signos, es necesario tener en cuenta un sistema de orientación espacial compatible con el sistema cartesiano, que facilite la tarea de referenciar puntos situados en el espacio para el observador que los visualiza.

El sistema cardinal conserva una relación directamente proporcional con el sistema cartesiano, donde la línea Norte-Sur coincide con el eje Y, la línea Oriente-Occidente coincide con el eje X, y la línea Cenit-Nadir coincide con el eje Z del sistema cartesiano, siendo este último eje de referencia muy empleado en Astronomía.

En este caso, el observador que visualiza en dirección al plano frontal de proyección (2), estará visualizando en dirección Norte o eje Y positivo; cuando visualiza hacia el plano lateral derecho de proyección (3), estará visualizando hacia el Occidente o eje X negativo; y cuando se ubica en el Cenit visualizará hacia el plano de apoyo o plano superior de proyección, la brújula de orientación cardinal en verdadera magnitud, o sea, los ejes Norte-Sur y Oriente-Occidente equivalente al isoplano XY del sistema cartesiano *(figura 4.6).*



Relación de un sistema cardinal con los sistemas cartesiano y diédrico
Figura 4.6

De acuerdo a los criterios anteriormente descritos, los enunciados que se utilizarían para determinar y localizar los puntos P y Q, podrían ser:

Enunciado A: El punto Q se encuentra 26 mms al Norte de P, 24 mms al Oriente de P, y 11 mms por encima de P.

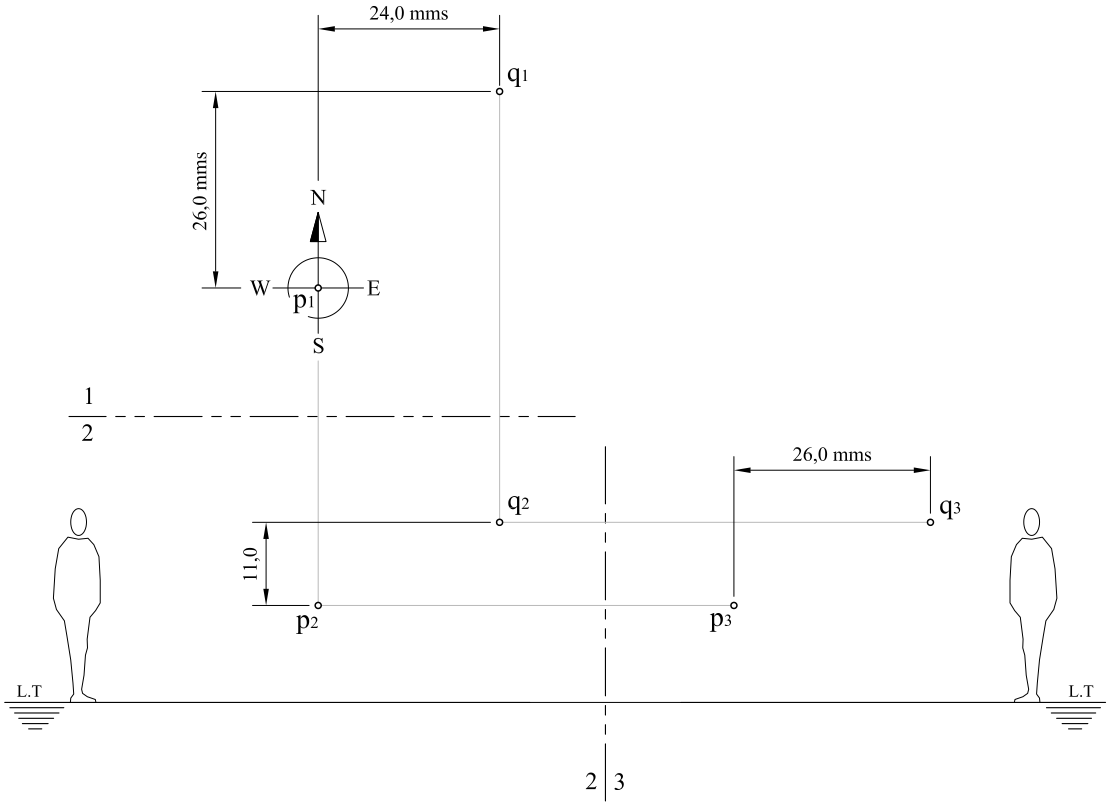
Enunciado B: El punto P se encuentra 26 mms al Sur de Q, 24 mms al Occidente de Q, y 11 mms por debajo de Q.

También son utilizados los términos hacia la derecha o izquierda para indicar las direcciones Oriente y Occidente respectivamente; y los términos hacia adelante o hacia atrás indicarán las direcciones Norte y Sur respectivamente.

Lo más importante es manipular los desplazamientos y direcciones entre puntos independientemente de los planos de proyección; sencillamente la caja de proyección que se construya deberá contener todos los puntos o elementos geométricos en general, que participan en un determinado enunciado.

Se recomienda dibujar una brújula con las iniciales de los puntos cardinales en la vista superior[2], de tal forma que la línea N-S sea perpendicular al eje de pliegue 1-2, y que coincida con uno de los puntos dados; y la línea de tierra se dibuja en las vistas de alzada para poder referenciar lo que se encuentra arriba y abajo. Finalmente, se procede a dimensionar los desplazamientos diferenciales entre los puntos P y Q *(figura 4.7).*

[2] Nota del autor: Se opta por utilizar las iniciales de los puntos cardinales en inglés (N, S, E y W), para evitar confusiones; en español, las iniciales que corresponden a Oriente y Occidente, sería la letra “O”.



Representación de los puntos P y Q en el sistema diédrico
Figura 4.7

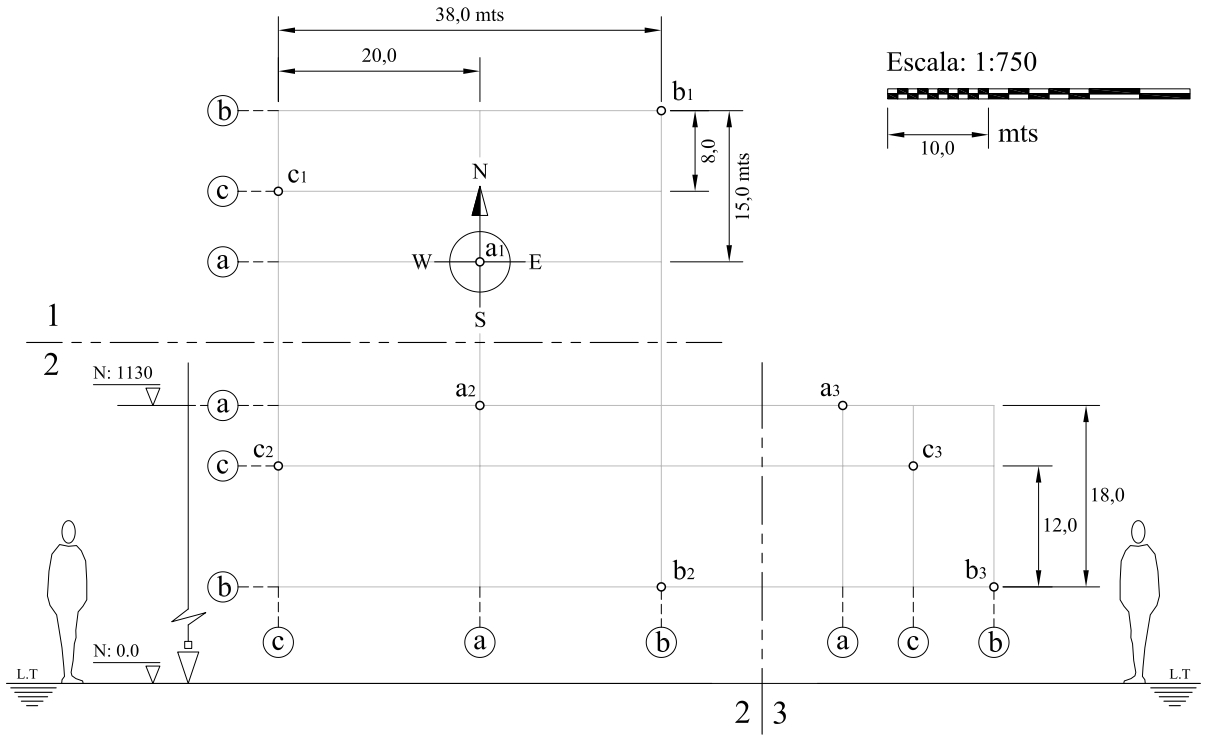
4.3 Ejemplos.

4.3.1 Ejemplo 1.

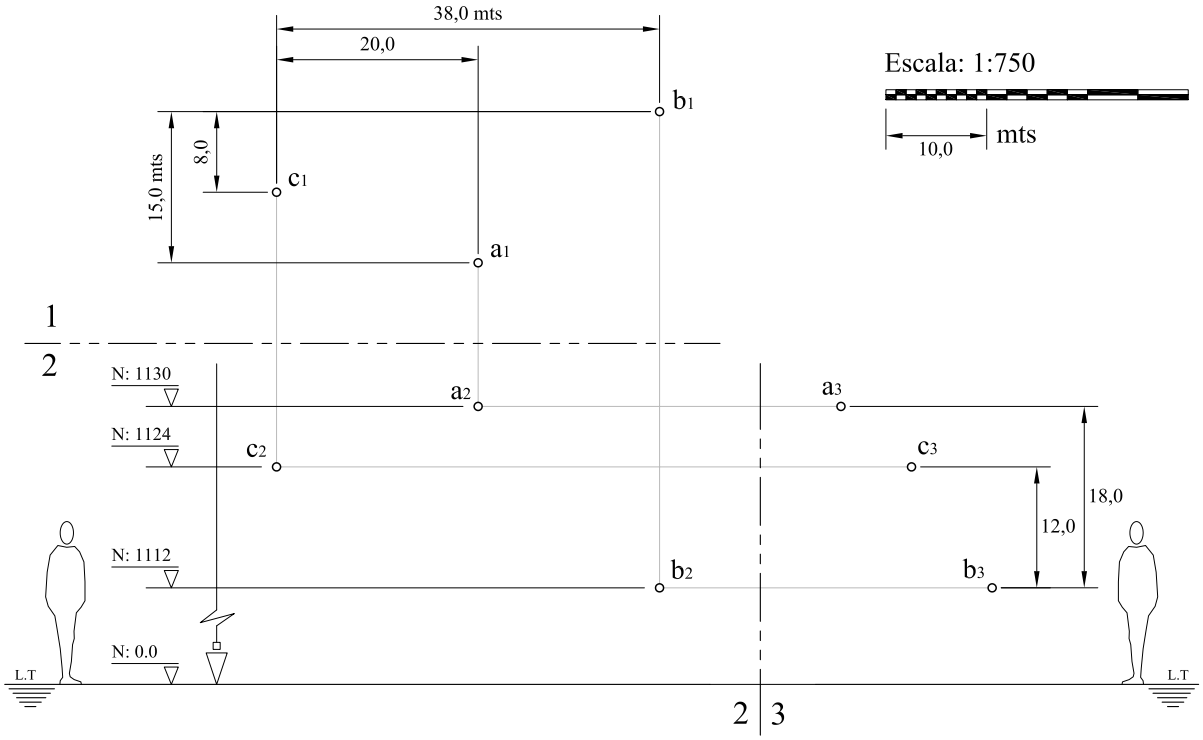
El punto A se localiza 15 mts al Sur de B, 20 mts al Oriente de C, y 18 mts por encima de B; el punto B se encuentra 38 mts al Oriente de C, 8 mts detrás de C, y 12 mts por debajo de C; El punto A posee una cota de elevación de 1130 mts sobre el nivel del mar. Con esta información, localice y proyecte los puntos en los 3 planos principales de proyección, y determine la cota de elevación de los puntos B y C. Trabajar en sistema ASA, a escala: 1:750.

Por conveniencia, se recomienda realizar un croquis proporcional a mano alzada, antes de trabajar con los instrumentos de precisión; se ubica el punto A en forma arbitraria, y se trazan paralelas de acuerdo a los desplazamientos diferenciales hacia los demás puntos; cada paralela debe designarse con una letra auxiliar, luego, en sus respectivas intersecciones se les designan las letras definitivas. Este proceso se realiza en forma simultánea tanto en la vista superior como en la vista frontal, y al final se construye la vista lateral derecha, manejando debidamente el traslado de las distancias *(figura 4.8).*

Finalmente, se limpia el dibujo eliminando los ejes de referencia y sus respectivas letras auxiliares, se dejan los puntos definitivos correctamente designados; se ordena el dimensionado, y se construye una línea vertical para referenciar las cotas de elevación *(figura 4.9).*



Planteamiento y localización de los puntos A, B, y C, en el sistema ASA
Figura 4.8

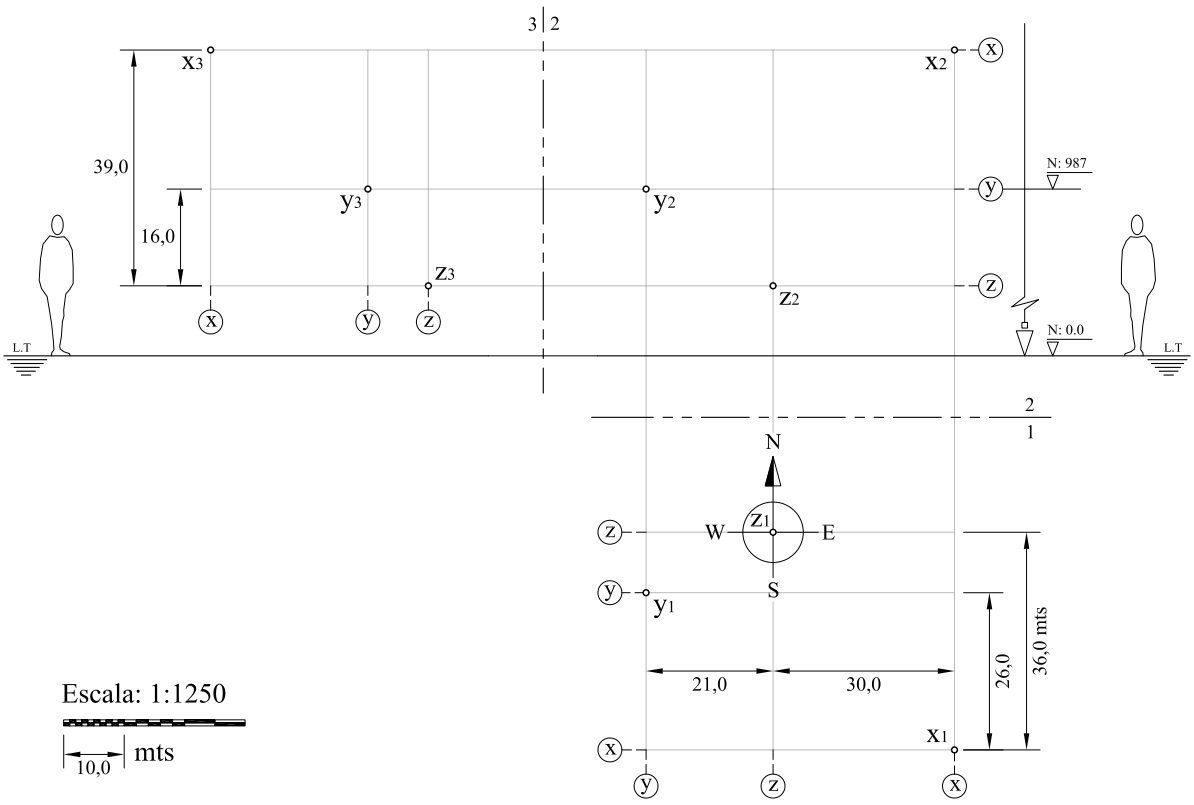


Representación y acotado de los puntos A, B, y C, en el sistema ASA
Figura 4.9

4.3.2 Ejemplo 2.

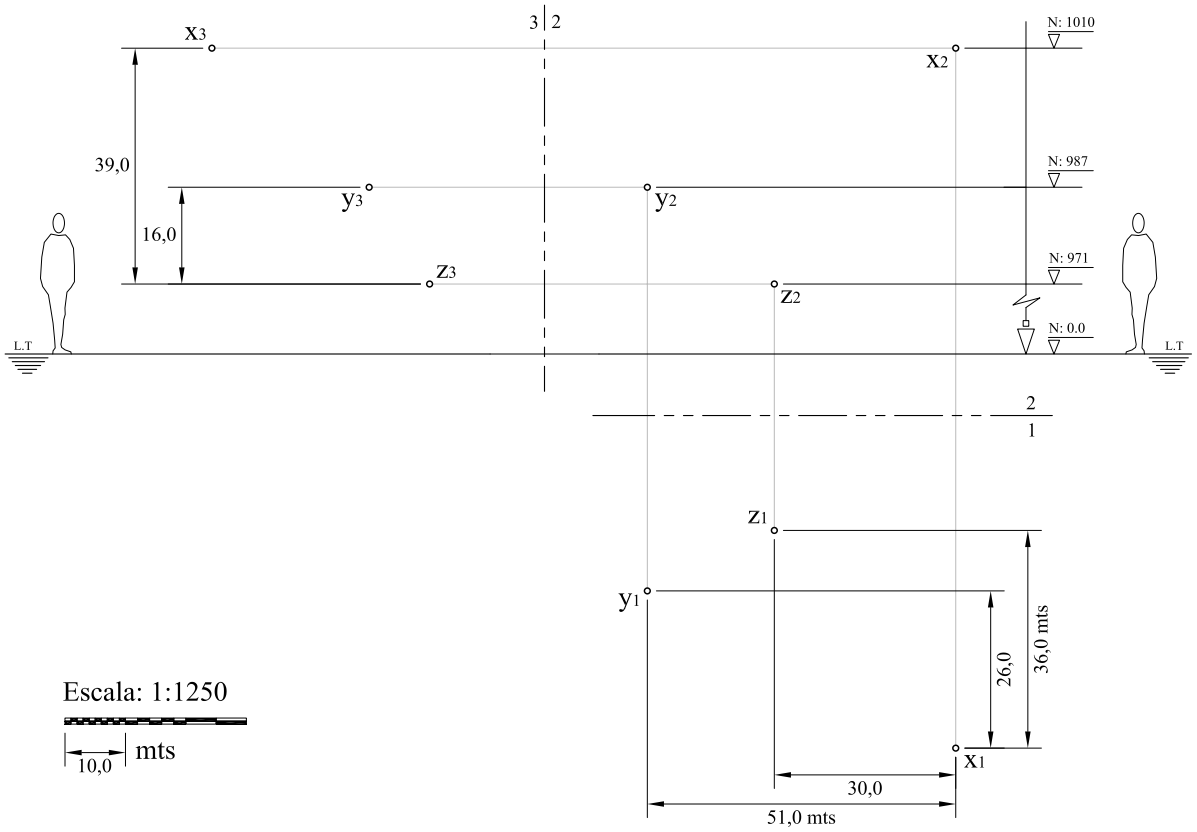
El punto X se encuentra 26 mts por delante de Y, 30 mts a la derecha de Z, y 23 mts por encima de Y; el punto Y se localiza 51 mts al Occidente de X, 10 mts por delante de Z, y 16 por encima de Z; el punto Y posee una cota de elevación de 987 mts sobre el nivel del mar. Con esta información localice y proyecte los puntos en los 3 planos de proyección principales, y determine la cota de elevación de los puntos X y Z. Trabajar en sistema DIN, a escala: 1: 1250.

Utilizando el punto Y como referencia, éste se ubica de modo arbitrario, relacionándolo con la cota de elevación proporcionada, y se trazan paralelas según los desplazamientos diferenciales hasta los puntos X y Z; cada paralela debe designarse con una letra auxiliar, luego, en sus respectivas intersecciones se les designan las letras definitivas; se proyectan los puntos completando con la construcción de la vista lateral derecha *(figura 4.10).*



Planteamiento y localización de los puntos X, Y, y Z, en el sistema DIN
Figura 4.10

Finalmente, se limpia el dibujo eliminando los ejes de referencia y sus respectivas letras auxiliares, se dejan los puntos definitivos correctamente designados; se ordena el dimensionado, y se construye una línea vertical en la vista frontal para referenciar las cotas de elevación solicitadas *(figura 4.11).*



Representación y acotado de los puntos X, Y, y Z, en el sistema DIN
Figura 4.11

4.4 Ejercicios.

4.4.1 Ejercicio 1.

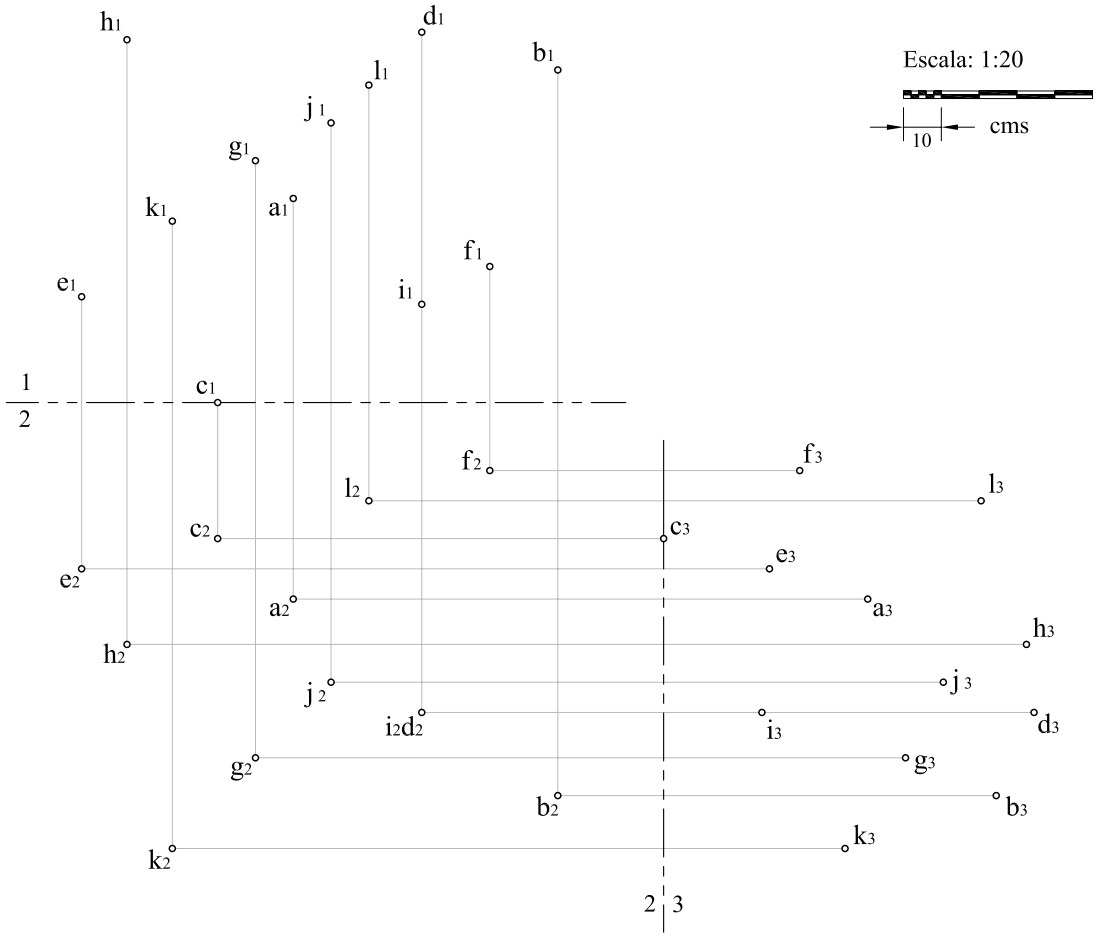
El punto X se encuentra 25 mts por delante de Z, 15 mts al Occidente de Z, y 16 mts por encima de Y; el punto Y se localiza 49 mts al Oriente de X, 22 mts al Sur de Z, y 35 mts por debajo de Z; el punto Z posee una cota de elevación de 847 mts sobre el nivel del mar. Con esta información, localice y dibuje las proyecciones principales de dichos puntos; determine la cota de elevación de los puntos X y Y. Designe los puntos y dimensione al final. Trabajar en sistema ASA, a escala: 1:750, utilizando un formato de papel bond en 1/8 de pliego.

4.4.2 Ejercicio 2.

El punto A se localiza 18 mts detrás del punto C, 48 mts al Occidente de C, y 14 mts por debajo de B; el punto B se encuentra 31 mts por delante de A, 23 mts a la derecha de A, y 24 mts por encima de C; el punto A posee una cota de elevación de 1206 mts sobre el nivel del mar. Con esta información, localice y proyecte los puntos en los tres planos principales de proyección y determine la cota de elevación de los puntos B y C; designe los puntos y dimensione al final. Trabajar en sistema DIN, a escala: 1:750, utilizando un formato de papel bond en 1/8 de pliego.

4.4.3 Ejercicio 3.

De acuerdo a los puntos proyectados en sistema ASA, determine la distancia, la cota, y el alejamiento de cada punto; mida directamente en las proyecciones y anote en la tabla el valor correspondiente para cada uno. Trabajar a escala: 1: 20, expresando las medidas en cms *(figura 4.12).*



Punto	Distancia	Cota	Alejamiento
A			
B			
C			
D			
E			
F			

Punto	Distancia	Cota	Alejamiento
G			
H			
I			
J			
K			
L			

Determinación y lectura de puntos del ejercicio 3
Figura 4.12

5.0 La recta en el espacio

5.0 Definición de la recta

La recta se define como la distancia más corta que existe entre dos puntos, y aunque existen infinitos puntos en ella, sólo es necesario designarla con sus dos extremos. En el campo de la Ingeniería civil y Arquitectura, las rectas son utilizadas para representar ejes de tuberías, perfiles, tensores, columnas, vigas, ductos, y demás elementos geométricos de carácter esbelto y unidireccional.

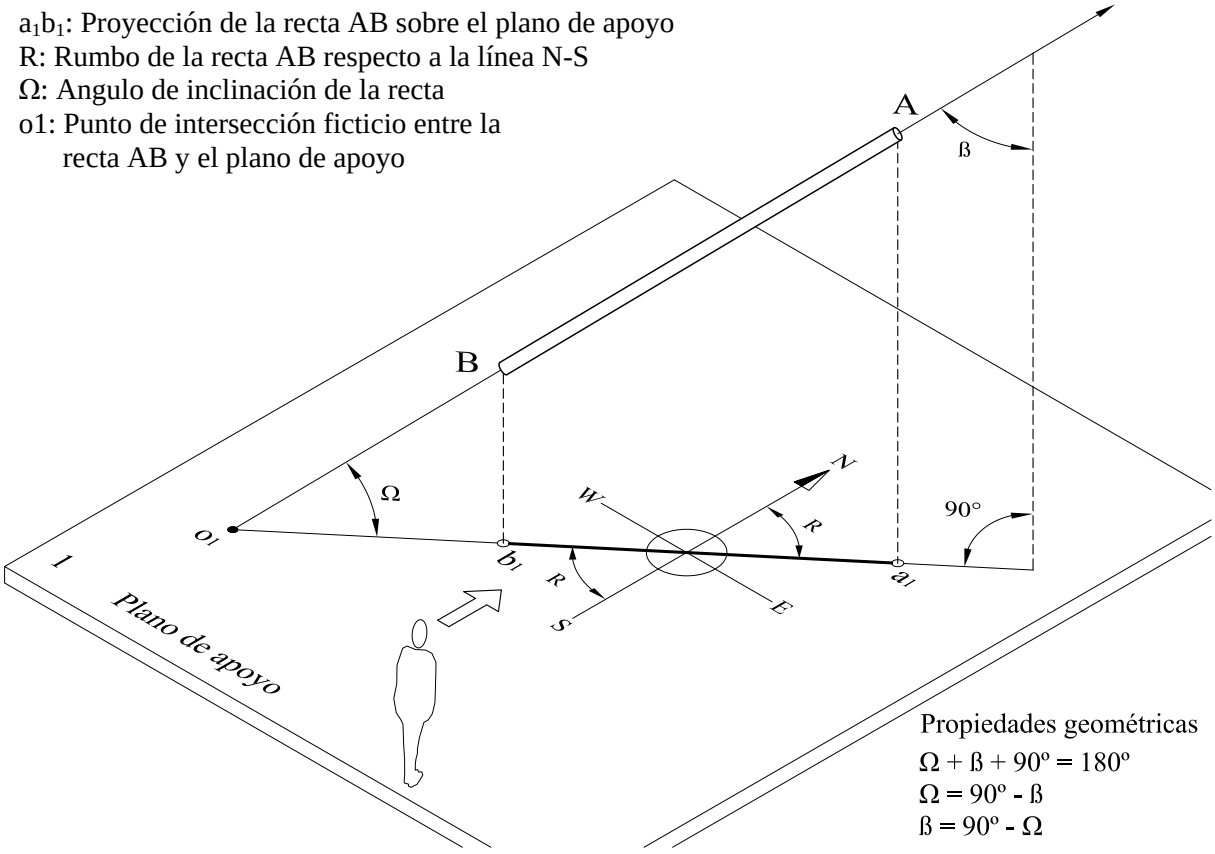
5.1 Determinación de la recta

La recta se determina en el espacio conociendo los siguientes componentes:

- LA LONGITUD: Distancia real entre sus extremos.
- EL ÁNGULO DE INCLINACIÓN: Es el ángulo que forma la recta respecto al plano de apoyo.
- LA DIRECCIÓN: Es el rumbo de su proyección en el plano de apoyo, respecto al sistema cardinal.

Las rectas son colineales, es decir, que se pueden prolongar más allá de sus extremos y conservar su dirección, con el fin de interceptar otros elementos geométricos; también es importante considerar sus diversas posiciones en el espacio, y las propiedades que se cumplen *(figura 5.1).*

a_1b_1: Proyección de la recta AB sobre el plano de apoyo
R: Rumbo de la recta AB respecto a la línea N-S
Ω: Angulo de inclinación de la recta
o1: Punto de intersección ficticio entre la recta AB y el plano de apoyo



Propiedades geométricas
Ω + ß + 90º = 180º
Ω = 90º - ß
ß = 90º - Ω

Determinación de la recta en el espacio
Figura 5.1

5.2 Verdadera magnitud de la recta

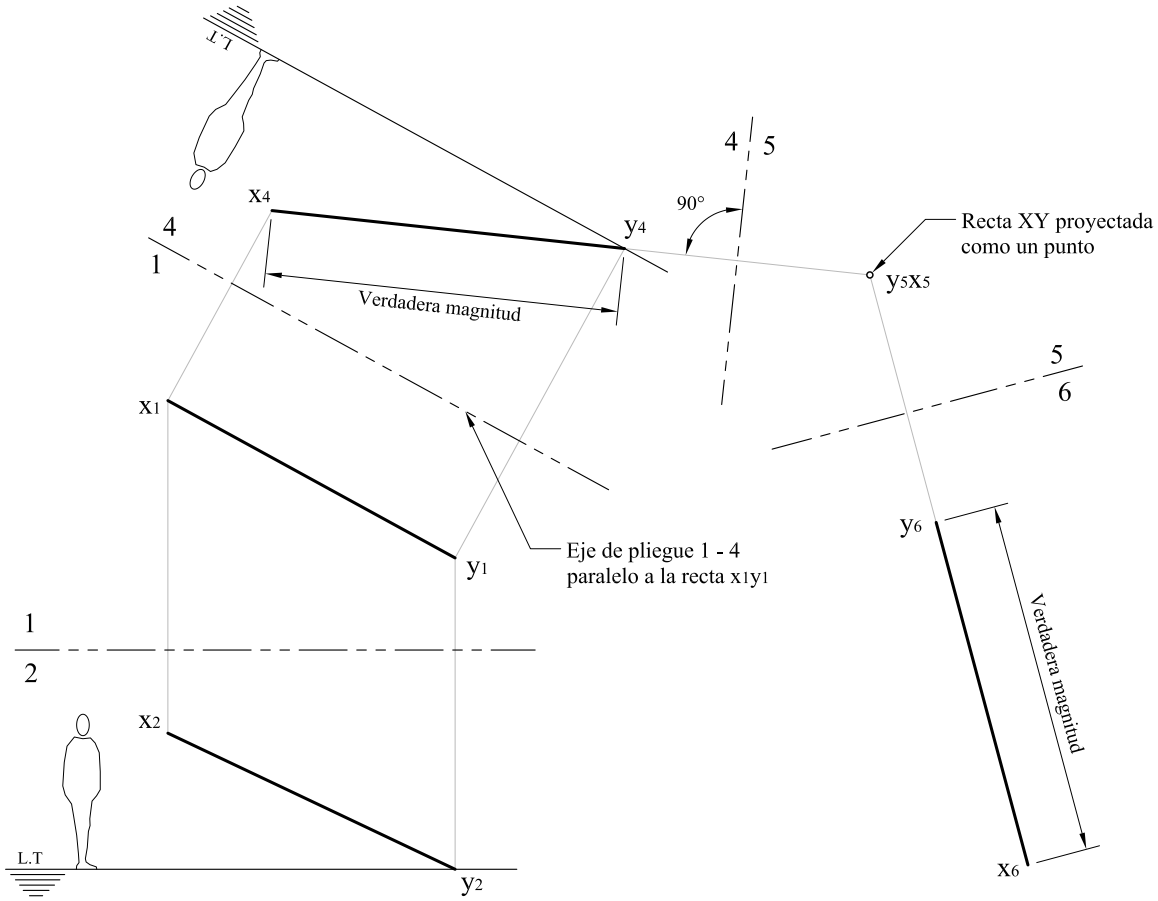
Una recta se proyecta en verdadera magnitud cuando dicha proyección es igual a la longitud real que existe entre sus extremos; esto es debido, a que todos los puntos de la recta se encuentran equidistantes al plano de proyección. En las carreras relacionadas con la medición, el diseño, y la construcción, es necesario calcular cantidades y presupuestos de obra, para ello se recurre en gran parte a determinar la longitud real de los elementos rectilíneos que intervienen en un proyecto concebido o construido. Para una mayor comprensión, se recurre a la aplicación de los siguientes teoremas:

Teorema 1: Toda recta paralela a un plano de proyección, se proyectará en verdadera magnitud.

Teorema 2: Toda vista adyacente a una recta proyectada como un punto, proyectará la verdadera magnitud de la recta.

Teorema 3: Todo plano de proyección perpendicular a una recta proyectada en verdadera magnitud, proyectará dicha recta como un punto.

Simplemente se construye un eje de pliegue que sea paralelo a una de las proyecciones de la recta, para apreciar en la nueva proyección la verdadera magnitud de la misma *(figura 5.2).*



Verdadera magnitud de una recta
Figura 5.2

La verdadera magnitud de una recta se puede determinar también aplicando el teorema de Pitágoras:

Teorema 4: El cuadrado de la hipotenusa de un triángulo rectángulo, es igual a la suma de sus catetos al cuadrado.

Este teorema aplica cuando la recta posee pendiente o forma un ángulo agudo respecto al plano de apoyo; en este caso, la recta vendría a representar la hipotenusa, el diferencial de cota entre los extremos de la misma representa el cateto vertical, y la proyección en la vista superior representa el cateto horizontal; la ventaja que ofrece dicho teorema, es que no se requiere construir una vista auxiliar; debido a que únicamente se trabaja con las proyecciones frontal y superior de la recta.

Supóngase una recta XY que posee un ángulo de inclinación ß, y se requiere determinar la verdadera magnitud (V.M), sabiendo que su proyección en la vista superior es (Pr.Hz), y su diferencial de cota es (Δ cota) *(figura 5.3).*

Nota: Se recomienda dibujar el triángulo rectángulo a un lado de la vista frontal, prolongando los extremos de la recta; de esta manera, se obtiene la verdadera magnitud de la misma, y el valor del ángulo de inclinación respecto al plano de apoyo (ß).

$$(V.M)^2 = (\mathrm{Pr}.Hz)^2 + (\Delta \cot a)^2$$

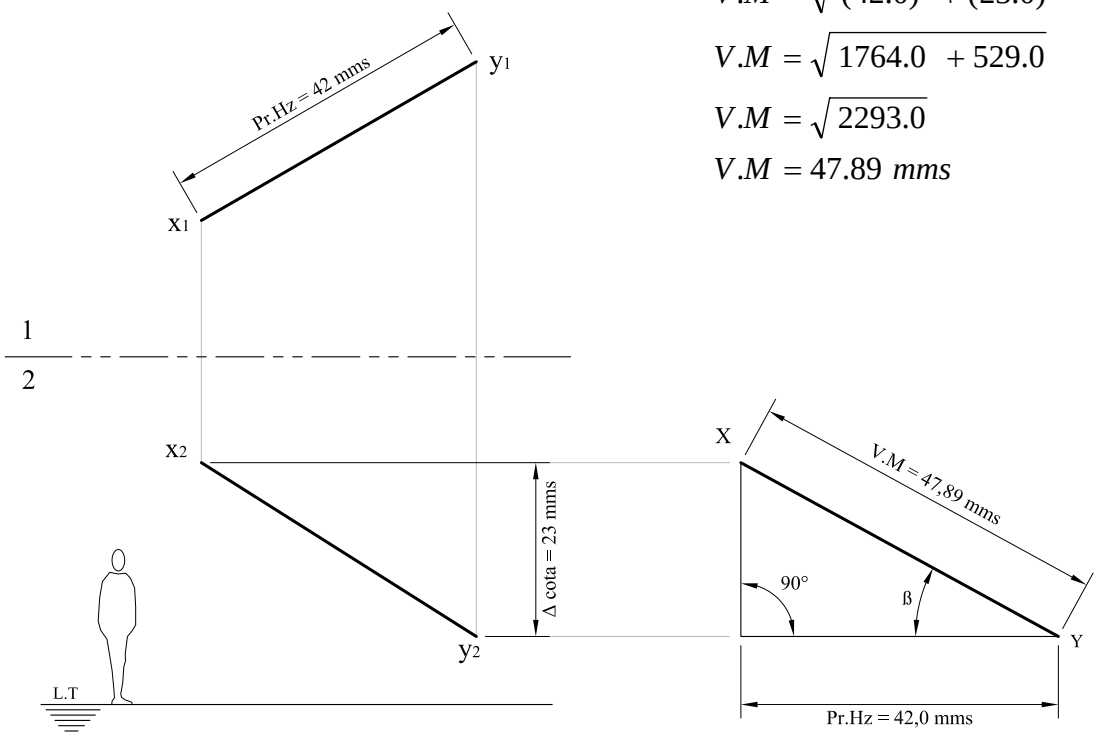
$$V.M = \sqrt{(\mathrm{Pr}.Hz)^2 + (\Delta \cot a)^2}$$

$$V.M = \sqrt{(42.0)^2 + (23.0)^2}$$

$$V.M = \sqrt{1764.0 + 529.0}$$

$$V.M = \sqrt{2293.0}$$

$$V.M = 47.89\ mms$$



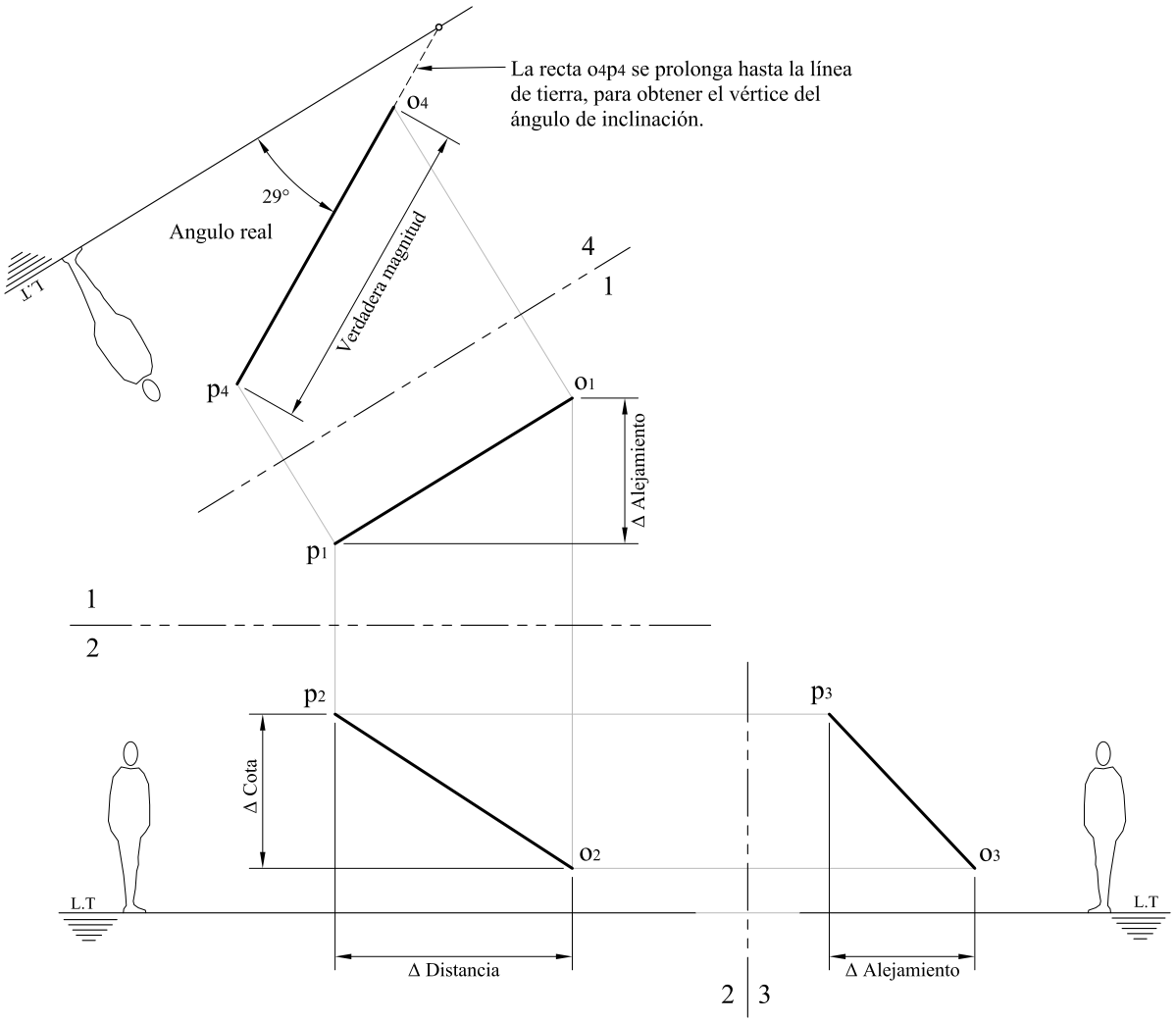
Verdadera magnitud de una recta utilizando el teorema de Pitágoras
Figura 5.3

5.3 Angulo real de inclinación de la recta

Una recta posee inclinación o pendiente, cuando el ángulo que forma dicha recta respecto al plano de apoyo es mayor a 0º y menor a 90º; también significa que existe un diferencial de cota entre sus extremos, y a su vez, existe un diferencial de distancia y/o diferencial de alejamiento. Para apreciar dicho ángulo de inclinación, se aplica el siguiente teorema:

Teorema 5: El ángulo de inclinación de una recta, se aprecia en una vista de alzada donde la recta se proyecte en verdadera magnitud.

Esto quiere decir, que el ángulo de inclinación de una recta respecto al plano de apoyo o plano de proyección superior, únicamente se puede percibir en una vista de alzada (vista adyacente a la vista superior), donde la recta se proyecta en verdadera magnitud, y el plano de apoyo se proyecta como una línea recta o filo (línea de tierra) *(figura 5.4).*



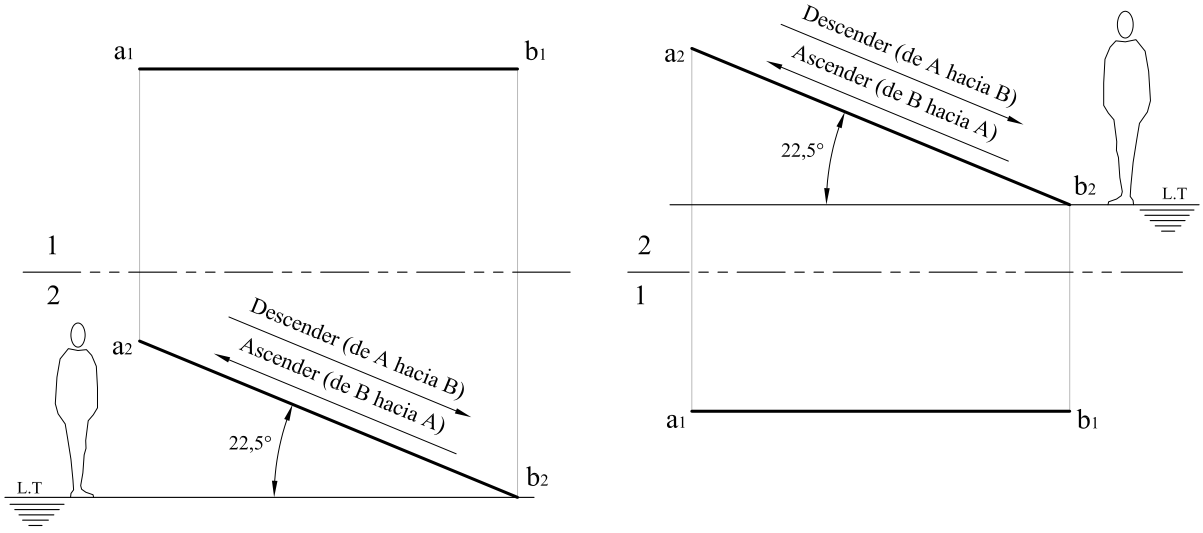
Angulo de inclinación de una recta
Figura 5.4

La pendiente de una recta se define como la tangente del ángulo que forma una recta respecto al plano de apoyo, y se puede calcular mediante una función tangente; después de haber obtenido el triángulo rectángulo con el método de Pitágoras *(véase figura 5.3)*, se determina el valor del ángulo ß así:

$$Tag\ \beta = \frac{\Delta \cot a}{\Pr.Hz} \longrightarrow Tag\ \beta = \frac{23.0}{42.0} \longrightarrow Tag\ \beta = 0.54761$$

Siendo $\beta = Tag^{-1}\ x\ 0.54761 \longrightarrow \beta = 28.70555 \longrightarrow$ Donde $\beta = 28^{o}\ 42'\ 20''$

Otro aspecto a considerar en las rectas inclinadas consiste en establecer el sentido de la pendiente, es decir, si la recta es ascendente o descendente. Una recta es ascendente cuando se aleja de la línea de tierra, en cambio, una recta es descendente cuando se acerca a la misma *(figura 5.5)*.



Sistema ASA Sistema DIN

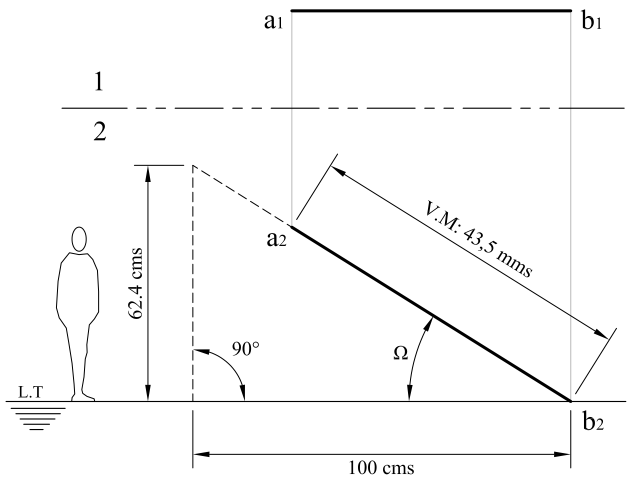
Sentido de la pendiente de una recta (sistema ASA y DIN)
Figura 5.5

La pendiente de una recta, se puede expresar de dos formas:

a) En grados sexagesimales.
b) En porcentaje.

En el primer caso, se utiliza un transportador para medir el ángulo en grados sexagesimales, o si el lector prefiere, puede determinar el ángulo mediante la función tangente; para el segundo caso, se debe considerar la relación entre el diferencial de cota que existe por cada 100 unidades horizontales.

El objetivo consiste en dibujar un triángulo rectángulo, de tal forma, que la verdadera magnitud de la recta quede alineada con la hipotenusa, y se plantea un cateto adyacente equivalente a 100 unidades (úsese otra escala si es necesario); al final se mide la longitud del cateto opuesto resultante en dicho triángulo, para expresar la pendiente de la recta en porcentaje *(figura 5.6)*.



Pendiente de la recta AB = 62.4 %

$$Tag\ \Omega = \frac{62.4}{100}$$

$$Tag\ \Omega = 0.624$$

$$\Omega = Tag^{-1}\ x\ 0.624$$

$$\Omega = 31.9642$$

$$\Omega = 31^{o}\ 57'\ 51''$$

Escala: 1:20

10 cms

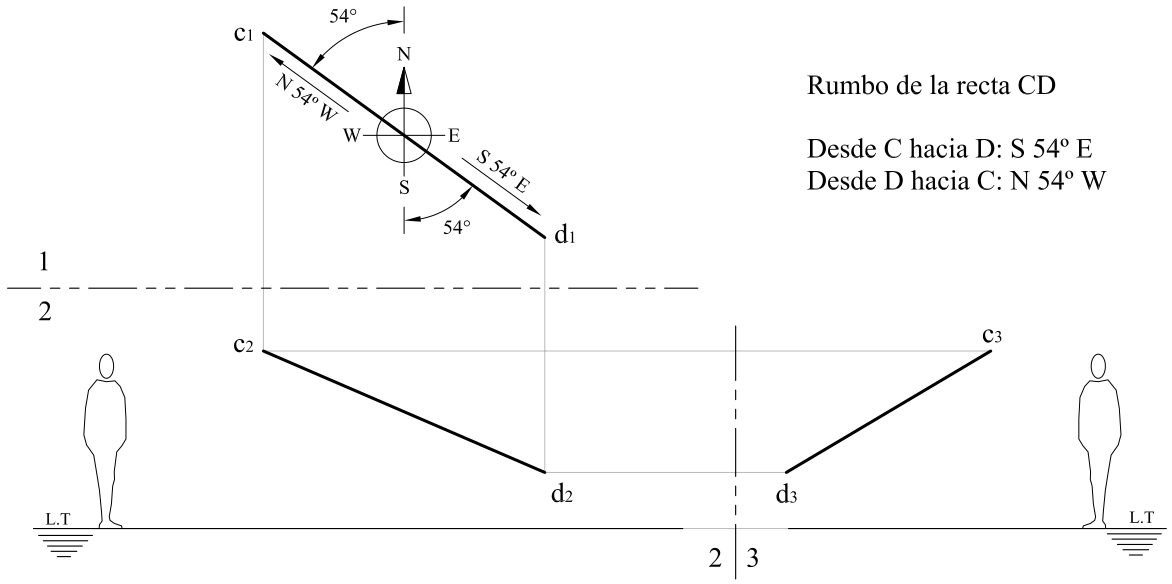
Escala del triángulo rectángulo

Pendiente de una recta expresada en porcentaje
Figura 5.6

5.4 Orientación o rumbo de la recta

Es el ángulo formado por la proyección de la recta en la vista superior respecto a la línea Norte–Sur de referencia; dicho ángulo estará comprendido entre 0º y 90º, y la dirección que toma la recta define el cuadrante o eje del sistema cardinal.

Si el ángulo es agudo, se debe expresar el valor de dicho ángulo en medio de las iniciales del cuadrante en que se dirige la recta; si el ángulo es 0º, entonces la recta posee una dirección igual al Norte o Sur; en cambio, si el ángulo es 90º, la recta posee una dirección igual al Oriente u Occidente *(figura 5.7).*



Rumbo de la recta CD

Desde C hacia D: S 54º E
Desde D hacia C: N 54º W

Orientación o rumbo de una recta
Figura 5.7

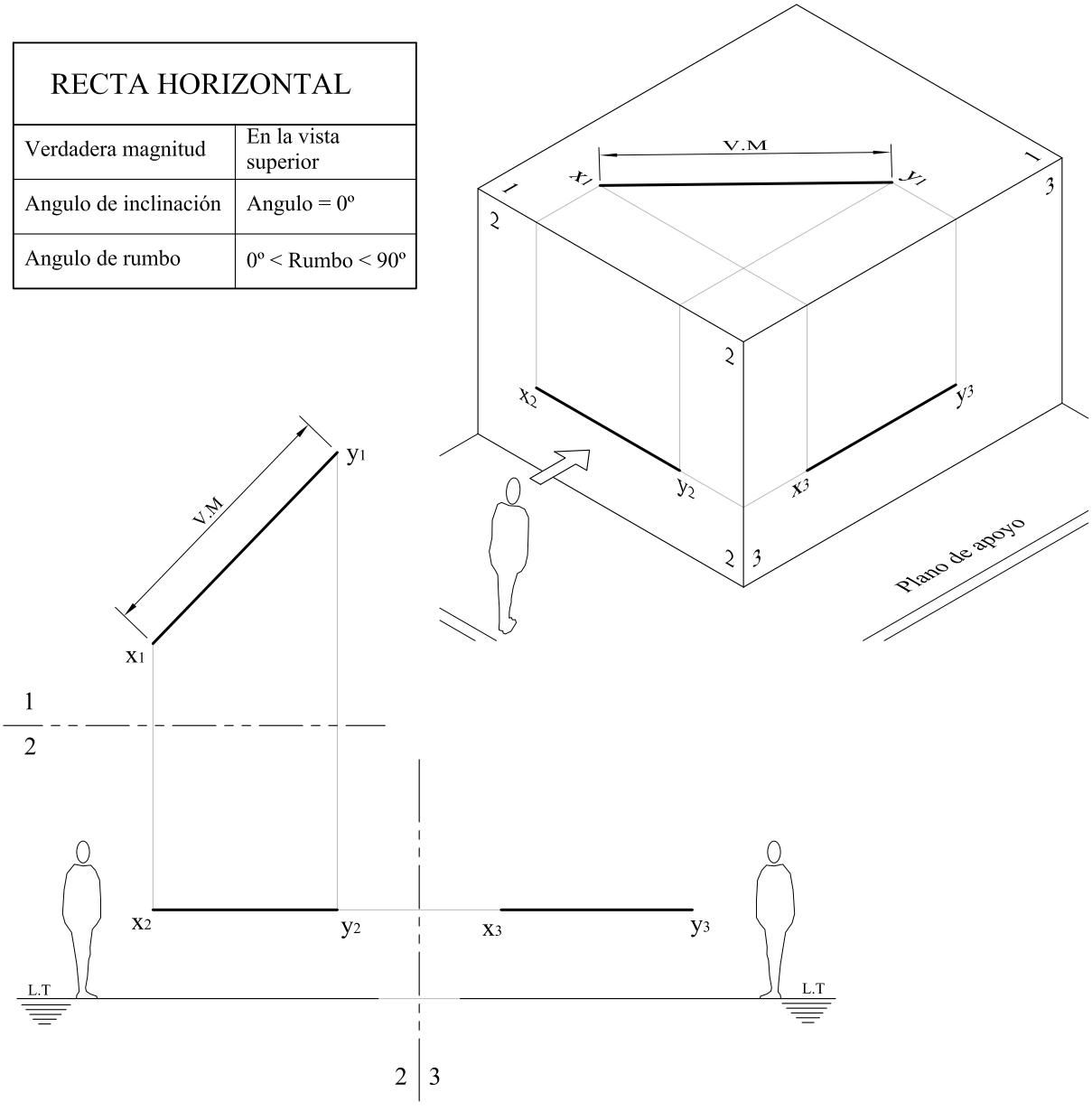
5.5 Clasificación de las rectas

Estas se clasifican, según el comportamiento espacial que presentan dentro de la caja de proyección.

5.5.1 Recta horizontal

Es toda recta que se encuentra paralela al plano superior de proyección, pero no es perpendicular, ni paralela a los planos, frontal y lateral derecho; no presenta inclinación, porque todos los puntos de la recta están a la misma altura; su verdadera magnitud se proyecta en la vista superior *(figura 5.8).*

RECTA HORIZONTAL	
Verdadera magnitud	En la vista superior
Angulo de inclinación	Angulo = 0º
Angulo de rumbo	0º < Rumbo < 90º

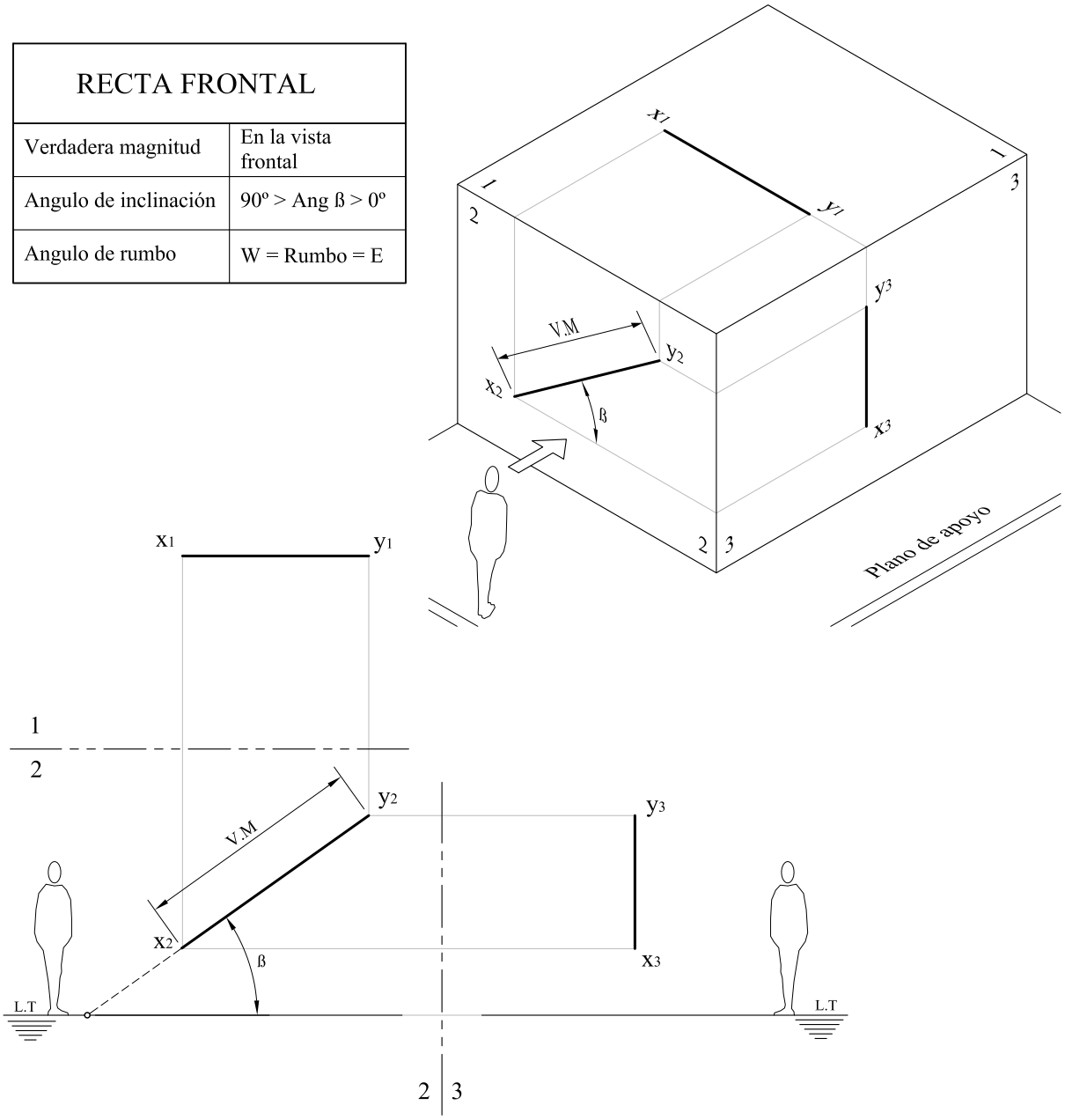


Recta horizontal
Figura 5.8

5.5.2 Recta frontal

Es toda recta que se encuentra paralela al plano frontal de proyección, pero no es perpendicular, ni paralela a los planos, superior y lateral derecho; la verdadera magnitud y el ángulo real de inclinación de la misma, se proyectan en la vista frontal *(figura 5.9).*

RECTA FRONTAL	
Verdadera magnitud	En la vista frontal
Angulo de inclinación	90º > Ang ß > 0º
Angulo de rumbo	W = Rumbo = E

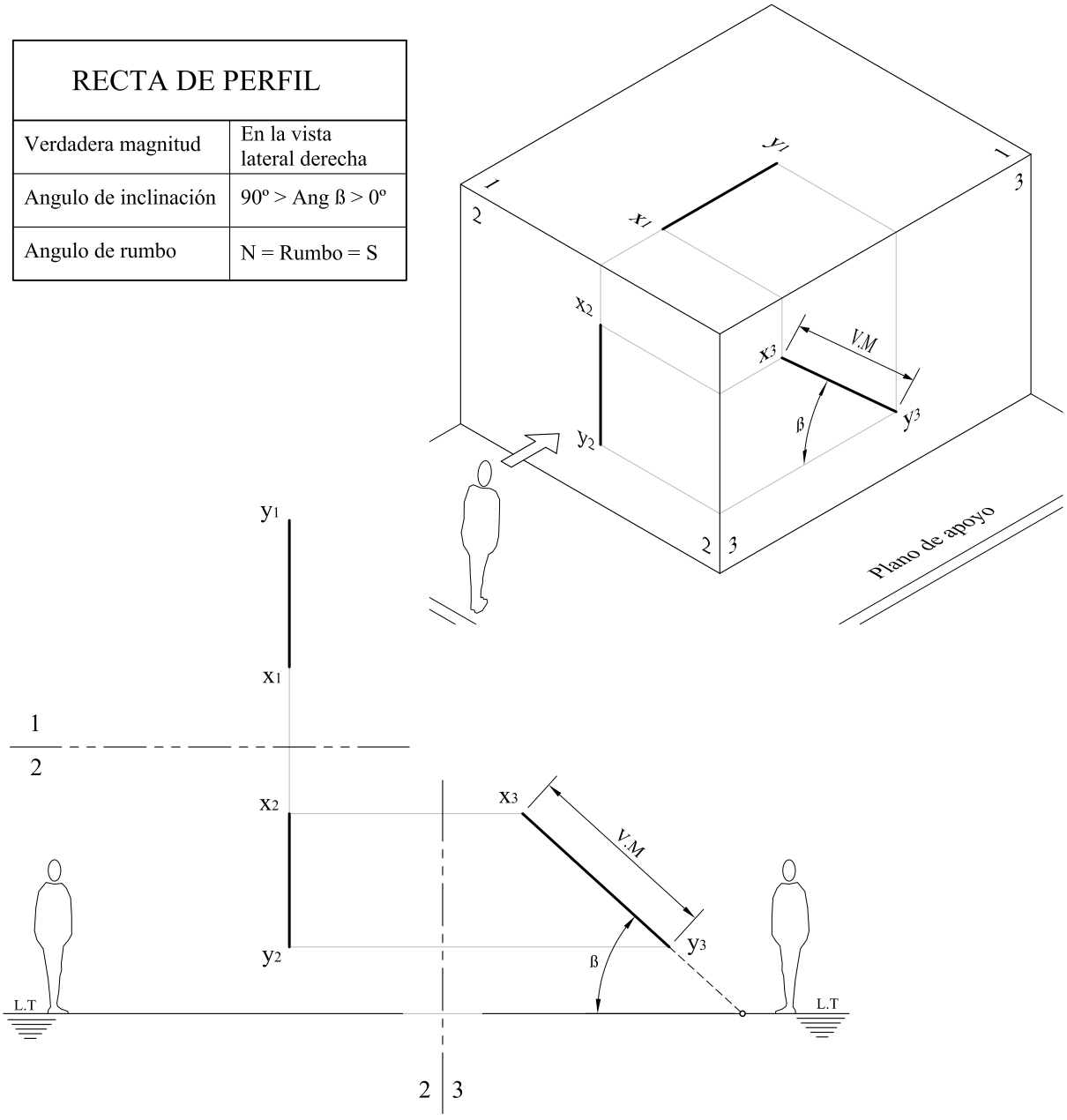


Recta frontal
Figura 5.9

5.5.3 Recta de perfil

Es toda recta que está paralela al plano lateral derecho de proyección, pero no es perpendicular, ni paralela a los planos, superior y frontal; la verdadera magnitud y el ángulo real de inclinación de la misma, se proyectan en la vista lateral derecha *(figura 5.10)*.

RECTA DE PERFIL	
Verdadera magnitud	En la vista lateral derecha
Angulo de inclinación	90º > Ang ß > 0º
Angulo de rumbo	N = Rumbo = S



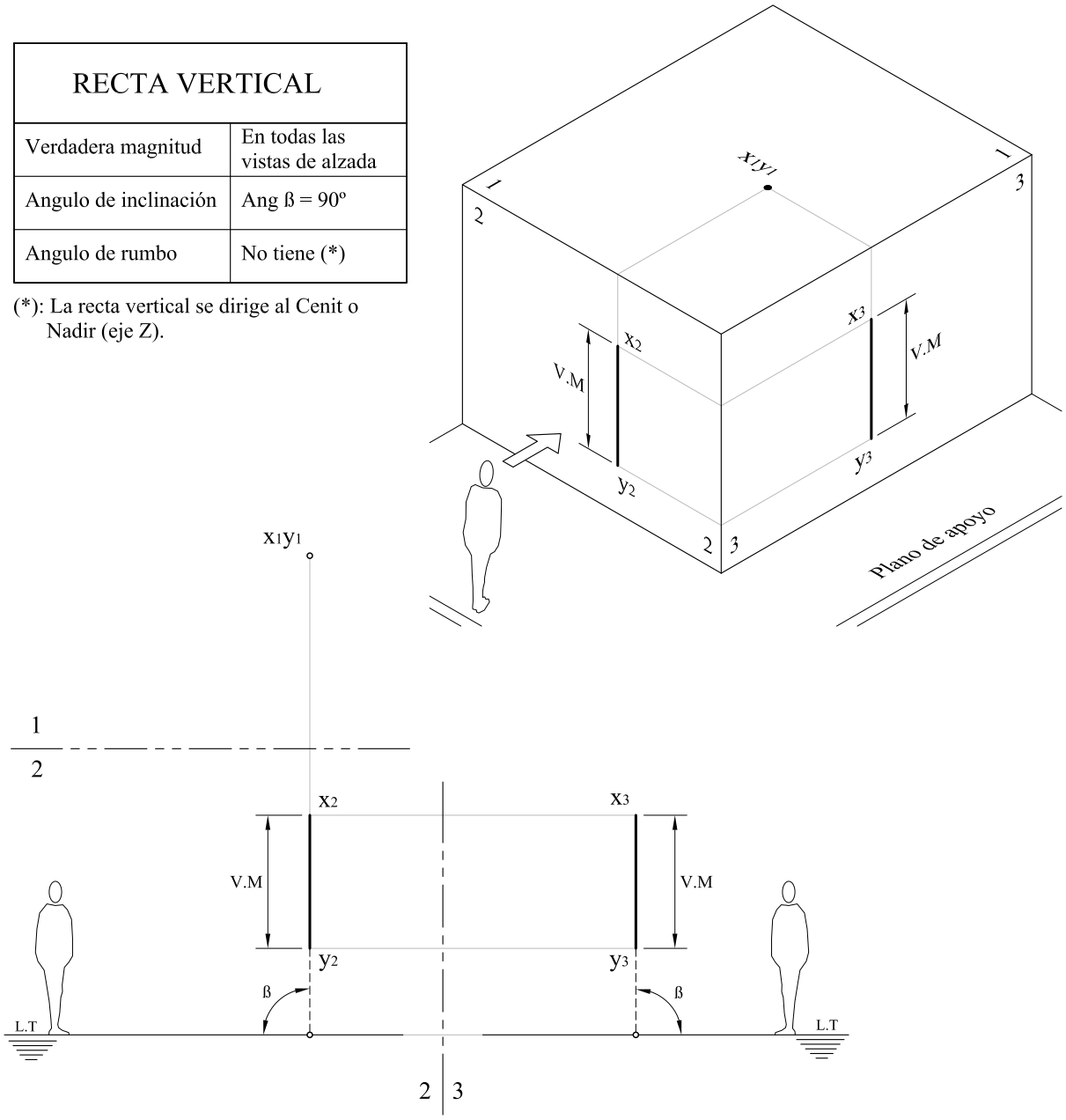
Recta de perfil
Figura 5.10

5.5.4 Recta vertical

Es toda recta que se encuentra perpendicular al plano superior de proyección; no presenta ángulo de inclinación, porque dicho ángulo es 90º respecto al plano de apoyo; la verdadera magnitud se proyecta en todas las vistas de alzada *(figura 5.11).*

RECTA VERTICAL	
Verdadera magnitud	En todas las vistas de alzada
Angulo de inclinación	Ang ß = 90º
Angulo de rumbo	No tiene (*)

(*): La recta vertical se dirige al Cenit o Nadir (eje Z).

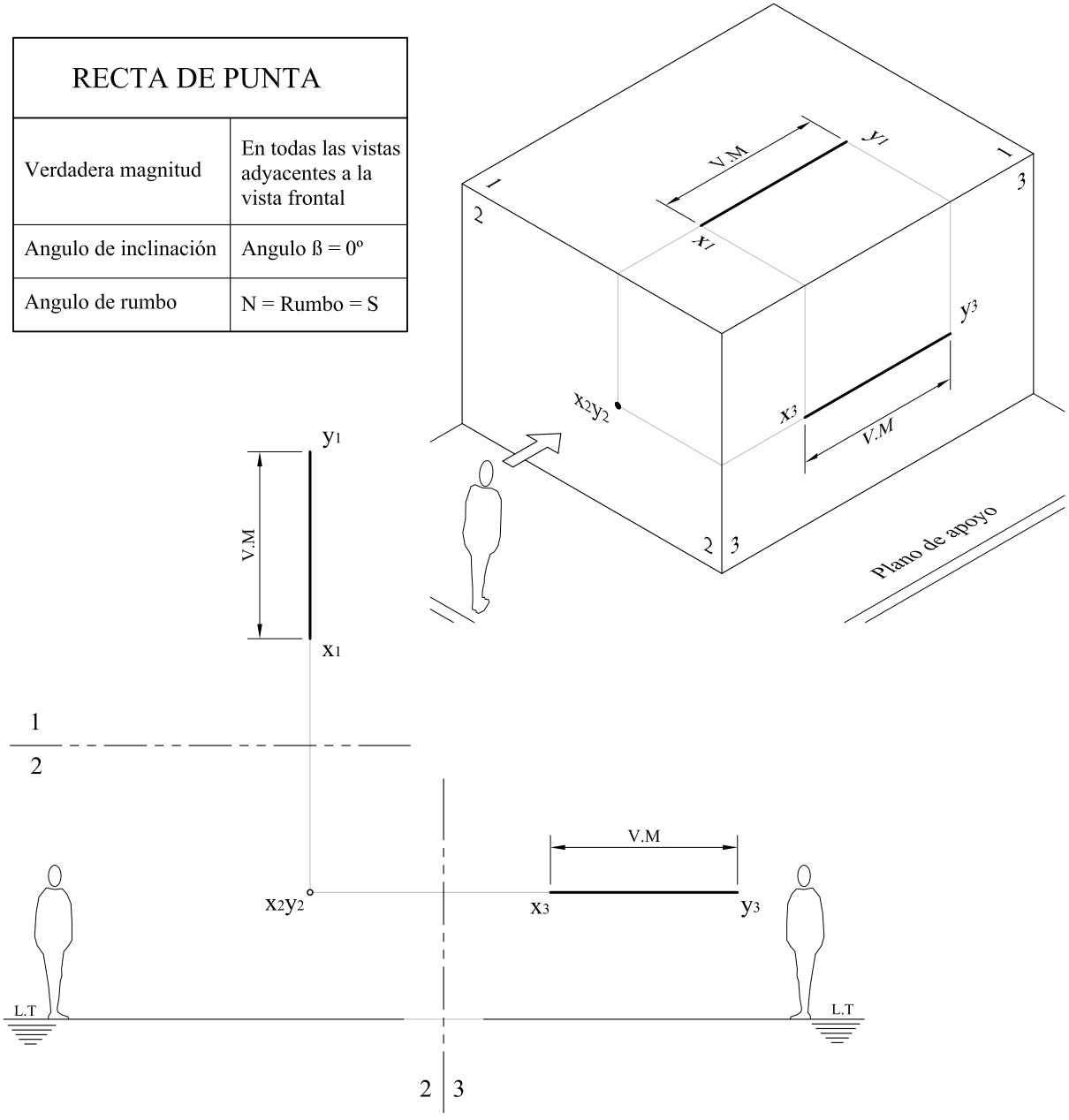


Recta vertical
Figura 5.11

5.5.5 Recta de punta

Es toda recta que está perpendicular al plano frontal de proyección, no presenta ángulo de inclinación, porque dicho ángulo es 0º respecto al plano de apoyo; la verdadera magnitud se proyecta en todas las vistas adyacentes a la vista frontal *(figura 5.12)*.

RECTA DE PUNTA	
Verdadera magnitud	En todas las vistas adyacentes a la vista frontal
Angulo de inclinación	Angulo ß = 0º
Angulo de rumbo	N = Rumbo = S

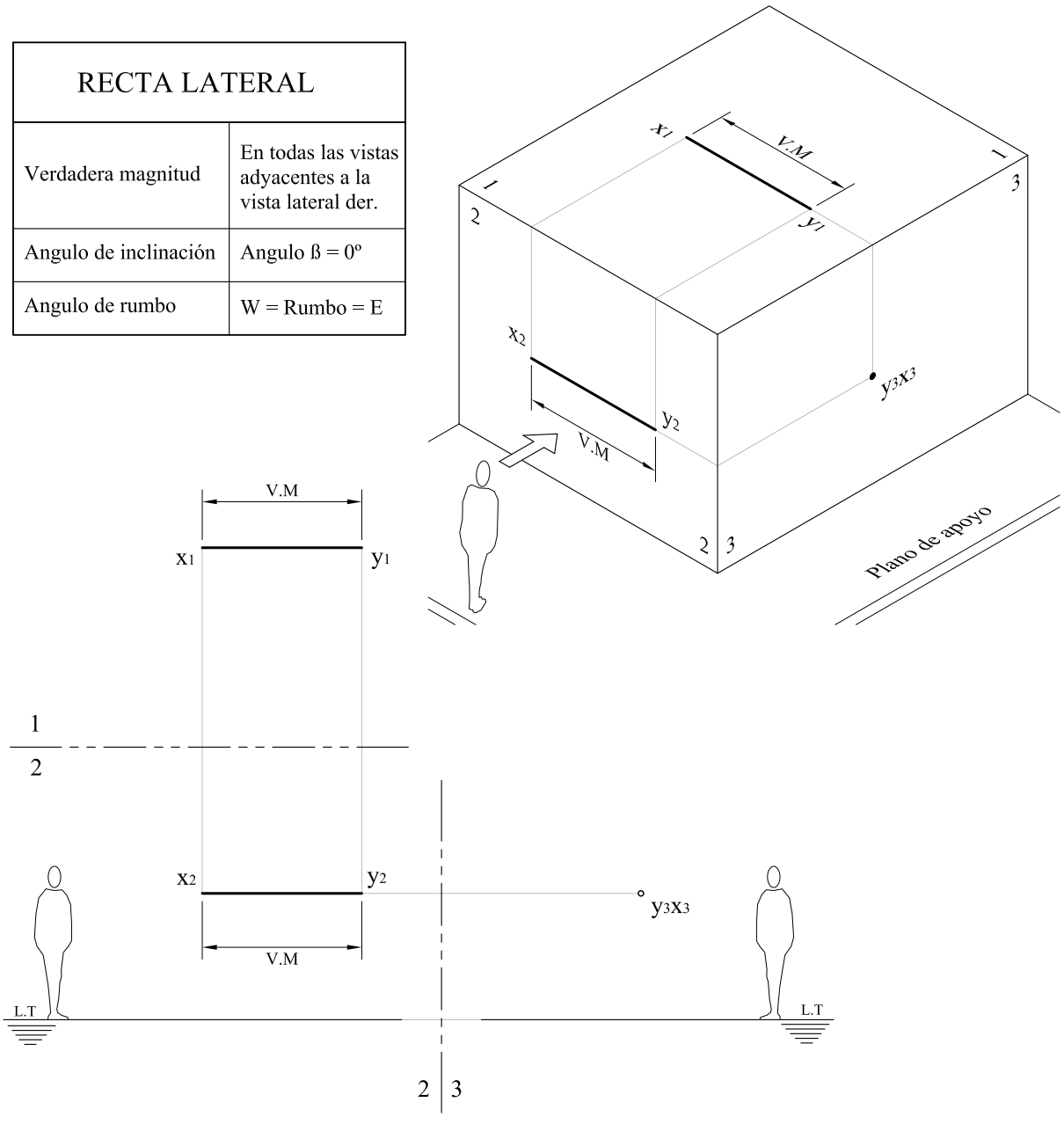


Recta de punta
Figura 5.12

5.5.6 Recta lateral

Es toda recta que está perpendicular al plano lateral derecho de proyección, no presenta ángulo de inclinación, porque dicho ángulo es 0º respecto al plano de apoyo; la verdadera magnitud se proyecta en todas las vistas adyacentes a la vista lateral derecha *(figura 5.13)*.

RECTA LATERAL	
Verdadera magnitud	En todas las vistas adyacentes a la vista lateral der.
Angulo de inclinación	Angulo ß = 0º
Angulo de rumbo	W = Rumbo = E

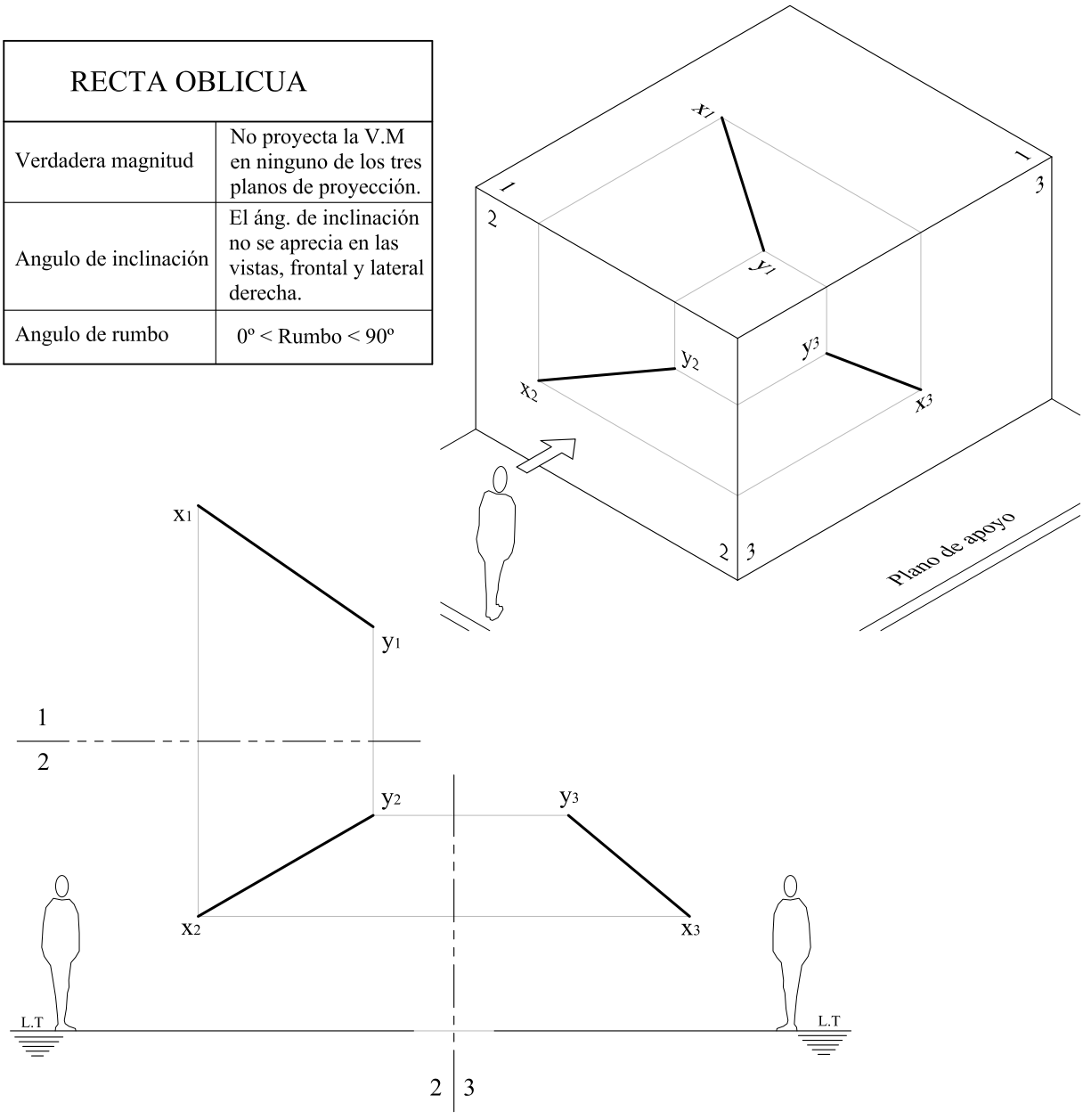


Recta lateral
Figura 5.13

5.5.7 Recta oblicua

Es toda recta que no se encuentra paralela, ni perpendicular a los tres planos de proyección principales; posee ángulo de inclinación respecto al plano de apoyo, pero dicho ángulo no se aprecia en magnitud real en las vistas, frontal y lateral derecha; por lo tanto, es necesario construir una vista adyacente a la vista superior (aplicación de teoremas 1 y 5), para encontrar las proyecciones reales de su longitud y el ángulo de inclinación de dicha recta *(figura 5.14)*.

RECTA OBLICUA	
Verdadera magnitud	No proyecta la V.M en ninguno de los tres planos de proyección.
Angulo de inclinación	El áng. de inclinación no se aprecia en las vistas, frontal y lateral derecha.
Angulo de rumbo	0º < Rumbo < 90º



Recta oblicua
Figura 5.14

5.6 Ejemplos.

5.6.1 Ejemplo 1.

La figura muestra la columna de una antena, la cual está sostenida por los tensores, AB, AC, y AD; se requiere determinar la verdadera magnitud, el rumbo, y el ángulo de inclinación respecto al plano de apoyo, de cada uno de los tensores. Trabajar en sistema ASA, a escala: 1: 125 *(figura 5.15).*

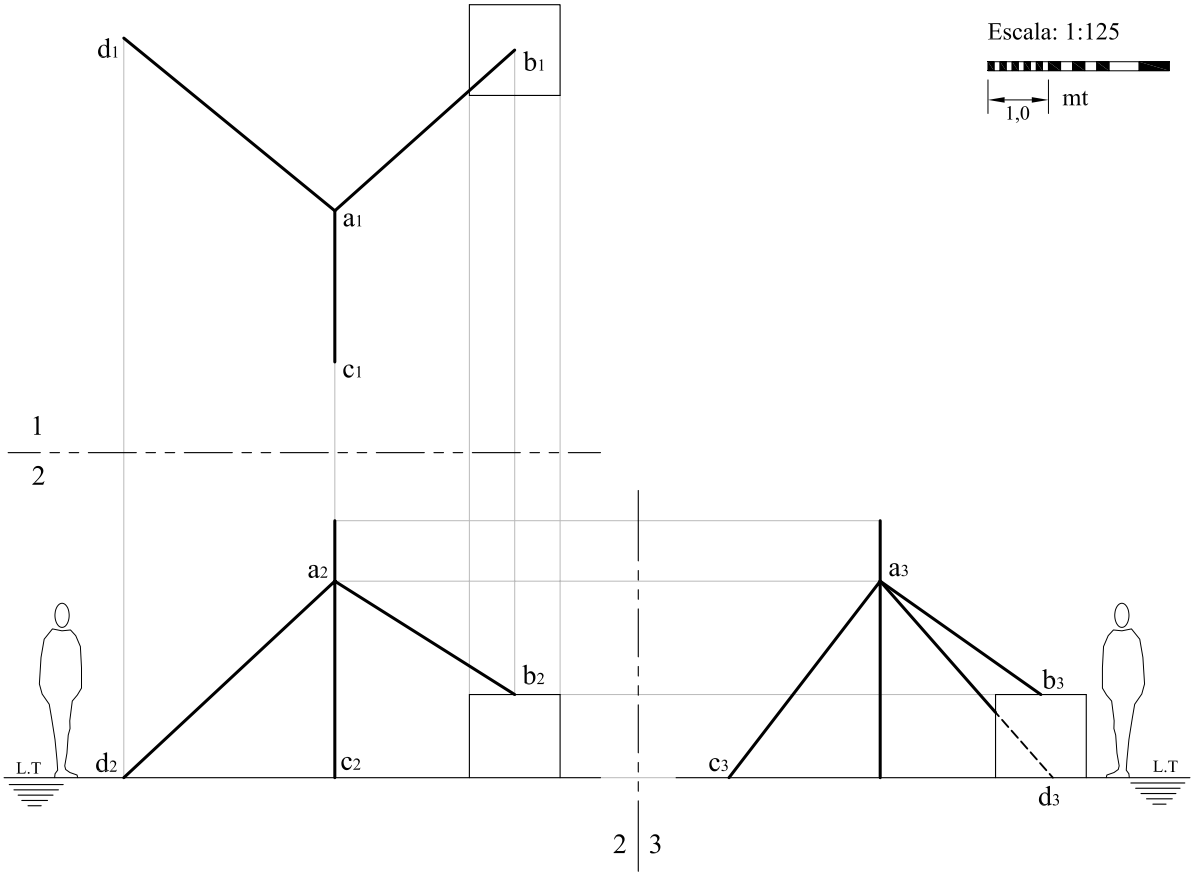
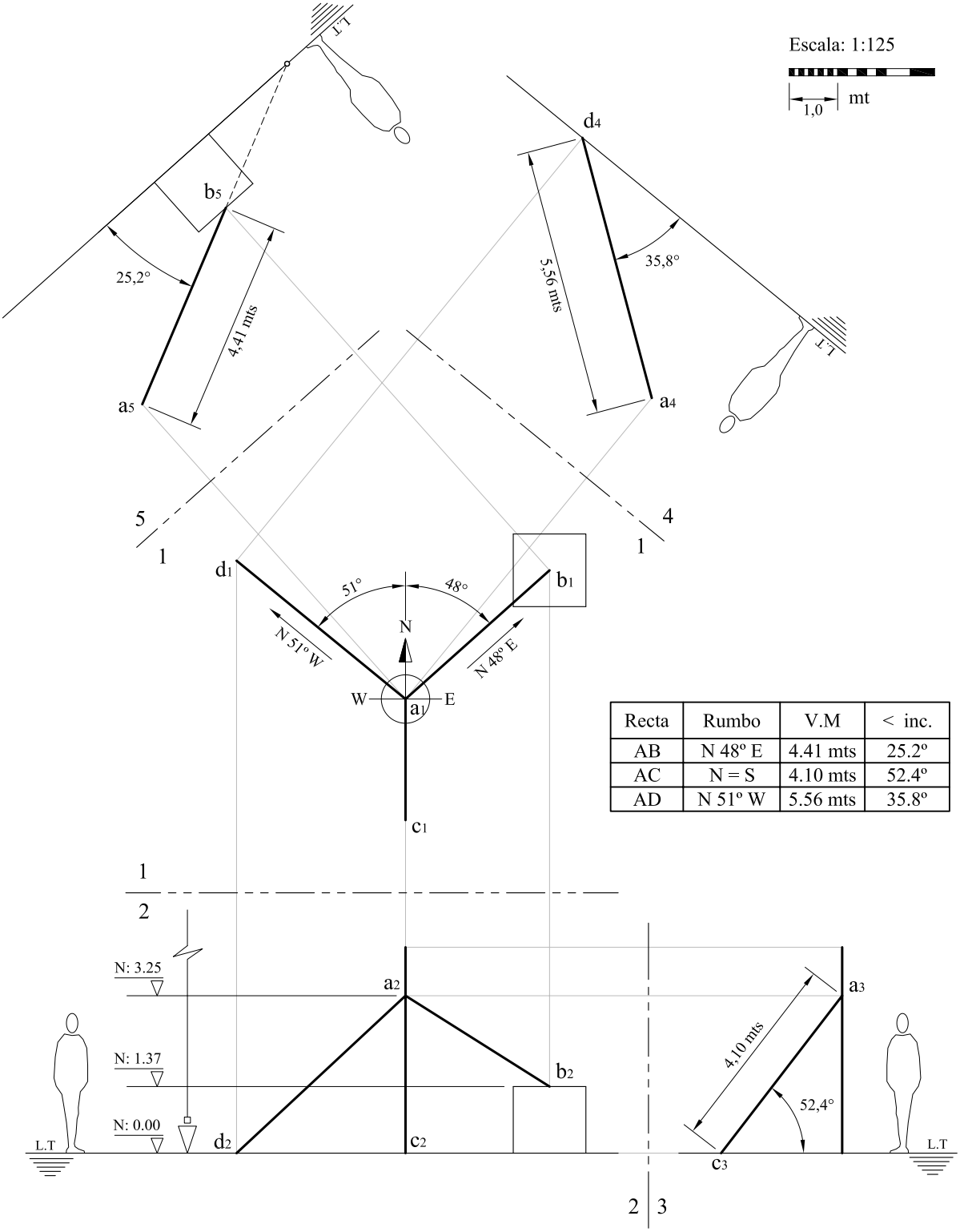


Gráfico correspondiente al ejemplo Nº 1
Figura 5.15

Los tensores representan rectas, por lo tanto, se procede a analizar el comportamiento espacial, y por consiguiente clasificarlas; las rectas AB y AD son rectas oblicuas, y la recta AC es una recta de perfil. Para las rectas oblicuas se deben plantear vistas de alzada, de tal forma que los ejes de pliegue sean paralelos a cada de una de las proyecciones mostradas en la vista superior; de esta manera, se aprecian la verdadera magnitud y el ángulo de inclinación solicitados.

En la vista lateral derecha se destaca principalmente la recta de perfil AC, la cual proyecta la longitud real y el ángulo de inclinación; luego, en la vista superior se mide el rumbo para cada recta; finalmente se elabora una tabla de respuestas al respaldo del dibujo *(figura 5.16).*



Recta	Rumbo	V.M	< inc.
AB	N 48º E	4.41 mts	25.2º
AC	N = S	4.10 mts	52.4º
AD	N 51º W	5.56 mts	35.8º

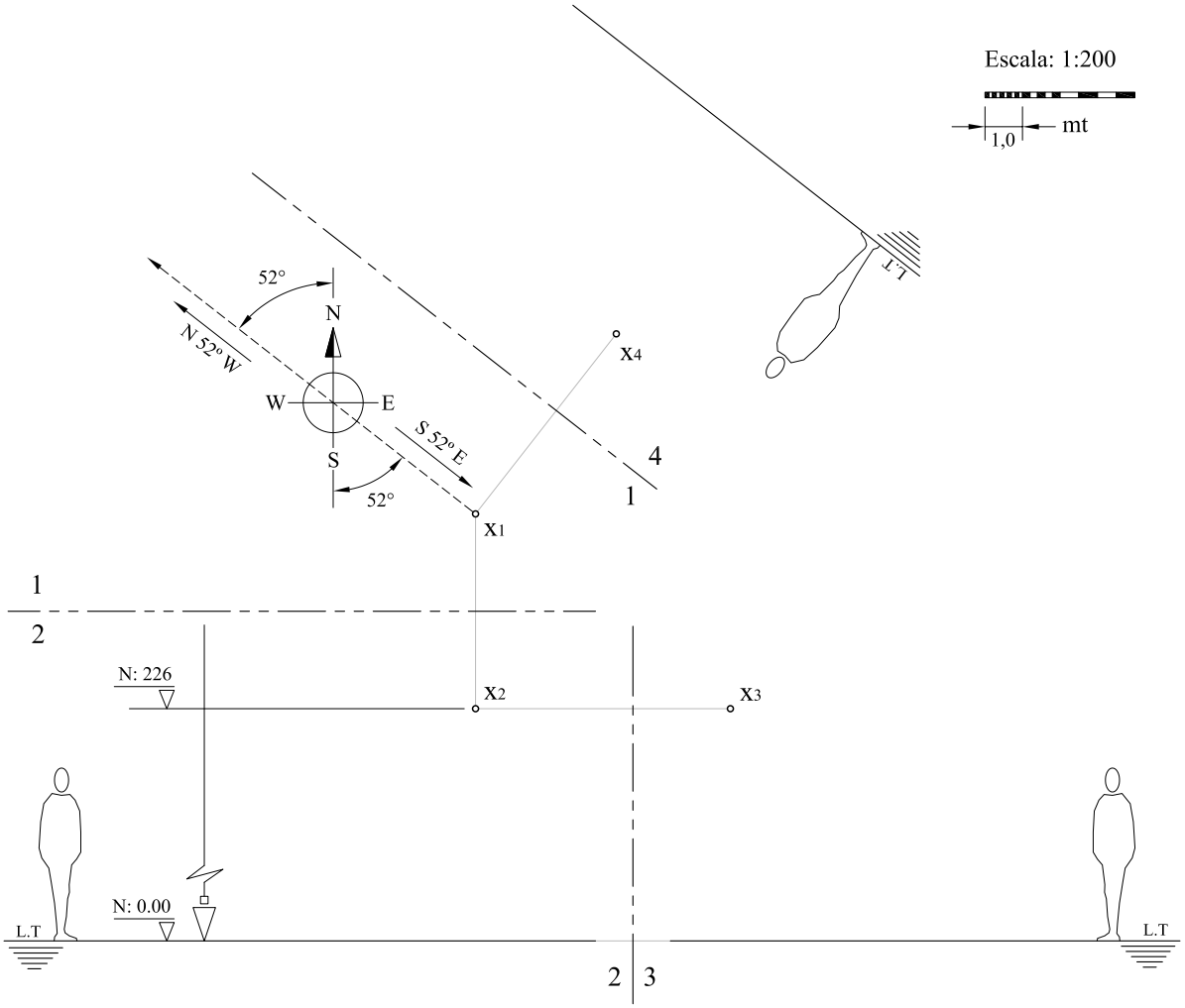
Desarrollo del ejemplo 1 – Sistema ASA
Figura 5.16

5.6.2 Ejemplo 2.

Construir la recta XY, sabiendo que el punto X posee una cota de elevación de 226 mts sobre el nivel del mar, y posee una inclinación descendente del 64 % desde X hacia Y; además, dicha recta presenta un rumbo S 52º E, y posee 7.20 mts de longitud real. Se pide determinar la cota de elevación del punto Y sobre el nivel del mar; trabajar en sistema ASA, a escala: 1: 200.

De acuerdo al enunciado anterior, se conoce que el punto X está por encima del punto Y, por lo tanto, su cota de elevación es menor al de X; para empezar, se plantea el punto X de forma arbitraria en las vistas, superior y frontal, con su debida cota de elevación; y en la vista superior se dibuja una recta indefinida desde X con dirección S 52º E o N 52º W.

Como la recta XY es una recta en posición oblicua, se debe construir una vista de alzada paralela al rumbo, con el fin de visualizar la pendiente y longitud de la misma; luego, se proyecta el punto X en la vista de alzada 4 *(figura 5.17).*



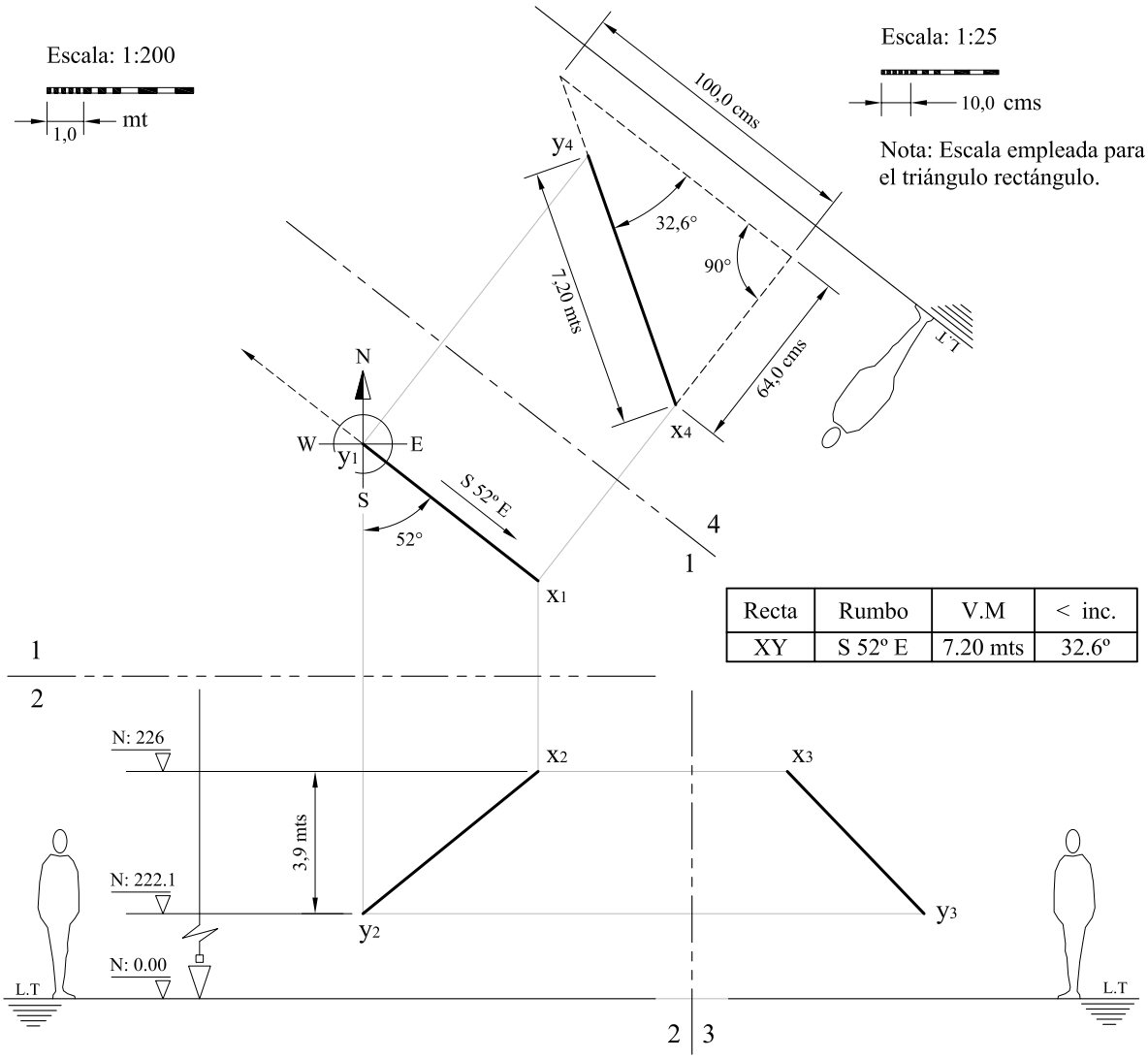
Planteamiento del ejemplo 2 – Sistema ASA
Figura 5.17

A partir de x_4 se dibuja una línea con pendiente descendente del 64 %, de tal forma, que el cateto adyacente sea paralelo a la línea de tierra y mida 100 unidades (utilícese otra escala, si es necesario); luego, se traza el cateto vertical que representa 64 unidades, y sobre la hipotenusa se mide desde x_4 la longitud real: 7.20 mts, determinándose la localización del punto y4.

Desde el punto y_4 se dibuja una línea de relación hacia la vista superior, hasta interceptar el rumbo de la recta, de esta forma, se define el punto y_1; al final, se completan las proyecciones hacia las vistas, frontal y lateral derecha *(figura 5.18).*

El ángulo ß correspondiente a la pendiente del 64 % es: $Tag\ \beta = \frac{64}{100}$, Donde $Tag\ \beta = 0.64$

$$\beta = Tag^{-1}\ x\ 0.64 \longrightarrow \beta = 32.6192 \longrightarrow \beta = 32^{\circ}\ 37'\ 9''$$



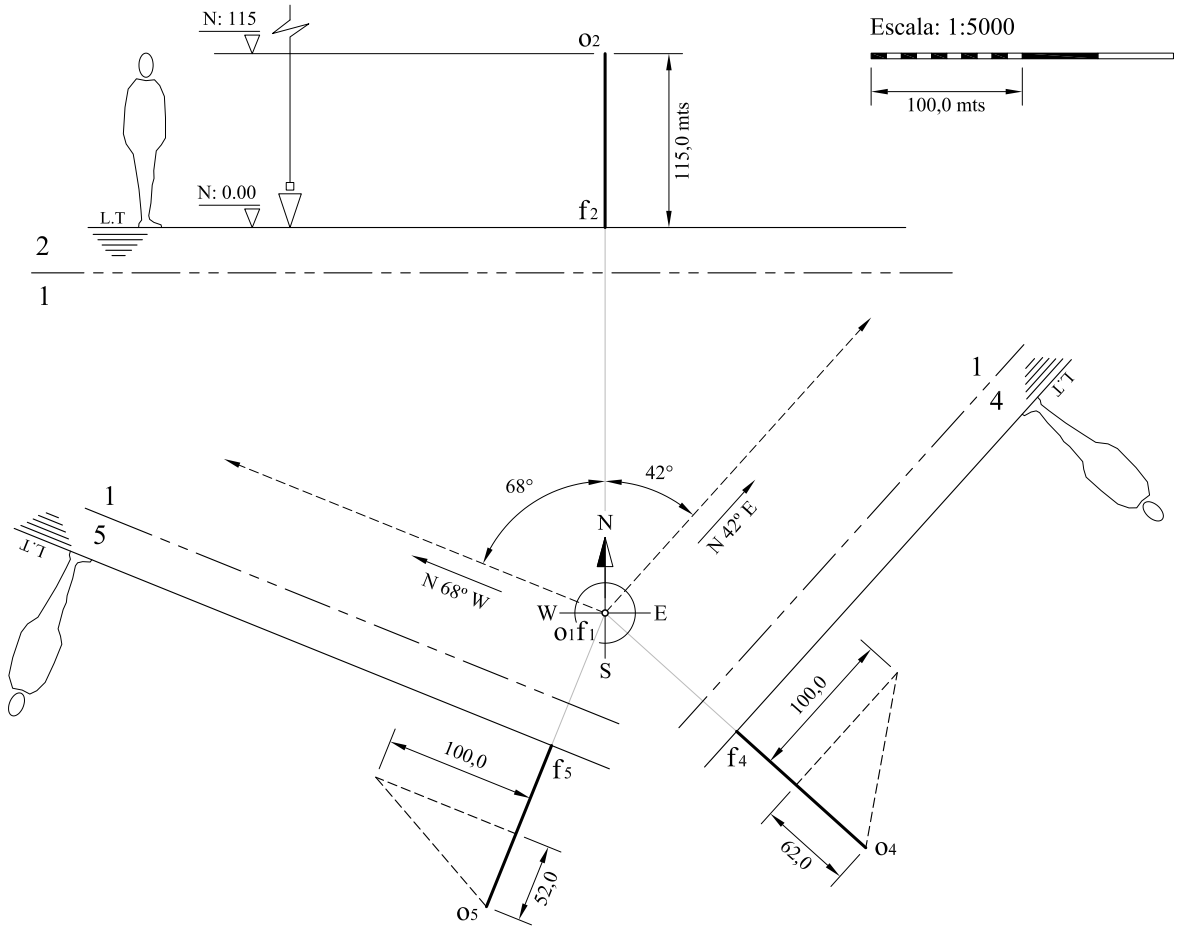
Desarrollo del ejemplo 2 – Sistema ASA
Figura 5.18

5.6.3 Ejemplo 3.

Un observador situado en un faro a 115 mts sobre el nivel del mar, visualiza un barco en una dirección N 42º E, y una pendiente descendente de 62 %; al cabo de 35 segundos, observa el mismo barco en una dirección N 68º W, y una pendiente descendente de 52 %. Suponiendo que el barco mantenga su rumbo constante y velocidad, determine: La dirección, la distancia recorrida por el barco en los dos avistamientos, y la velocidad expresada en nudos (1 nudo: 1688 mts/hora). Trabajar en sistema DIN, a escala: 1:5000.

El faro se representa mediante una recta OF en posición vertical, por encima del nivel del mar, y con una longitud de 115 mts; en el extremo superior O se encuentra el observador que visualiza el barco en los dos avistamientos durante el lapso de 35 segundos; esto significa, que las visuales descendentes interceptarán el nivel del mar, y por lo tanto, se determinará la posición del barco (instantes A y B).

Se dibuja el faro en las vistas, superior y frontal; luego, se trazan los dos rumbos desde el punto o_1 en forma indefinida, y se plantean dos vistas de alzada, de tal forma, que los ejes de pliegue sean paralelos a cada rumbo. Se dibuja el faro con el nivel del mar en las vistas de alzada, y se plantean los triángulos rectángulos que definen las pendientes descendentes *(figura 5.19)*.



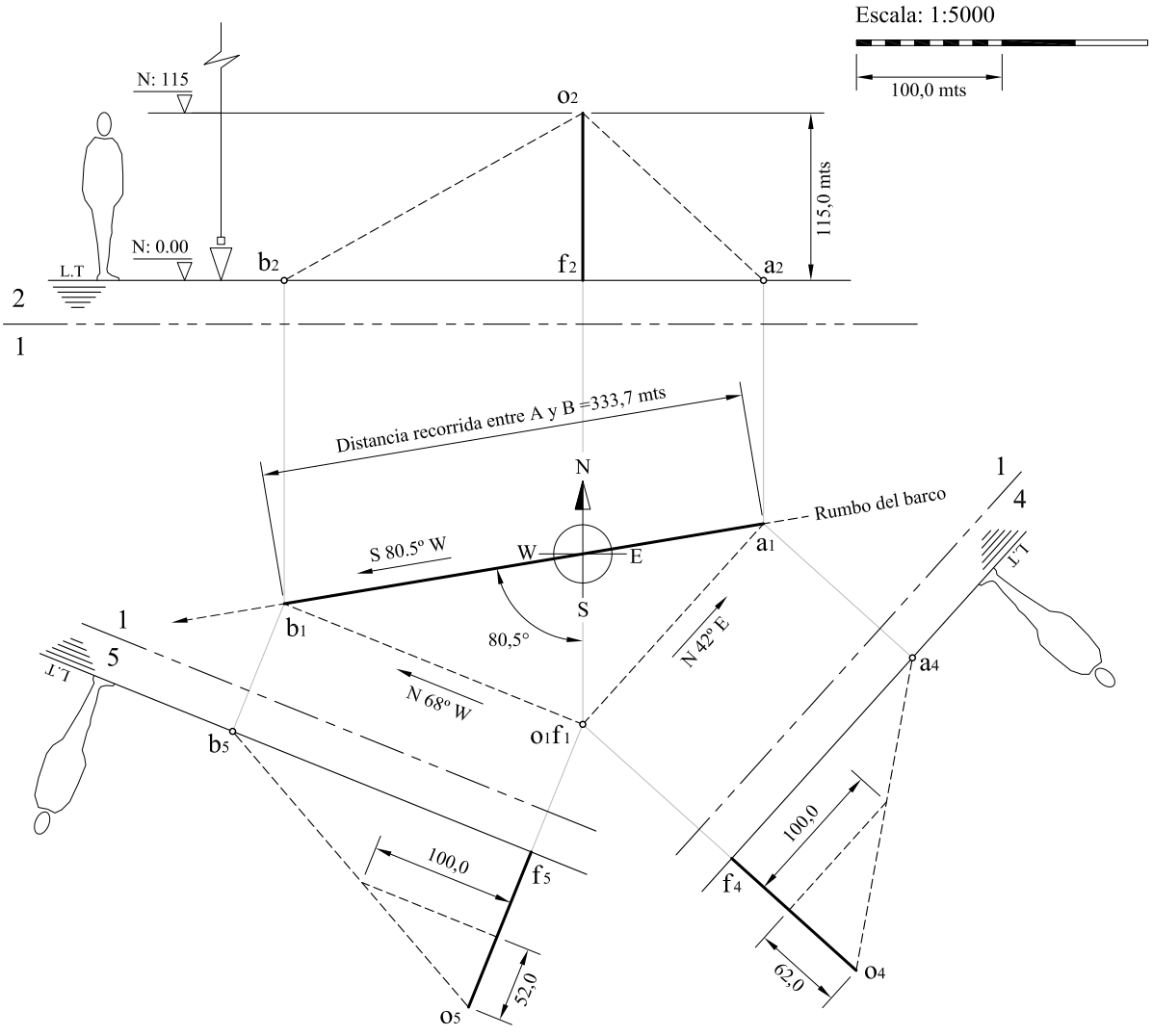
Planteamiento del ejemplo 3 – Sistema DIN
Figura 5.19

Se trazan las visuales desde o_4 y o_5 hasta que intercepten su respectiva línea de tierra, de esta manera, se define la posición del barco en los instantes a_4 y b_5; luego se relacionan estos últimos puntos hacia la vista superior, desde a_4 hasta el rumbo N 42º E, y desde b_5 hasta el rumbo N 68º W.

La recta a_1b_1 resultante, representa la distancia real recorrida por el barco, debido a que la misma se considera una recta horizontal, por estar situada en el nivel del mar; finalmente, se especifica el rumbo desde a_1 hasta b_1, siendo este S 80.5º W *(figura 5.20).*

Para calcular la velocidad del barco en nudos, se deben utilizar las variables, distancia y tiempo, así:

$$\left(\frac{333.7\ mts}{35\ seg}\right) x \left(\frac{3600\ seg}{1\ hora}\right) = \left(\frac{1201320\ mts}{35\ hora}\right) = 34323.43\ \frac{mts}{hora} \quad ; \quad \left(\frac{34323.43}{1688}\right) = 20.3\ Nudos$$

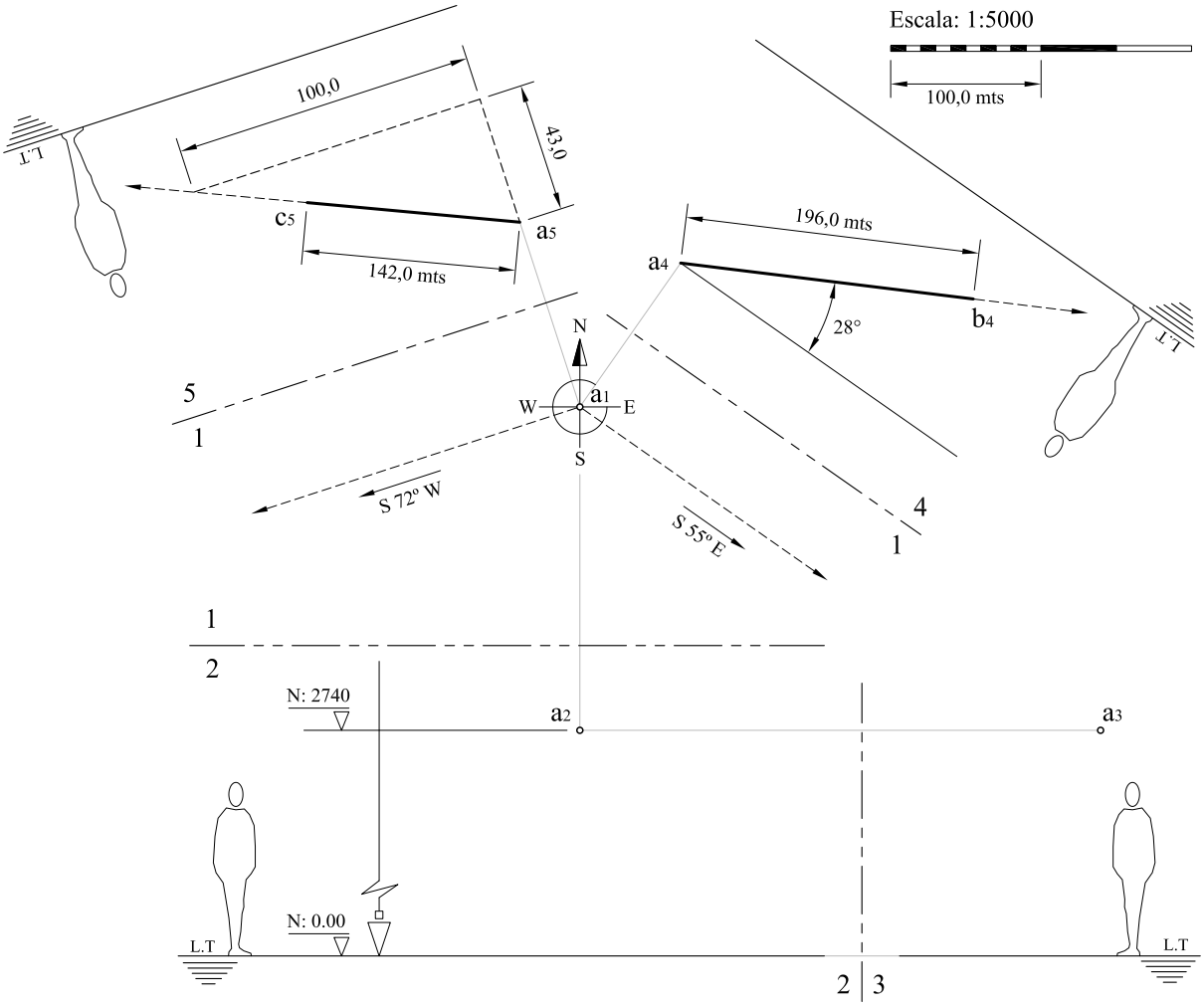


Desarrollo del ejemplo 3 – Sistema DIN
Figura 5.20

5.6.4 Ejemplo 4.

Dos túneles de una mina parten de un punto común A, el cual está situado a 2740 mts sobre el nivel del mar; el túnel AB tiene una longitud de 196 mts, con un rumbo S 55º E, y una pendiente descendente de 28º; el túnel AC posee una longitud de 142 mts, con un rumbo S 72º W, y una pendiente descendente del 43%. ¿Cuál será la longitud, orientación, y tanto por ciento de pendiente, de un nuevo túnel que comunique los extremos B y C? ¿Cuáles son las cotas de elevación de los extremos B y C? Trabajar en sistema ASA, a escala: 1:5000.

Los túneles AB y AC, son rectas en posición oblicua, por el simple hecho de presentar ángulos agudos tanto en el rumbo como en la pendiente; se representa el punto A con su respectiva cota de elevación en la vista frontal, y en la vista superior se trazan los rumbos desde a_1 para cada túnel de manera indefinida; después, se plantean dos vistas de alzada de tal forma, que los ejes de pliegue sean paralelos a cada rumbo. Posteriormente, se dibuja la L.T en las vistas de alzada, y se dibuja un triángulo rectángulo para la recta AC de 43%, y se mide con un transportador el ángulo descendente de 28º para la recta AB; finalmente, se miden las longitudes reales sobre las hipotenusas *(figura 5.21).*



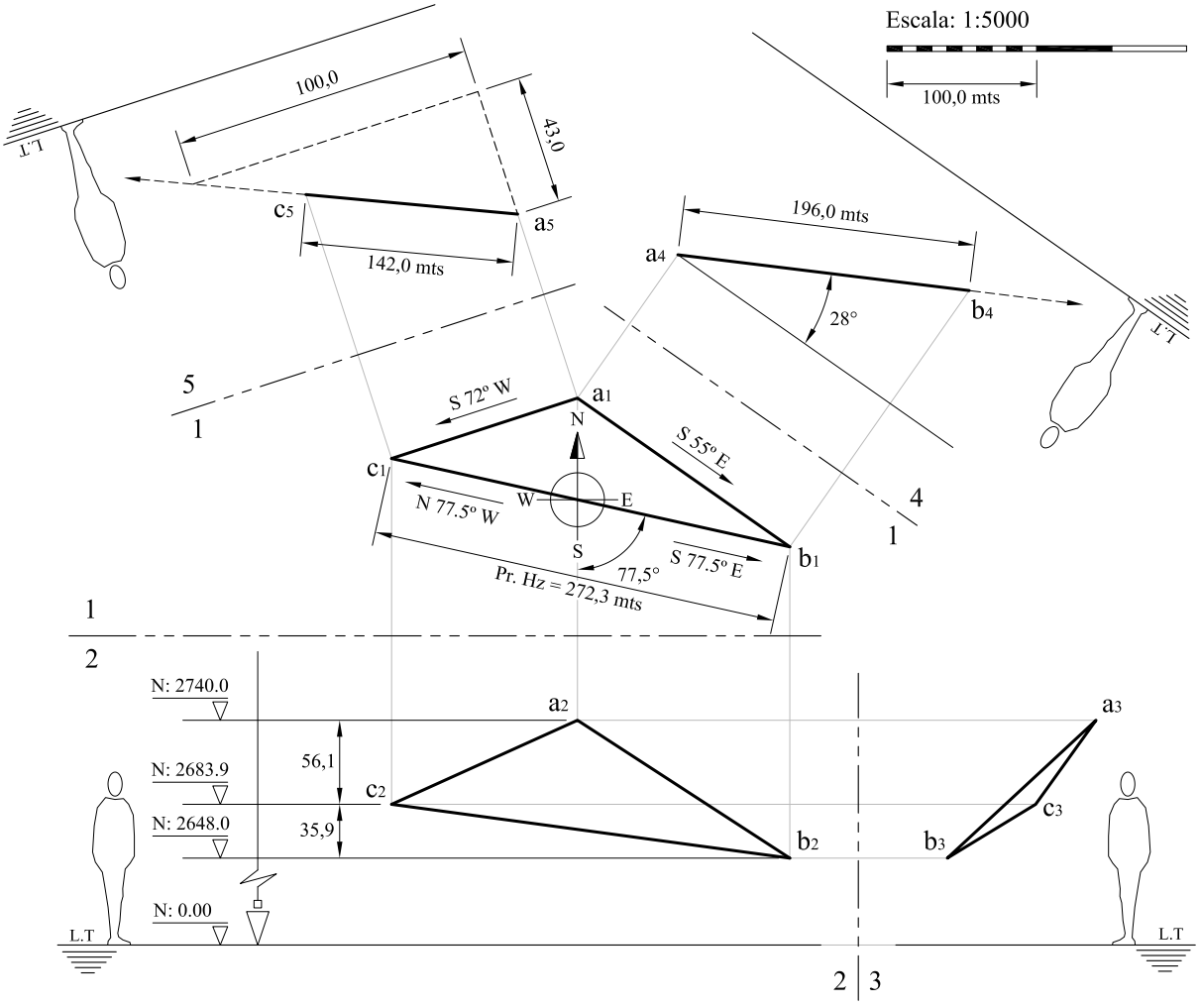
Planteamiento del ejemplo 4 – Sistema ASA
Figura 5.21

Las longitudes reales definen la localización de los puntos b_4 y c_5 en las vistas de alzada, luego, se relacionan dichos puntos hacia la vista superior hasta que intercepten los rumbos correspondientes para cada recta; y se completan las proyecciones hacia las vistas, frontal y lateral derecha. Las cotas de elevación de los extremos B y C, se leen en la vista frontal; y en el plano superior de proyección se aprecia el rumbo S 77.5º E o N 77.5º W del túnel BC *(figura 5.22)*.

Para evitar cruces indeseables de las vistas, se procede a calcular la longitud y la pendiente de la recta BC, mediante la aplicación del teorema de Pitágoras, y la función tangente, así:

$$BC = \sqrt{(35.9)^2 + (272.3)^2} \;,\; BC = \sqrt{1288.8 + 74147.3} \;,\; BC = \sqrt{75436.1} \;,\; BC = 274.65 \text{ mts}$$

$$Tag\ \beta = \frac{35.9}{272.3} \;,\; Tag\ \beta = 0.13184 \;,\; \beta = Tag^{-1}\ x\ 0.13184 \;,\; \beta = 7º\ 30' \text{, Pendiente } BC = 13.18\ \%$$



Desarrollo del ejemplo 4 – Sistema ASA
Figura 5.22

5.7 Ejercicios.

5.7.1 Ejercicio 1.

Tres tubos que parten desde los puntos A, B, y C respectivamente, convergen en un punto X; el punto A se localiza exactamente hacia el Este de X, y presenta una pendiente descendente del 47 % hasta X; El punto B se localiza exactamente hacia el Norte, y posee una pendiente descendente del 56 % hacia X, el tubo BX posee una longitud real de 90 mts; desde el extremo X hacia el punto C se presenta un rumbo N 52º W, y una pendiente ascendente del 35%; además, el tubo CX posee una proyección horizontal o distancia topográfica de 58 mts; el punto A posee una cota de elevación de 2315 mts sobre el nivel del mar. Con esta información determine: la longitud del tubo AX, y las cotas de elevación de los puntos B, C, y X; calcule el ángulo de pendiente en grados sexagesimales de los tres tubos.

Trabajar en sistema ASA, a escala: 1: 1250. Utilice un formato de 1/4 de pliego.

5.7.2 Ejercicio 2.

Desde un punto O situado a 1780 mts sobre el nivel del mar, se construye una tubería hacia un punto X con un rumbo S 38º E, hasta alcanzar una cota de elevación de 1920 mts sobre el nivel del mar; desde el extremo X se construye un tubo hacia el Oriente, conservando una pendiente descendente del 38 % hasta llegar a un extremo Y, el tubo XY posee una longitud de 285 mts; desde el extremo Y parte un tubo hasta el punto Z con un rumbo N 48º W, y una pendiente ascendente del 26 %; el extremo Z está situado 34.9 mts al Sur del extremo O. ¿Cuál será la longitud, el rumbo y la pendiente de un nuevo tubo que comunique los extremos O y Z? ¿Cuál es la longitud de los tubos OX y YZ? ¿Cuáles son las cotas de elevación sobre el nivel del mar de los extremos Y, y Z?

Trabajar en sistema DIN, a escala: 1: 5000. Utilice un formato de 1/4 de pliego.

5.7.3 Ejercicio 3.

Desde una torre de control situada 70 mts por encima de la pista de aterrizaje, se observa un avión con rumbo N 42º E, y una pendiente descendente del 11 %; al cabo de 3.3 segundos se visualiza el avión desde la misma torre con un rumbo N 16º W, y una pendiente descendente del 16 %; en ese instante el avión despega, y 2.2 segundos después, con un rumbo N 50º W, permite ver al avión a la misma altura de la torre de control. Considerando que el avión mantiene su rumbo constante, determine:

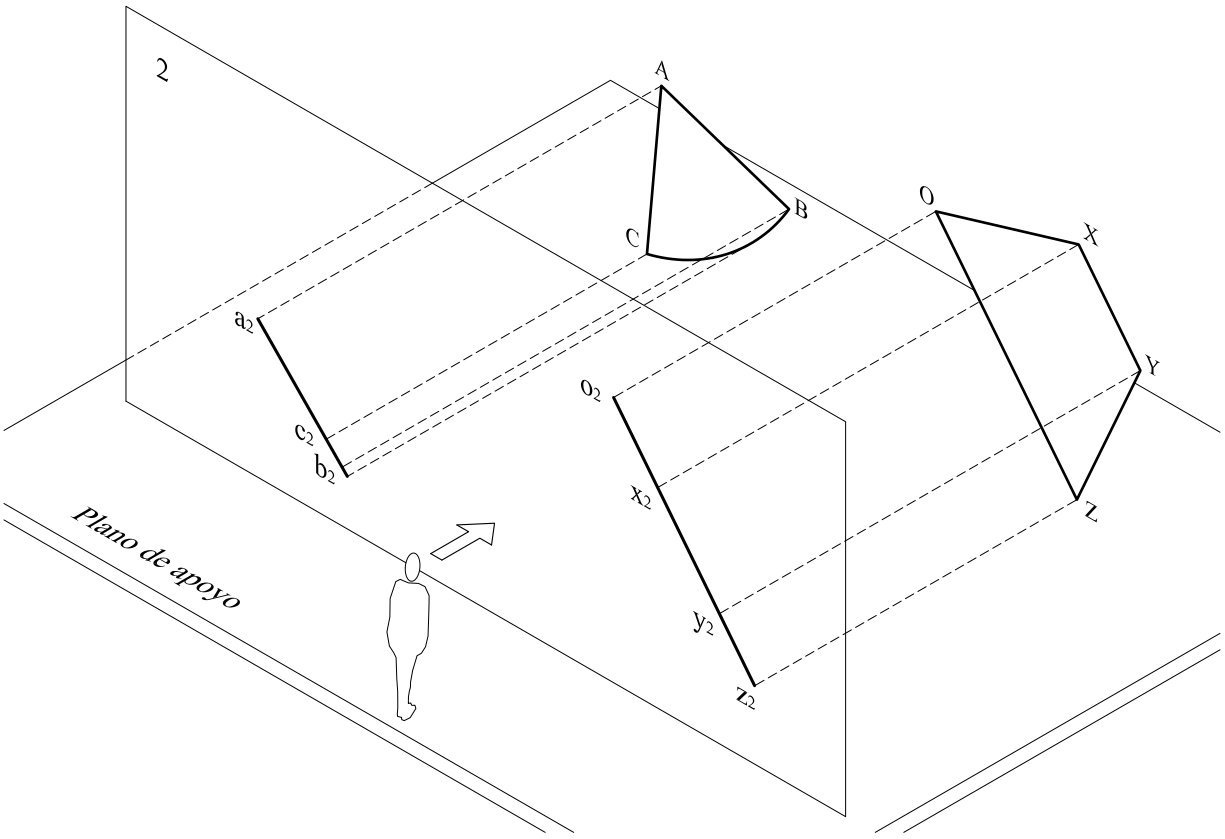
- El rumbo del avión.
- Distancia recorrida por el avión entre la 1^{ra} y 2^{da} observación.
- Distancia recorrida por el avión entre la 2^{da} y 3^{ra} observación.
- Pendiente de despegue del avión, expresado en grados sexagesimales y porcentaje.
- Velocidad del avión entre la 1^{ra} y 2^{da} observación.
- Velocidad del avión entre la 2^{da} y 3^{ra} observación.

Trabajar en sistema ASA, a escala: 1: 5000. Utilice un formato de 1/4 de pliego.

6.0 El plano en el espacio

6.0 Definición del plano

Un plano se define como una superficie limitada por un contorno de líneas rectas o curvas, que al estar perpendicular a un plano de proyección, este se proyecta como una línea recta o filo *(figura 6.1).*



Ejemplos de planos
Figura 6.1

Al igual que las rectas, los planos se consideran coplanares, es decir, se pueden extender más allá de sus bordes con el objeto de interceptar otros elementos geométricos; los planos representan elementos superficiales tales como: muros, faldones de cubierta, láminas, formaletas, estratos, niveles, terrazas, taludes, pisos, etc.

Un plano puede contener infinitas rectas, y estas a su vez, contener infinitos puntos; por eso, un plano se puede definir también, como la generación de una superficie producida por el desplazamiento de una recta en una dirección rectilínea, siendo esta dirección no paralela a la recta generatriz.

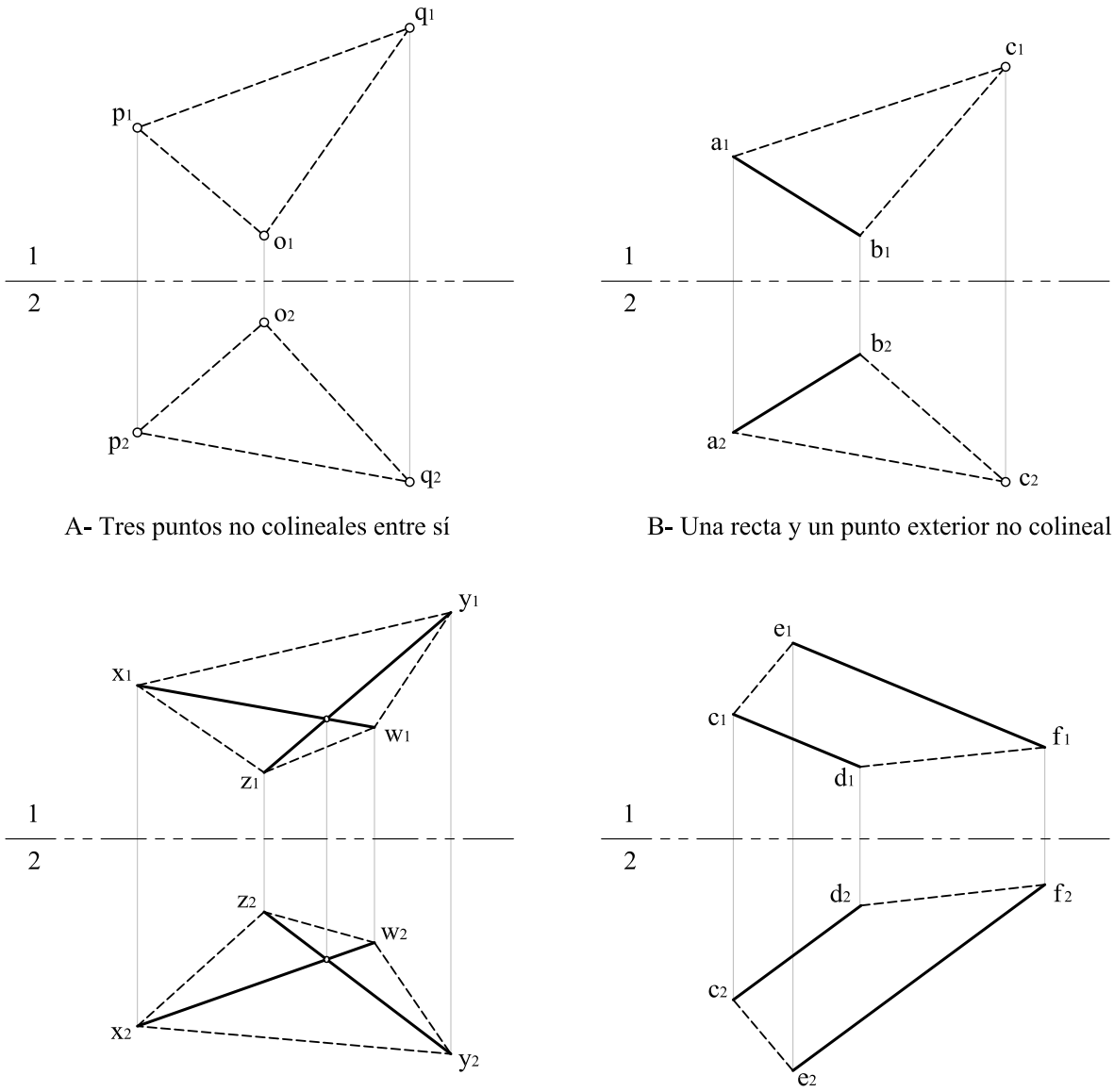
Las propiedades más representativas en los planos, consisten en determinar la verdadera forma o contorno del mismo, el área, la longitud de los lados, el perímetro, la orientación o rumbo del plano, el ángulo de inclinación respecto al plano de apoyo, los ángulos internos de los vértices, los momentos de inercia, el centro geométrico, etc.

6.1 Determinación del plano.

Existen cuatro condiciones mínimas para determinar y representar un plano en el espacio:

a- Tres puntos no colineales entre sí.
b- Una línea recta y un punto exterior no colineal.
c- Dos rectas que se interceptan entre sí.
d- Dos rectas paralelas entre sí.

Estos elementos en sus propias circunstancias, permiten definir un plano en el espacio *(figura 6.2)*.

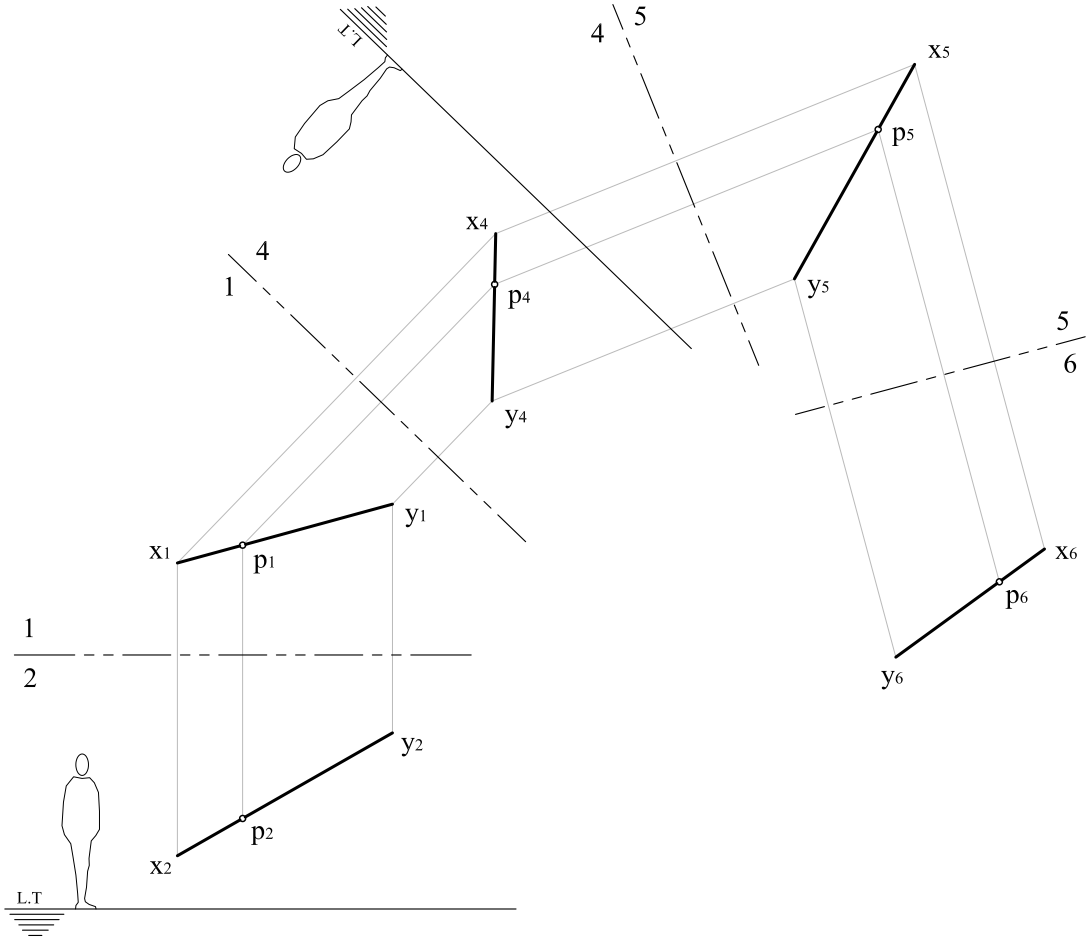


Determinación de un plano en el espacio
Figura 6.2

Para los casos (a) y (b), se debe tener en cuenta la aplicación de la siguiente regla:

Regla 8: Un punto es colineal a una recta, cuando el punto pertenece a la recta, y este a su vez, estar situado en una misma línea de relación en todas las vistas.

Un punto cualquiera que esté contenido en una recta, sólo pertenece a la misma; por lo tanto, esta propiedad se cumple en cualquier vista que se construya *(figura 6.3)*.

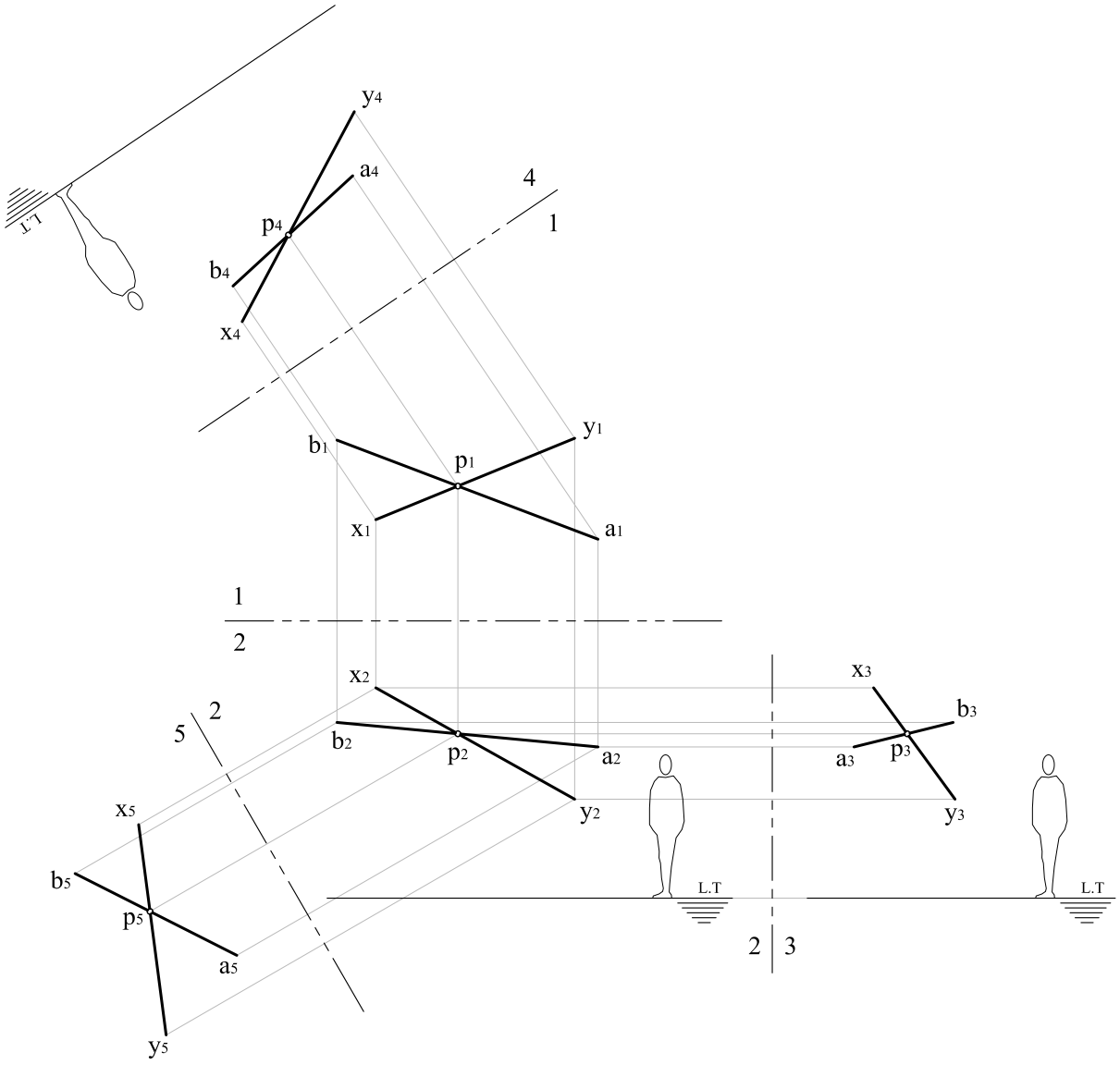


Un punto colineal a una recta
Figura 6.3

Para el caso (c), se aplica la siguiente regla:

Regla 9: Dos rectas se interceptan entre sí, cuando el punto de intersección común a ambas rectas se encuentra en una sola línea de relación en todas las vistas.

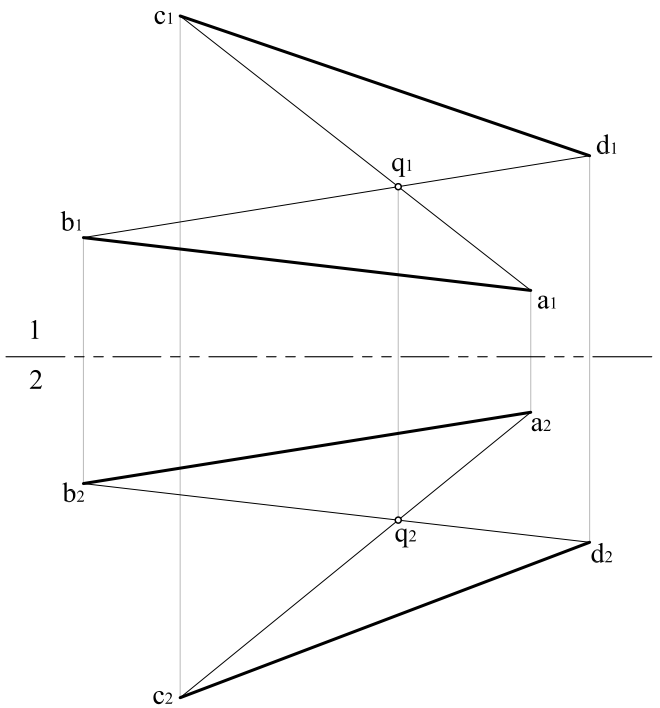
Esta regla es consecuente con la anterior, debido a que el punto de intersección es un punto común que pertenece a ambas rectas, el cual se encuentra localizado en una misma línea de relación; esto es perceptible en todas las vistas que se planteen *(figura 6.4)*.



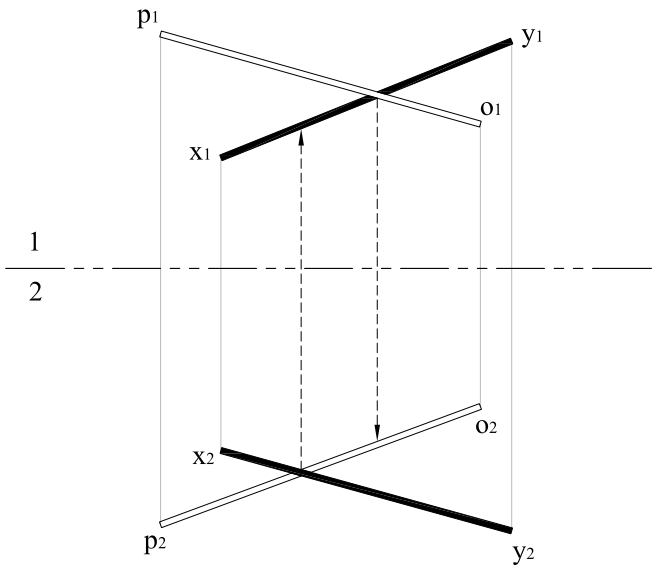
Dos rectas que se interceptan entre sí
Figura 6.4

Si se requiere determinar el punto de intersección entre 2 rectas propuestas, generalmente se prolongan hasta que se corten, pero si este punto se encuentra muy retirado o sobrepasa los límites del dibujo, simplemente se unen sus extremos mediante dos diagonales; si las diagonales se interceptan entre sí, y se cumple la regla anteriormente descrita, significa que las dos rectas planteadas se cortan en un solo punto, y por consiguiente, se determina un plano *(figura 6.5)*.

En cambio, si el punto de intersección entre dos rectas no corresponde en una misma línea de relación, quiere decir, que las rectas se cruzan en el espacio, y por lo tanto, no se definiría un plano; El cruce de dos rectas no paralelas representa una situación muy frecuente en Ingeniería, debido a que se requiere determinar la distancia más corta que existe entre ellas *(figura 6.6)*.



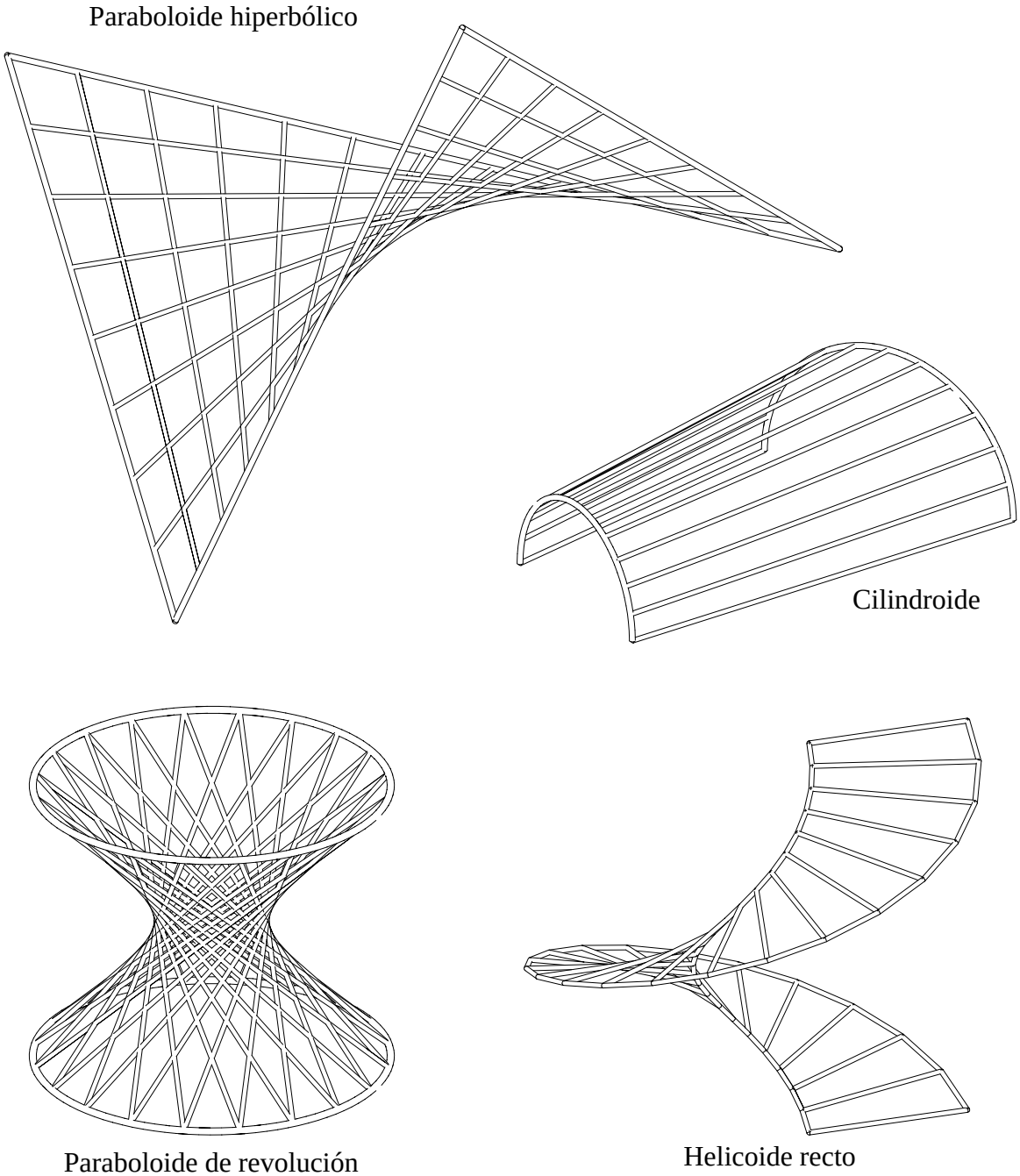
Comprobación de dos rectas que se interceptan en un punto muy retirado
Figura 6.5



Nota: Para visualizar dos rectas que se cruzan, se recomienda aplicar los criterios de visibilidad vistos en el tercer capítulo (5ta norma de visibilidad).

Dos rectas que se cruzan en el espacio
Figura 6.6

Cuando 2 rectas se cruzan, definen unas superficies interesantes denominadas “superficies alabeadas”, las cuales se generan por el desplazamiento de dos rectas consecutivas; la particularidad de estas, es que no son desarrollables, debido a la geometría de curvatura compleja que adoptan. Son estructuras muy empleadas en Arquitectura e Ingeniería, por su rigidez, esbeltez, y estética que proporcionan sus formas; como ejemplos se pueden encontrar, el paraboloide hiperbólico, el cilindroide, el paraboloide de revolución, el conoide, el helicoide recto, el cono alabeado, etc *(figura 6.7)*.

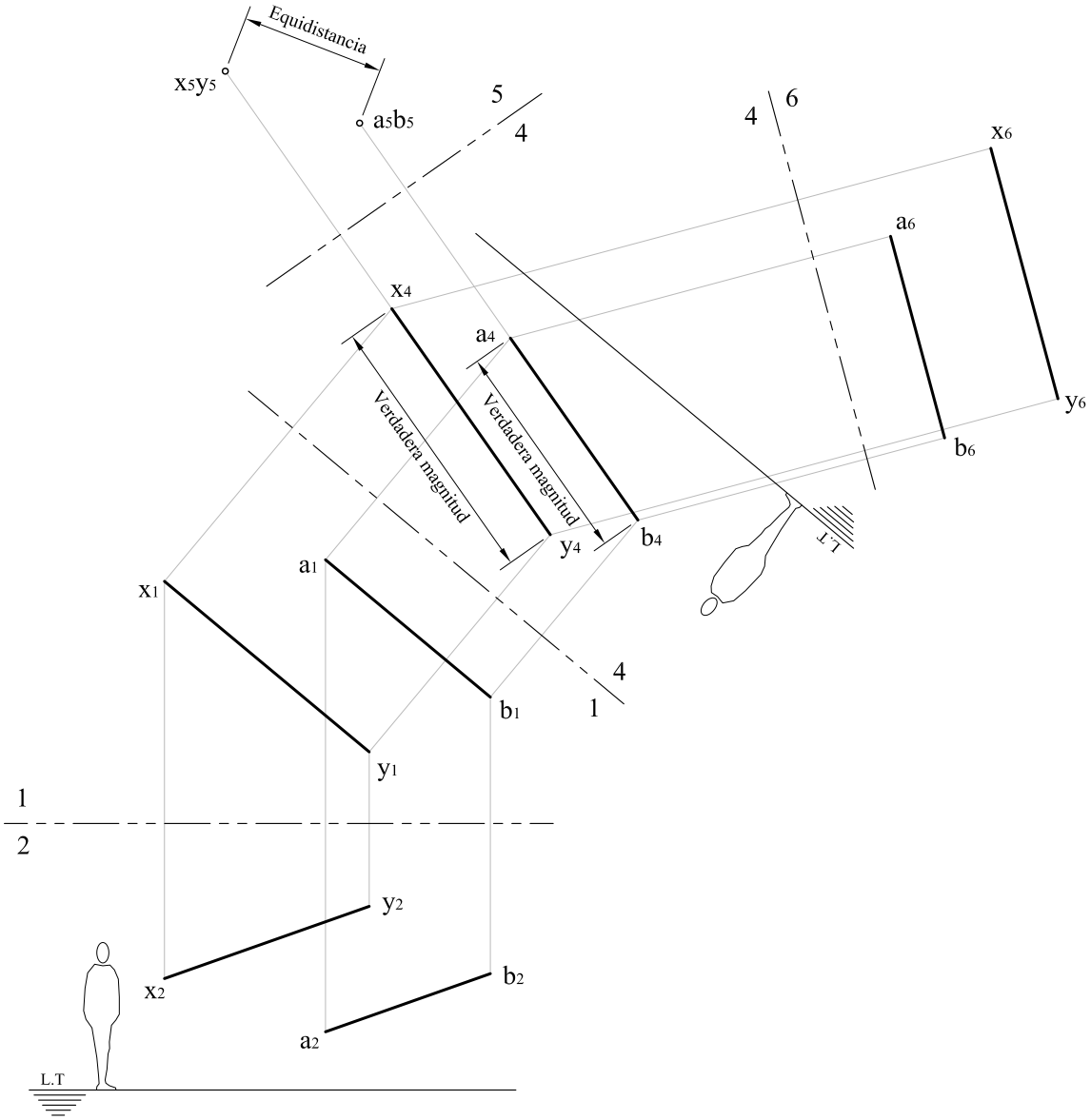


Ejemplos de superficies alabeadas, definidas por el cruce de dos rectas consecutivas
Figura 6.7

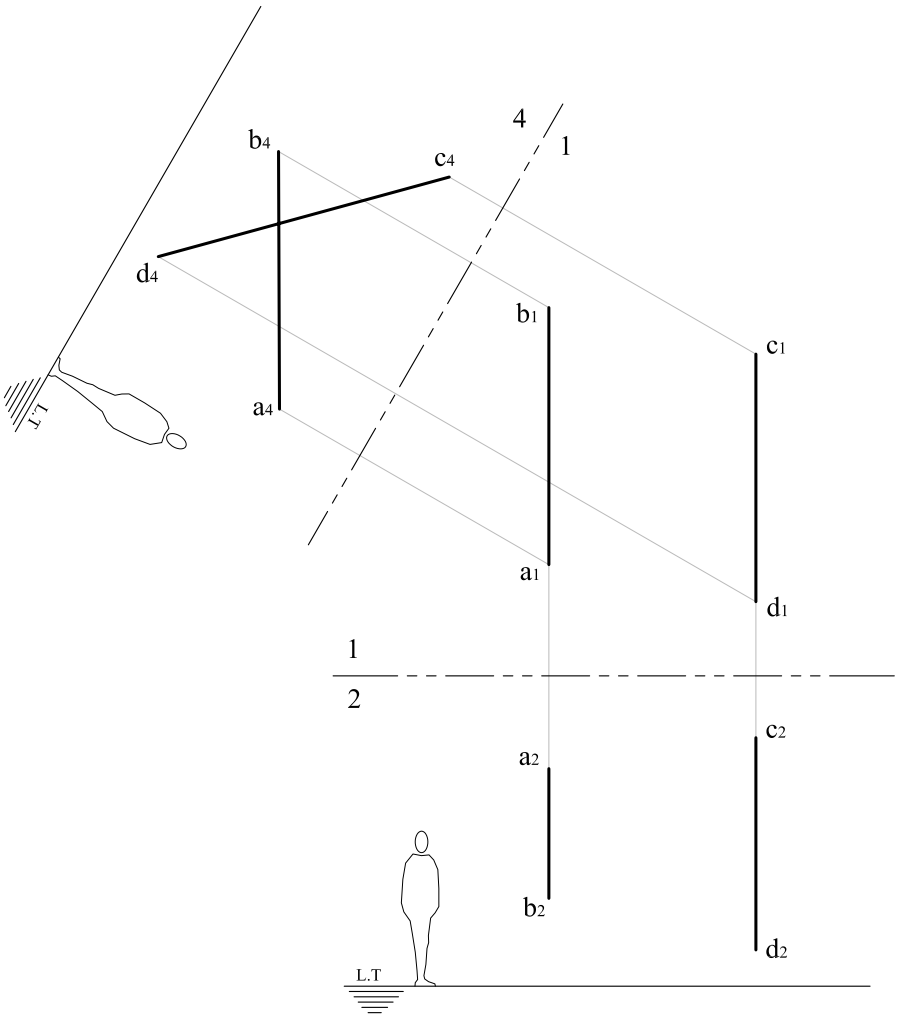
Para el caso (d), cuando dos rectas no se interceptan, ni se cruzan, quiere decir que son paralelas entre sí; en este caso, se tiene en cuenta la siguiente regla:

Regla 10: Dos rectas son paralelas entre sí, cuando estas se proyectan paralelas en todas las vistas.

Este comportamiento es apreciable en cualquier vista que se construya *(figura 6.8)*; sin embargo, se recomienda justificar el paralelismo cuando se tienen dos rectas que se cruzan y se proyectan paralelas en dos vistas (por ejemplo, dos rectas de perfil); esto se comprueba con una vista auxiliar cuyos rayos visuales no sean paralelos a las proyecciones dadas, y por consiguiente, verificar si en realidad las rectas son paralelas, o se cruzan *(figura 6.9)*.



Dos rectas paralelas entre sí
Figura 6.8



Rectificación de dos rectas de perfil que se cruzan
Figura 6.9

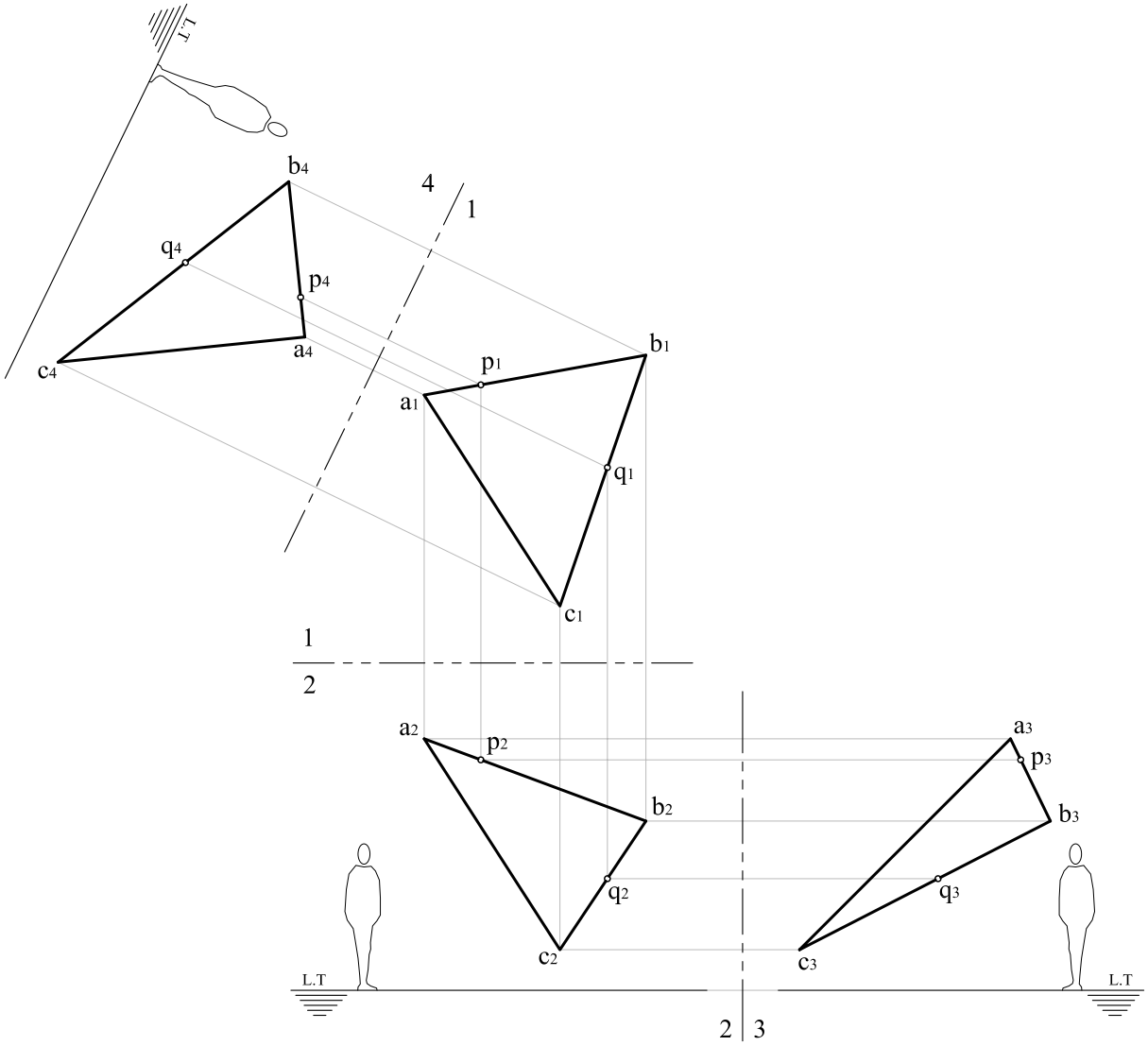
6.2 Situación de elementos geométricos en un plano

En la mayoría de problemas relacionados con los planos, se recurre a la localización de elementos geométricos sobre el mismo, con el fin de facilitar diversos procedimientos constructivos, tales como: la orientación del plano, la vista del plano como filo, proyecciones de planos cortantes auxiliares, etc.

Cuando los elementos geométricos están situados en un mismo plano, se dice que son coplanares; en estas condiciones, se pueden localizar sobre el mismo, puntos, rectas, y planos.

6.2.1 Localización de un punto en el borde de un plano

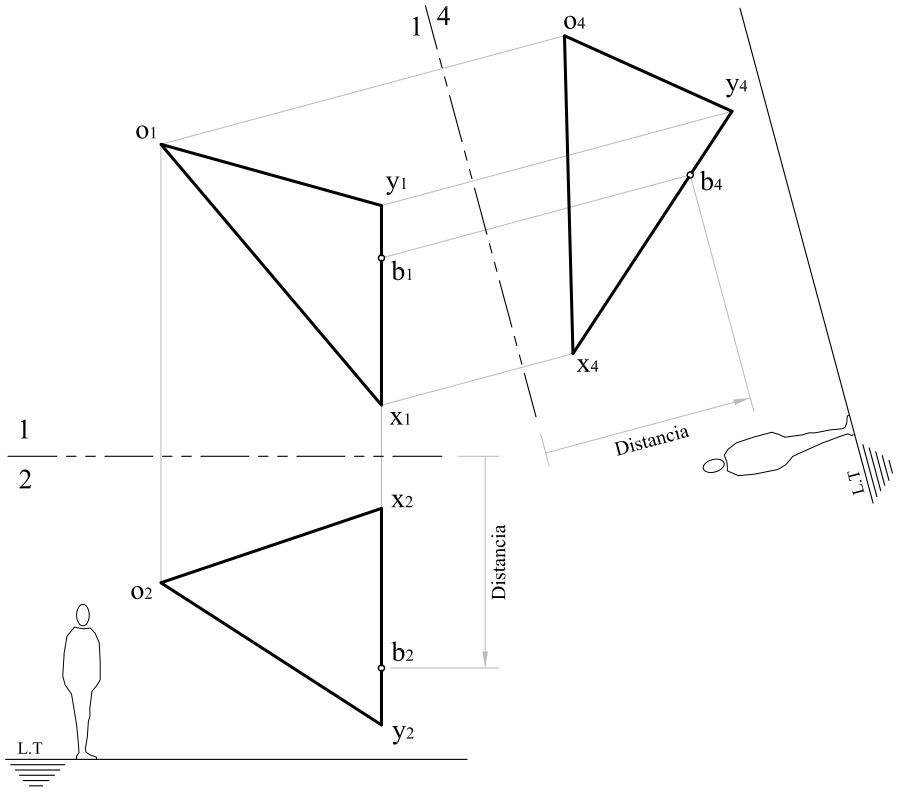
Los vértices representan los extremos de los bordes de un plano, por esta razón, al relacionar dichos vértices en dos vistas adyacentes, es suficiente para comprobar su pertenencia al mismo; de igual forma, si un punto diferente de los extremos que esté contenido en un borde del plano, se localiza sobre una misma línea de relación en todas las vistas, quiere decir, que dicho punto es coplanar al plano de referencia *(figura 6.10)*.



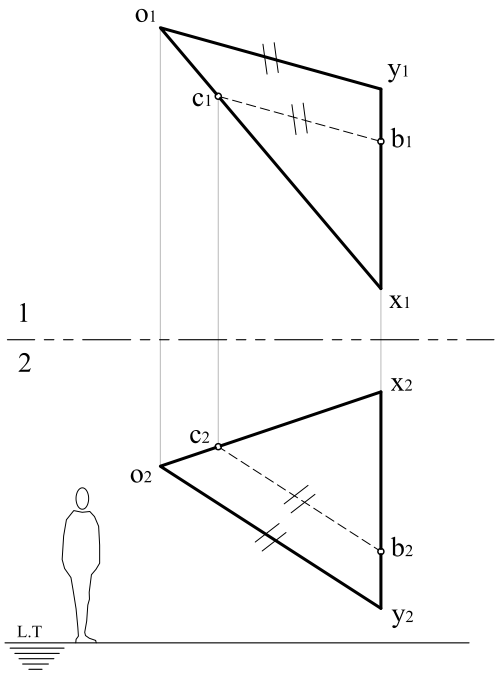
Dos puntos P y Q, coplanares al plano ABC
Figura 6.10

Si el punto está localizado sobre un borde que coincide en una misma línea de relación, como ocurre en una recta de perfil, se debe construir una vista auxiliar, cuyos rayos visuales no sean paralelos a las proyecciones dadas; de esta manera, al trasladar la distancia del punto en la vista anexa entre sí, queda localizado el punto sobre la recta de perfil, y por consiguiente, se completan las vistas *(figura 6.11)*.

Existe otra forma de localizar el punto sobre un borde de perfil utilizando las 2 vistas principales; esta consiste en aplicar la regla del paralelismo entre rectas. Supóngase un plano OXY, donde el borde XY es una recta de perfil, se plantea un punto b_1 contenido en la recta x_1y_1, y se requiere conocer la ubicación exacta del punto B en la vista frontal. Simplemente se traza una recta auxiliar que pase por el punto b_1 y sea paralela a la recta o_1y_1 del plano, la paralela que pasa por b_1 determina el punto c_1, el cual pertenece a la recta o_1x_1; luego, se relaciona el punto c_1 hacia la vista frontal hasta la recta o_2x_2, y desde el punto c_2 se traza la recta paralela a 0_2y_2, determinándose la ubicación exacta del punto b_2 sobre la recta de perfil x_2y_2 *(figura 6.12)*.



Localización de un punto en un borde de perfil, mediante una vista auxiliar
Figura 6.11

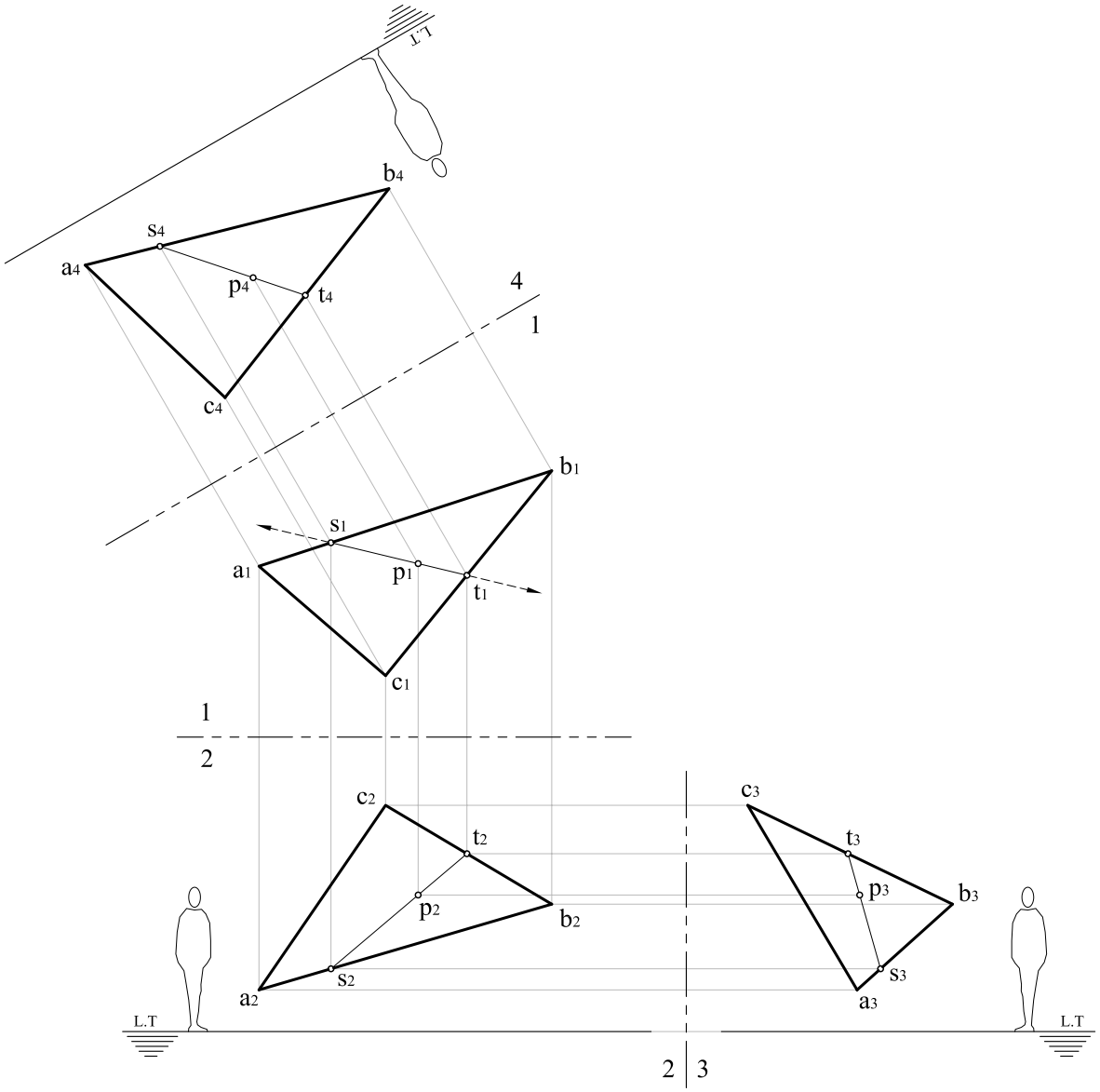


Localización de un punto B en un borde de perfil del plano OXY
Figura 6.12

6.2.2 Localización de un punto en el interior de un plano

Para situar un punto en el interior de un plano, se necesita que dicho punto esté contenido en una recta auxiliar que pertenezca al plano, donde la recta deberá interceptar a los bordes del plano en dos puntos.

Considérese un plano ABC, al cual se le localiza un punto P en el interior del mismo en la proyección superior; y se requiere demostrar la coplanaridad de dicho punto en el plano en las demás vistas. En primer lugar, se traza una recta auxiliar que pase por el punto p_1, la cual intercepta al plano en los puntos s_1 y t_1, donde S Є AB, y T Є BC; luego, se relacionan los puntos S y T en las demás vistas; y al final se relaciona el punto P hasta que intercepte la recta ST. De esta forma, el punto P al pertenecer a la recta ST, será coplanar al plano referenciado *(figura 6.13)*.

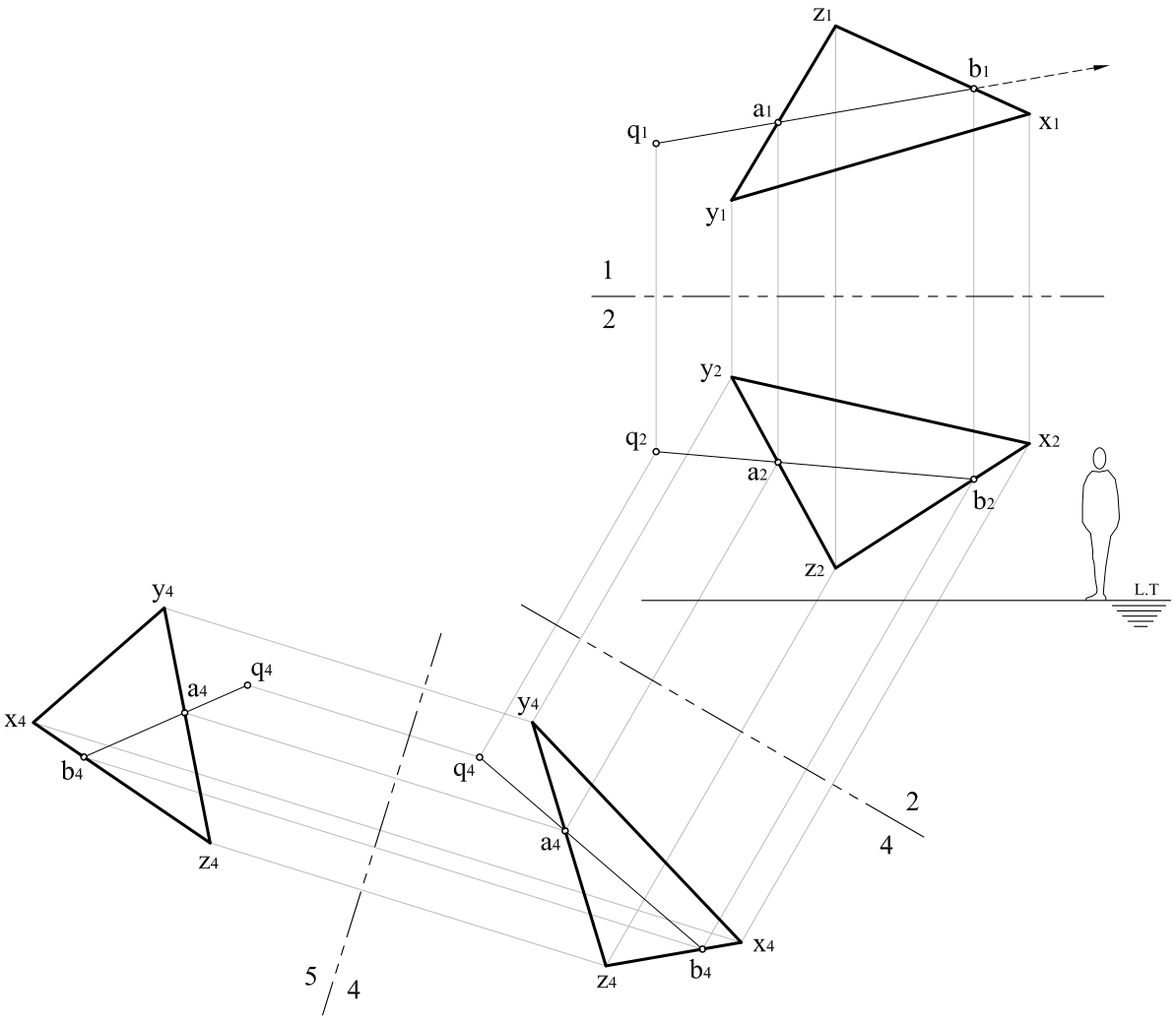


Localización de un punto P en el interior del plano ABC
Figura 6.13

6.2.3 Localización de un punto en el exterior de un plano

Al igual que el anterior caso, un punto exterior a un plano dado, deberá estar situado en una recta auxiliar que sea coplanar al plano, es decir, que dicha recta debe interceptar a dos puntos del plano; de esta forma, se garantiza la pertenencia del punto exterior al plano referenciado.

Supóngase un plano XYZ, y un punto exterior Q situado en la vista superior de forma arbitraria, y se requiere demostrar la pertenencia del punto al plano dado en las demás vistas. Se dibuja una recta que pase por el punto q_1 hasta interceptar los puntos a_1 y b_1 del plano, donde A Є YZ, y B Є XZ, luego, se relacionan los puntos A y B en las demás proyecciones; finalmente, se relaciona el punto Q hasta que intercepte la recta AB. De esta manera, el punto Q al pertenecer a la recta AB, será coplanar al plano mencionado *(figura 6.14)*.

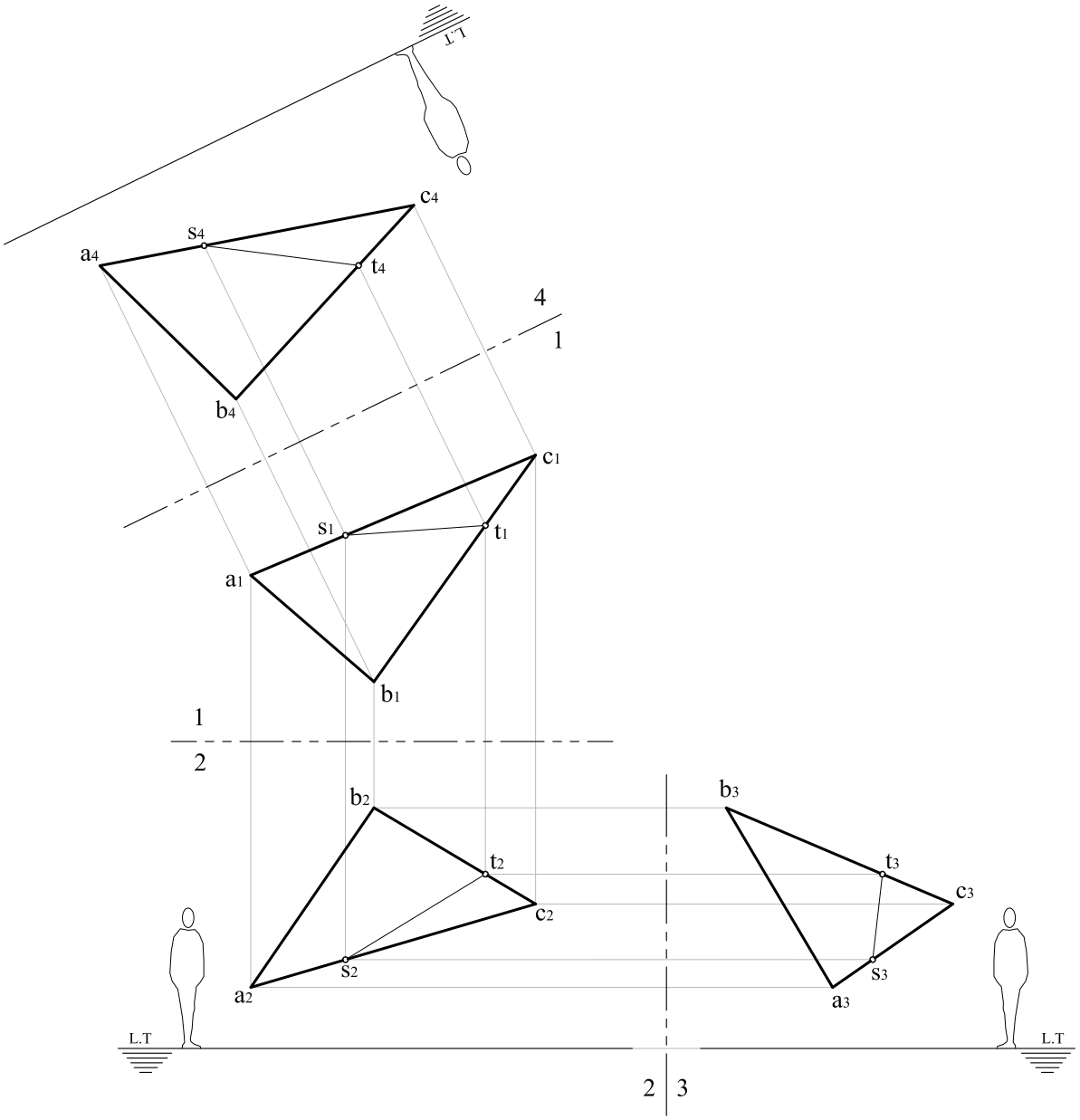


Localización de un punto Q en el exterior del plano XYZ
Figura 6.14

6.2.4 Localización de una recta en el interior de un plano

Los bordes representan las rectas que limitan un plano, por lo tanto, al reconocer cualquier borde que esté debidamente relacionado, es suficiente para comprobar la pertenencia al plano.

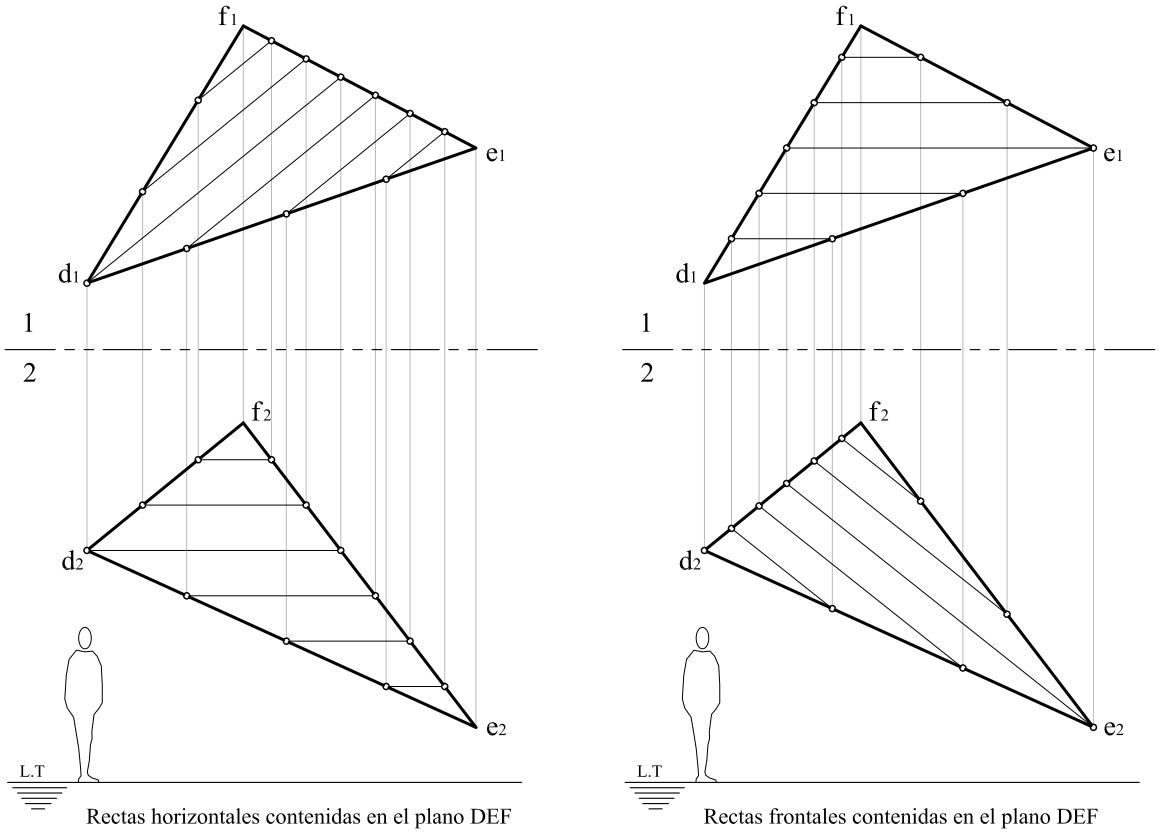
La recta es la distancia más corta que existe entre dos puntos, por lo tanto, al identificar dos puntos que pertenezcan al plano se verifica su coplanaridad. Supóngase un plano ABC, al cual se le identifican dos puntos, S y T, de tal forma que S Є AC, y T Є BC; entonces, la recta ST será coplanar al plano dado; al final se relacionan los extremos S y T en las demás vistas *(figura 6.15)*.



Localización de una recta en el interior de un plano
Figura 6.15

Las rectas más utilizadas para contener en un plano, consisten en las rectas horizontales y frontales, debido a que proyectan su verdadera magnitud en la vistas, superior y frontal , respectivamente; dichas rectas facilitan diversos procesos constructivos, tales como, plantear proyecciones del plano como filo, apreciar la orientación, identificar ejes de revolución, construir rayos perpendiculares al plano, etc.

Si un plano contiene varias rectas horizontales o frontales, estas se proyectarán paralelas entre sí en todas las proyecciones; lo importante es que el lector utilice rectas auxiliares de longitud amplia, para garantizar la precisión en los procedimientos y resultados *(figura 6.16)*.

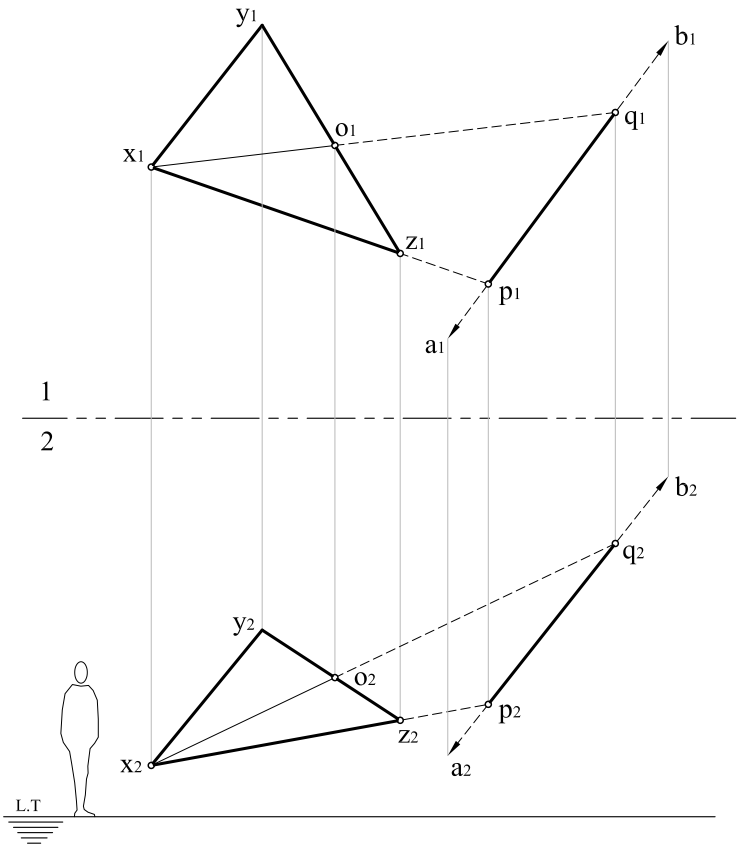


Situación de rectas horizontales y frontales en un plano DEF
Figura 6.16

6.2.5 Localización de una recta exterior en un plano

Para comprobar que una recta exterior a un plano dado sea coplanar al mismo, se necesita que dos puntos de la recta exterior sean colineales a dos rectas respectivas que pertenezcan al plano; las dos rectas pertenecientes al plano pueden ser paralelas o interceptarse entre sí.

Supóngase un plano XYZ, y una recta AB exterior al plano, y se requiere comprobar la coplanaridad de la recta con el plano dado; en primer lugar, se prolonga la recta de borde XZ hasta que intercepte la recta AB en el punto P, luego, se puede utilizar una recta auxiliar contenida en el plano que pase por los puntos O y X, hasta interceptar la recta AB en el punto Q. De esta manera, el punto O Є YZ, y los puntos P y Q pertenecen a la recta AB, siendo las rectas XZ y OX, dos rectas que se interceptan en el vértice X, y a su vez, están contenidas en el plano XYZ *(figura 6.17)*.



Localización de una recta exterior en un plano
Figura 6.17

6.3 Angulo de inclinación de un plano

El ángulo de inclinación de un plano, se refiere al ángulo que forma dicho plano respecto al plano de apoyo; en Minería y Geología se utiliza el término “Buzamiento”, para indicar el ángulo de pendiente que forma un estrato o filón respecto a un nivel horizontal.

Para apreciar este ángulo en su magnitud real, se tiene en cuenta la aplicación del siguiente teorema:

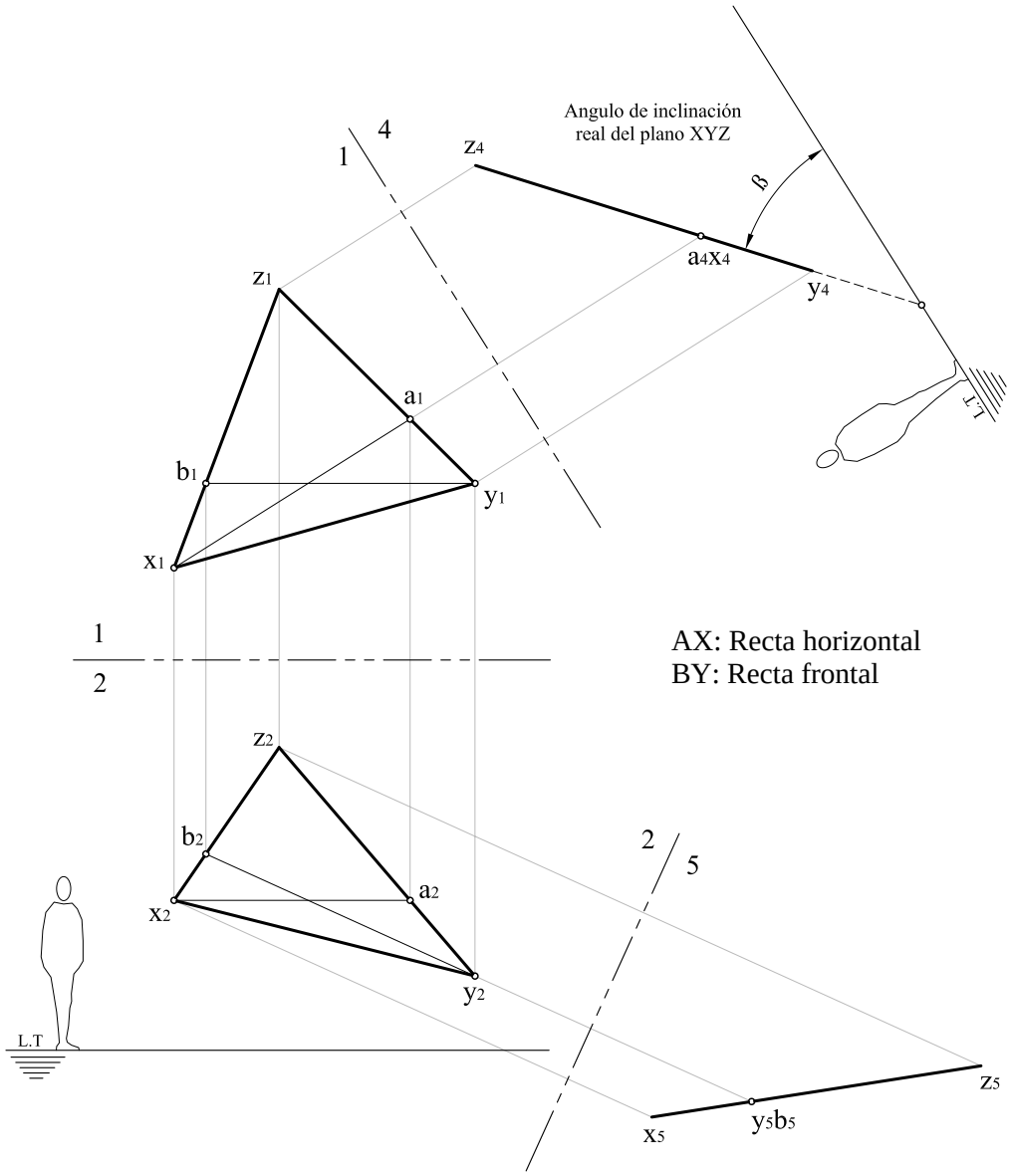
Teorema 6: El ángulo real de inclinación de un plano respecto al plano de apoyo, se visualiza en una vista de alzada donde el plano se proyecta como filo.

Se ha analizado antes, que un plano cuando se encuentra perpendicular a un plano de proyección, este se visualiza como filo; en este caso, se tendrán en cuenta los siguientes teoremas:

Teorema 7: Todo plano perpendicular a un plano de proyección se proyecta como filo, sí y sólo sí, el plano de proyección es perpendicular a una recta contenida en el plano, y que se proyecta en verdadera magnitud.

Teorema 8: Toda vista adyacente a un plano proyectado en verdadera forma, proyectará el plano como una línea recta o filo.

Por conveniencia, se utilizan rectas horizontales y frontales para facilitar la apreciación del plano como filo; pues, de acuerdo al teorema 8, sólo es necesario identificar una sola recta proyectada en verdadera magnitud perteneciente al plano XYZ *(figura 6.18).*



Visualización de un plano XYZ como filo
Figura 6.18

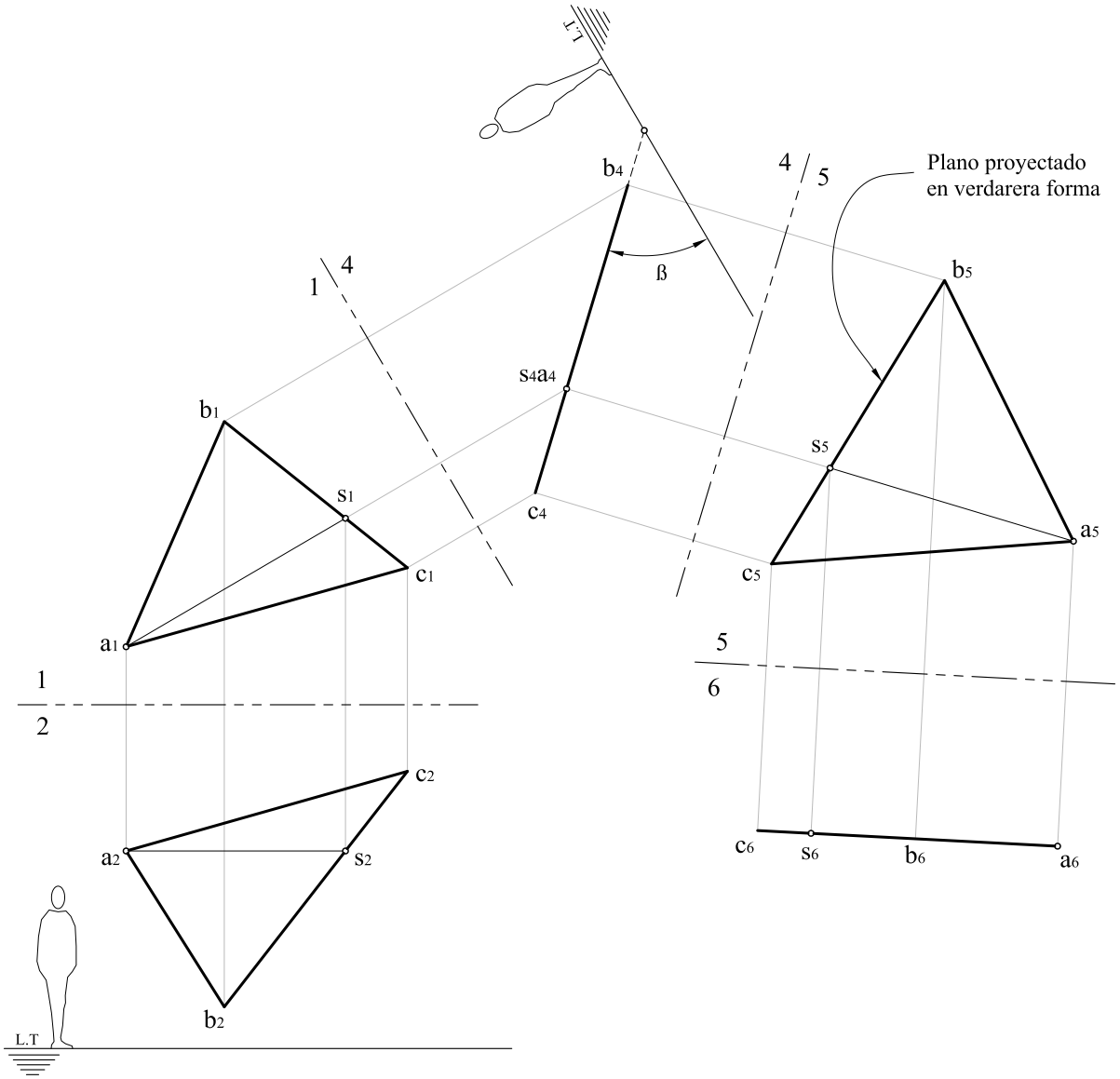
En la vista inclinada 5 se aprecia el plano XYZ como filo, pero como la línea de tierra no es perceptible en este tipo de vistas, no es posible leer el ángulo de inclinación del plano. Sólo en las vistas de alzada donde el plano se proyecta como filo, se justifica la lectura del ángulo de inclinación de dicho plano respecto a la línea de tierra.

6.4 Verdadera forma de un plano

Cuando los rayos visuales del observador son perpendiculares a un plano, este podrá apreciar el plano en verdadera forma; es decir, podrá percibir el contorno, para así, determinar propiedades de superficie inherentes, tales como, área, perímetro, magnitudes de ángulos internos, momentos de inercia, etc.

Teorema 9: Todo plano de proyección paralelo a un plano que se proyecta como filo, proyectará la verdadera forma del plano.

Sencillamente se plantea un eje de pliegue paralelo a la proyección del plano como filo, para visualizar la verdadera forma del plano *(figura 6.19)*.



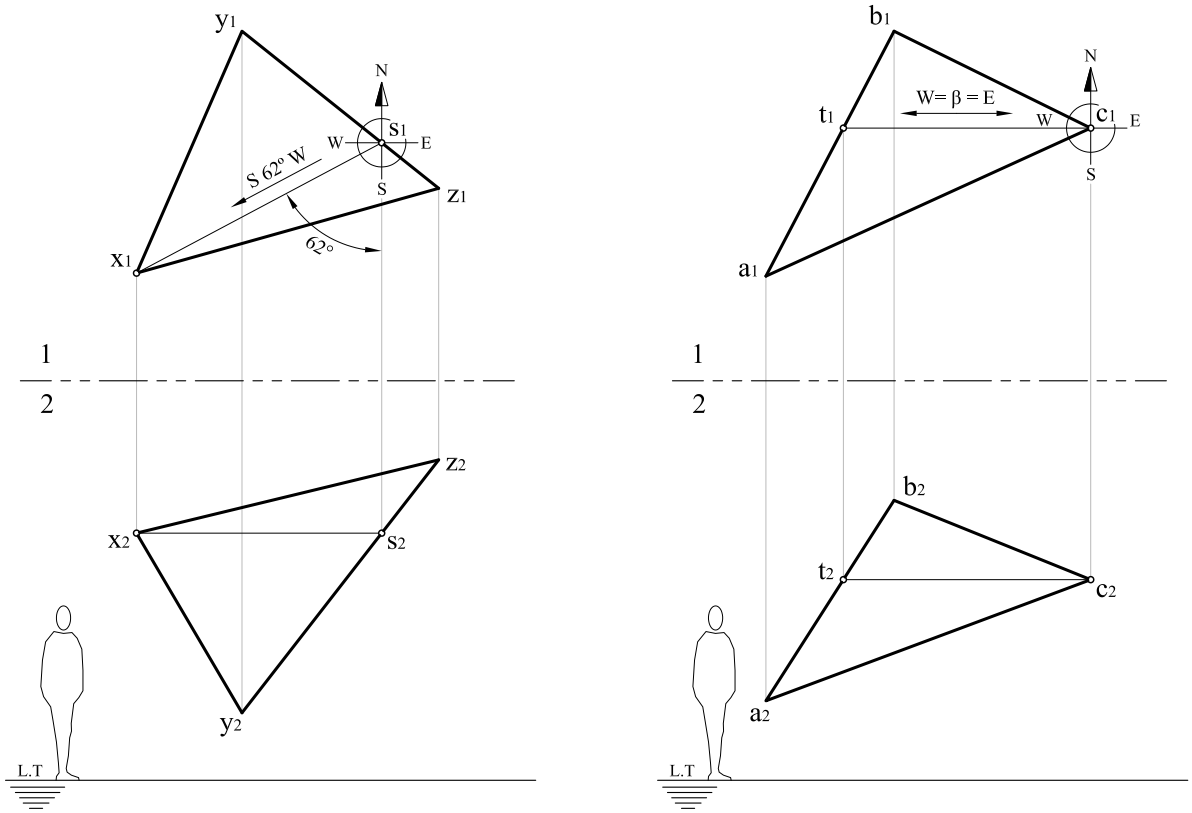
Verdadera forma del plano ABC
Figura 6.19

6.5 Orientación o rumbo de un plano

La orientación o rumbo de un plano, corresponde al ángulo formado entre una recta paralela al plano horizontal contenida en el plano y la línea Norte–Sur de referencia; dicho ángulo se aprecia siempre en la vista superior.

Este concepto es muy utilizado en el campo de la Minería y Geología, para indicar la dirección de la veta del estrato o filón de la corteza terrestre que se desea explotar.

Tal como se refirió respecto a la orientación o rumbo de una recta, se tiene en cuenta la dirección que apunta la recta auxiliar contenida en el plano, proyectada en verdadera magnitud en la vista superior, con relación a los ejes cardinales; donde el valor del ángulo está comprendido entre 0º y 90º, al final, se especifica el rumbo sobre una flecha paralela a dicha orientación *(figura 6.20)*.



Ejemplos de orientación de los planos XYZ y ABC
Figura 6.20

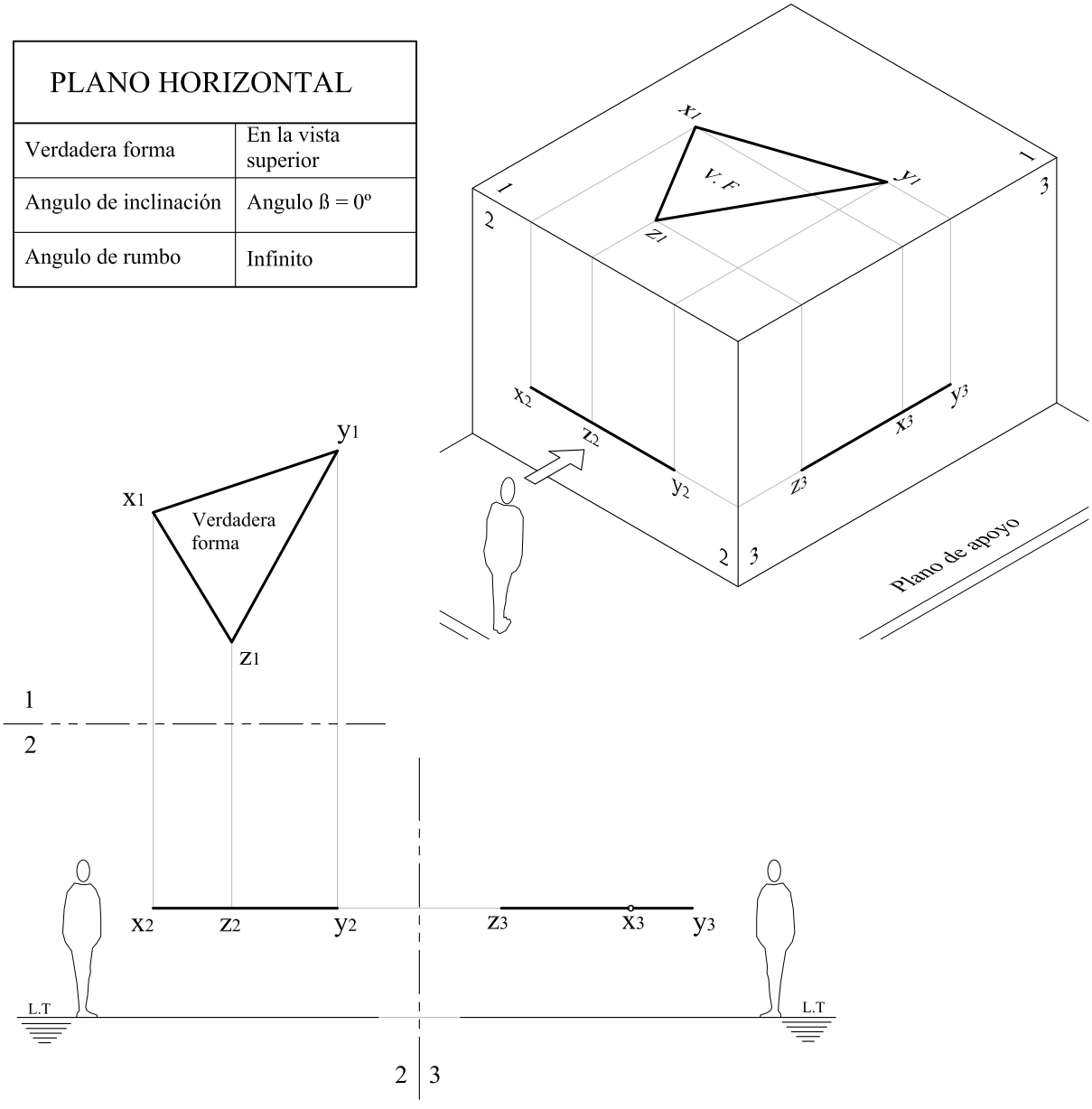
6.6 Clasificación de los planos

La clasificación de los planos, se fundamenta en el comportamiento que posee un plano respecto a los planos principales de la caja de proyección, los cuales se resumen en siete posiciones especiales. Con el propósito de incentivar la lectura espacial, se recomienda que el lector realice comparaciones y analogías de dicha clasificación, tanto de los planos como de las rectas, con ejemplos de la realidad; de esta forma, se adquiere destreza para visualizar dichos elementos geométricos en el espacio.

6.6.1 Plano horizontal

Es todo plano que se encuentra paralelo al plano superior de proyección, siendo perpendicular a los planos de alzada; no presenta ángulo de inclinación, porque todos los puntos del plano se encuentran a la misma altura; su verdadera forma se proyecta en la vista superior *(figura 6.21).*

PLANO HORIZONTAL	
Verdadera forma	En la vista superior
Angulo de inclinación	Angulo ß = 0º
Angulo de rumbo	Infinito

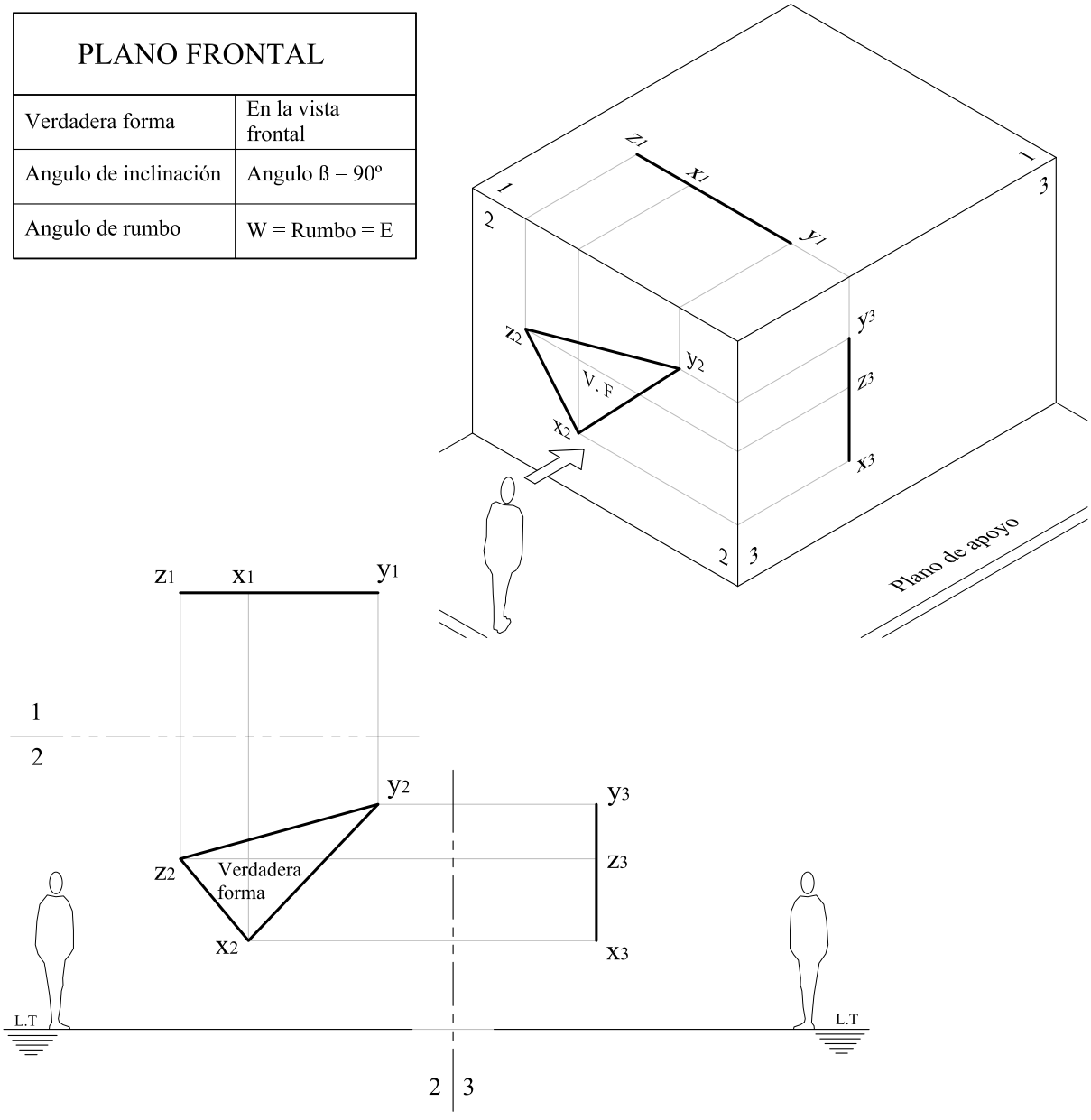


Plano horizontal
Figura 6.21

6.6.2 Plano frontal

Es todo plano que se encuentra paralelo al plano frontal de proyección, siendo perpendicular a los planos adyacentes a la vista frontal; su ángulo de inclinación es de 90º, y la verdadera forma del mismo se percibe en el plano frontal de proyección *(figura 6.22)*.

PLANO FRONTAL	
Verdadera forma	En la vista frontal
Angulo de inclinación	Angulo ß = 90º
Angulo de rumbo	W = Rumbo = E

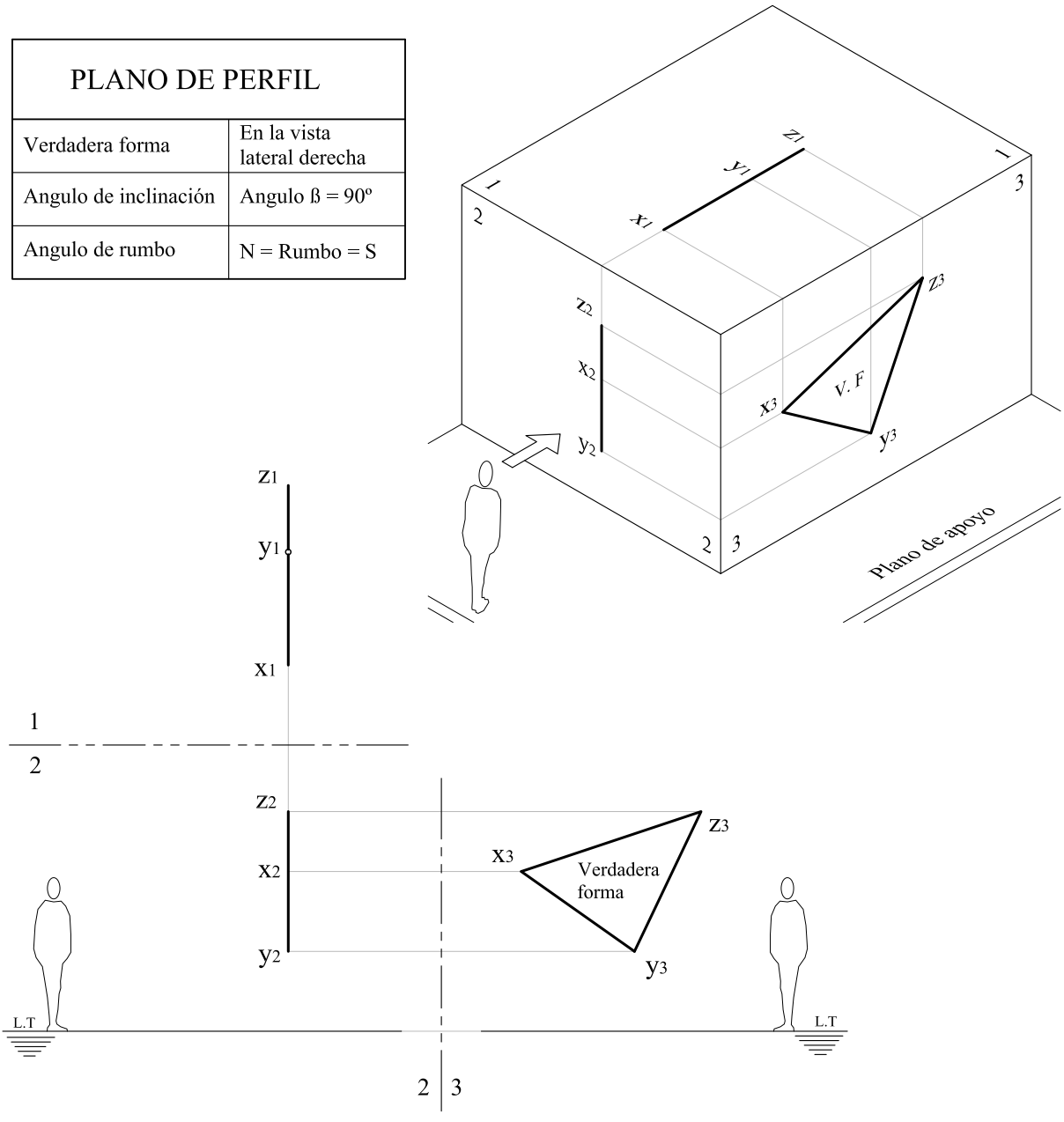


Plano frontal
Figura 6.22

6.6.3 Plano de perfil

Es todo plano que se encuentra paralelo al plano lateral derecho de proyección, siendo perpendicular a los planos adyacentes a la vista lateral derecha; su ángulo de inclinación equivale a 90º, y la verdadera forma del mismo se percibe en el plano lateral derecho de proyección *(figura 6.23).*

PLANO DE PERFIL	
Verdadera forma	En la vista lateral derecha
Angulo de inclinación	Angulo ß = 90º
Angulo de rumbo	N = Rumbo = S

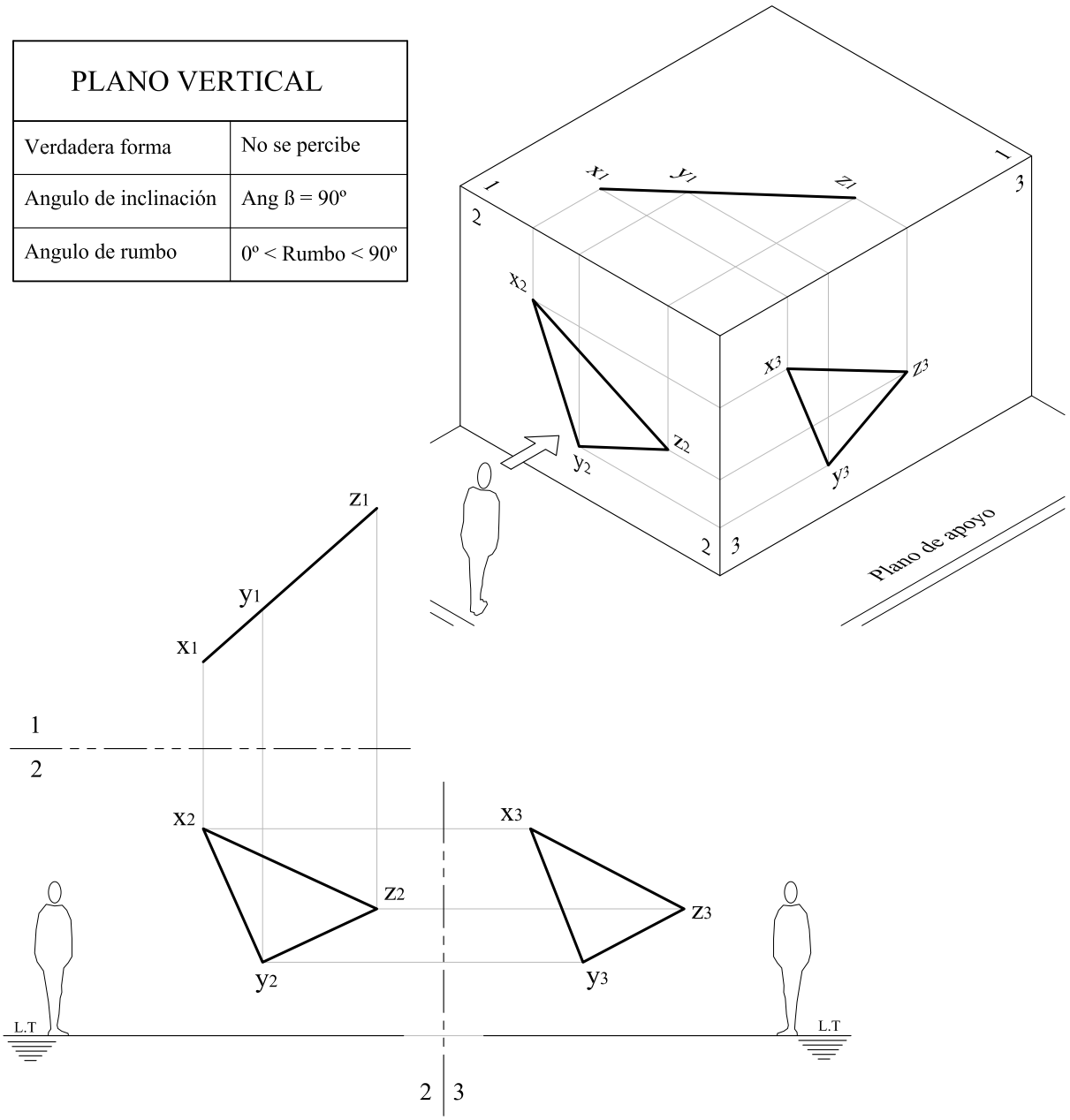


Plano de perfil
Figura 6.23

6.6.4 Plano vertical

Es todo plano perpendicular al plano superior de proyección, pero no es perpendicular, ni paralelo a los planos, frontal y lateral derecho; el ángulo de inclinación del mismo es 90º respecto al plano de apoyo; y en ninguna de las vistas principales se proyecta la verdadera forma del plano *(figura 6.24).*

PLANO VERTICAL	
Verdadera forma	No se percibe
Angulo de inclinación	Ang ß = 90º
Angulo de rumbo	0º < Rumbo < 90º

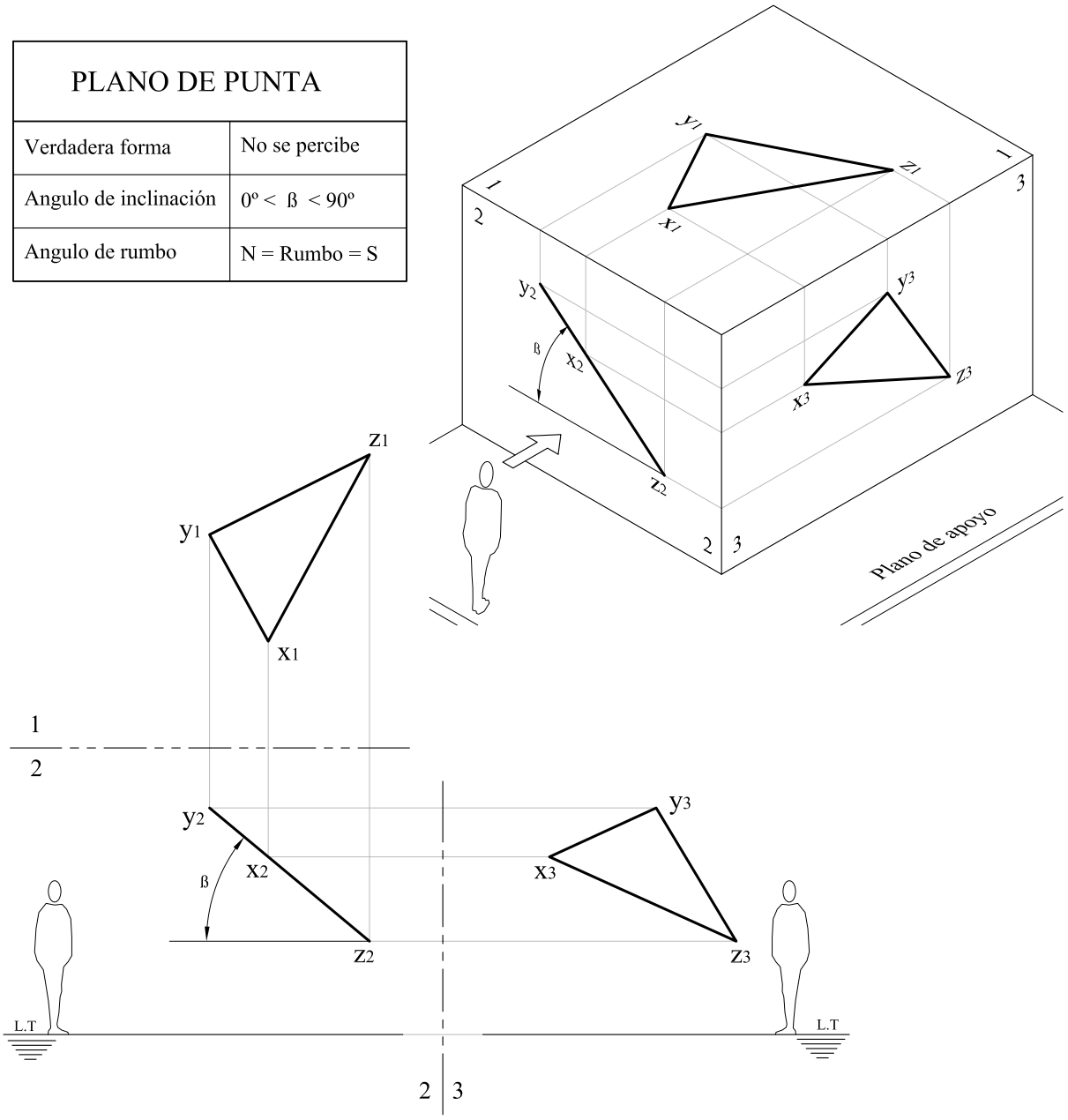


Plano vertical
Figura 6.24

6.6.5 Plano de punta

Es todo plano perpendicular al plano frontal de proyección, pero no es perpendicular, ni paralelo a los planos, superior y lateral derecho; el ángulo real de inclinación del mismo, se visualiza en la vista frontal; y en ninguna de las vistas principales se proyecta la verdadera forma del plano *(figura 6.25).*

PLANO DE PUNTA	
Verdadera forma	No se percibe
Angulo de inclinación	0º < ß < 90º
Angulo de rumbo	N = Rumbo = S

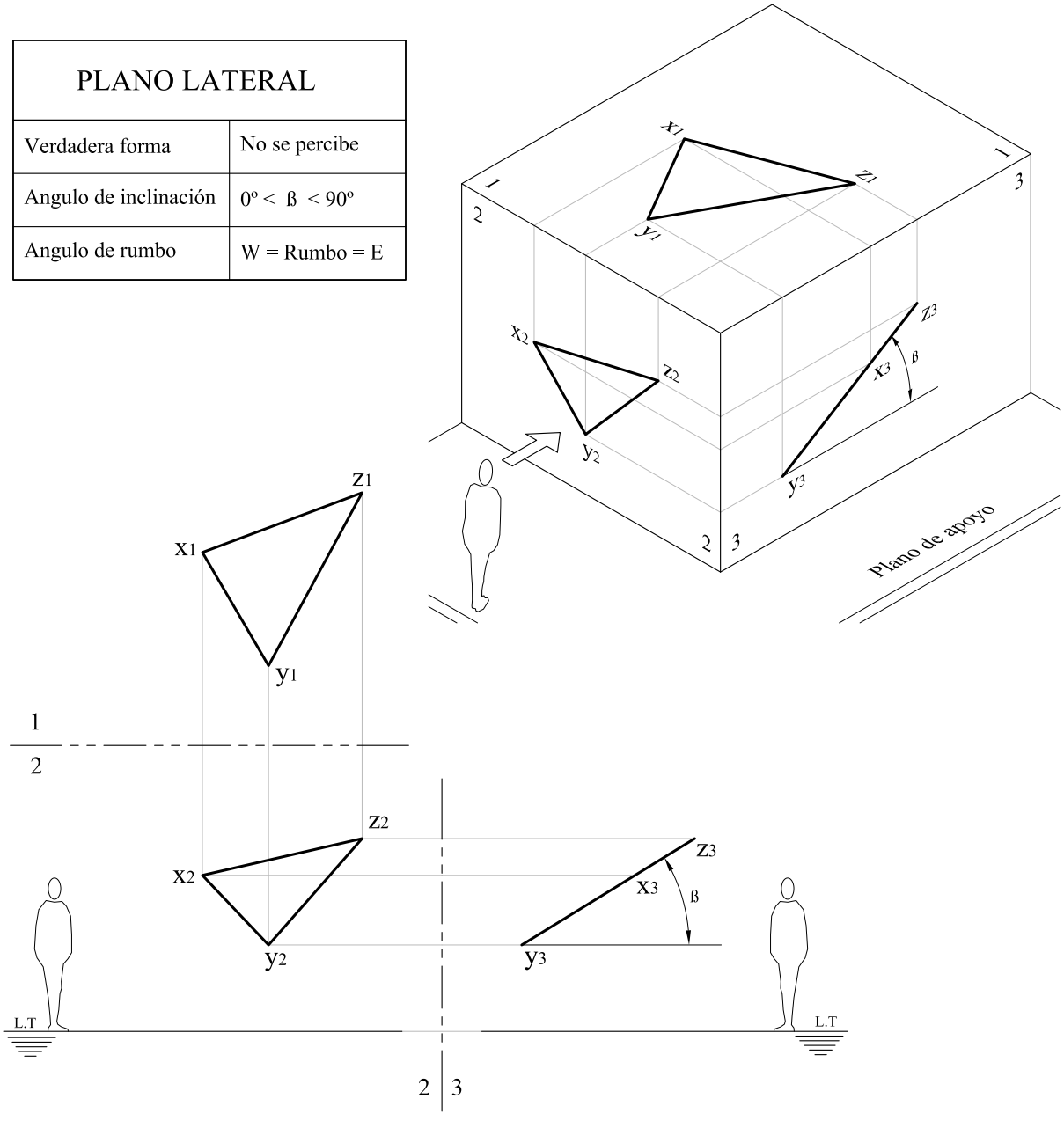


Plano de punta
Figura 6.25

6.6.6 Plano lateral

Es todo plano perpendicular al plano lateral derecho de proyección, pero no es perpendicular, ni paralelo a los planos, superior y frontal; el ángulo real de inclinación se visualiza en la vista lateral derecha; y en ninguna de las vistas principales se proyecta la verdadera forma del plano *(figura 6.26).*

PLANO LATERAL	
Verdadera forma	No se percibe
Angulo de inclinación	0º < ß < 90º
Angulo de rumbo	W = Rumbo = E

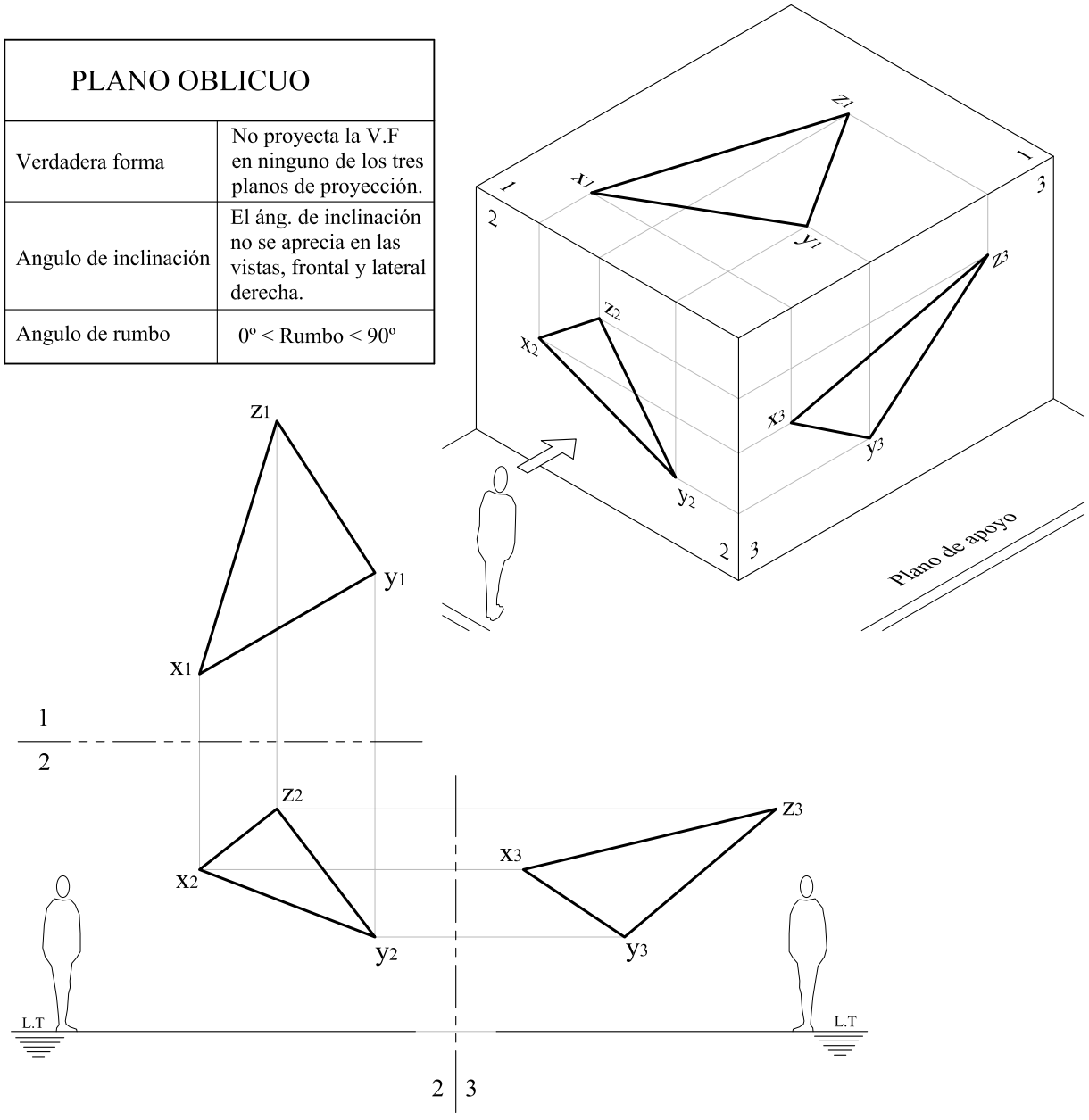


Plano lateral
Figura 6.26

6.6.7 Plano oblicuo

Es todo plano que no se encuentra paralelo, ni perpendicular a los planos principales de proyección; aunque posee ángulo de inclinación, no es posible percibirlo en los planos de alzada principales; tampoco se puede apreciar la verdadera forma en los planos principales de proyección *(figura 6.27).*

PLANO OBLICUO	
Verdadera forma	No proyecta la V.F en ninguno de los tres planos de proyección.
Angulo de inclinación	El áng. de inclinación no se aprecia en las vistas, frontal y lateral derecha.
Angulo de rumbo	0º < Rumbo < 90º



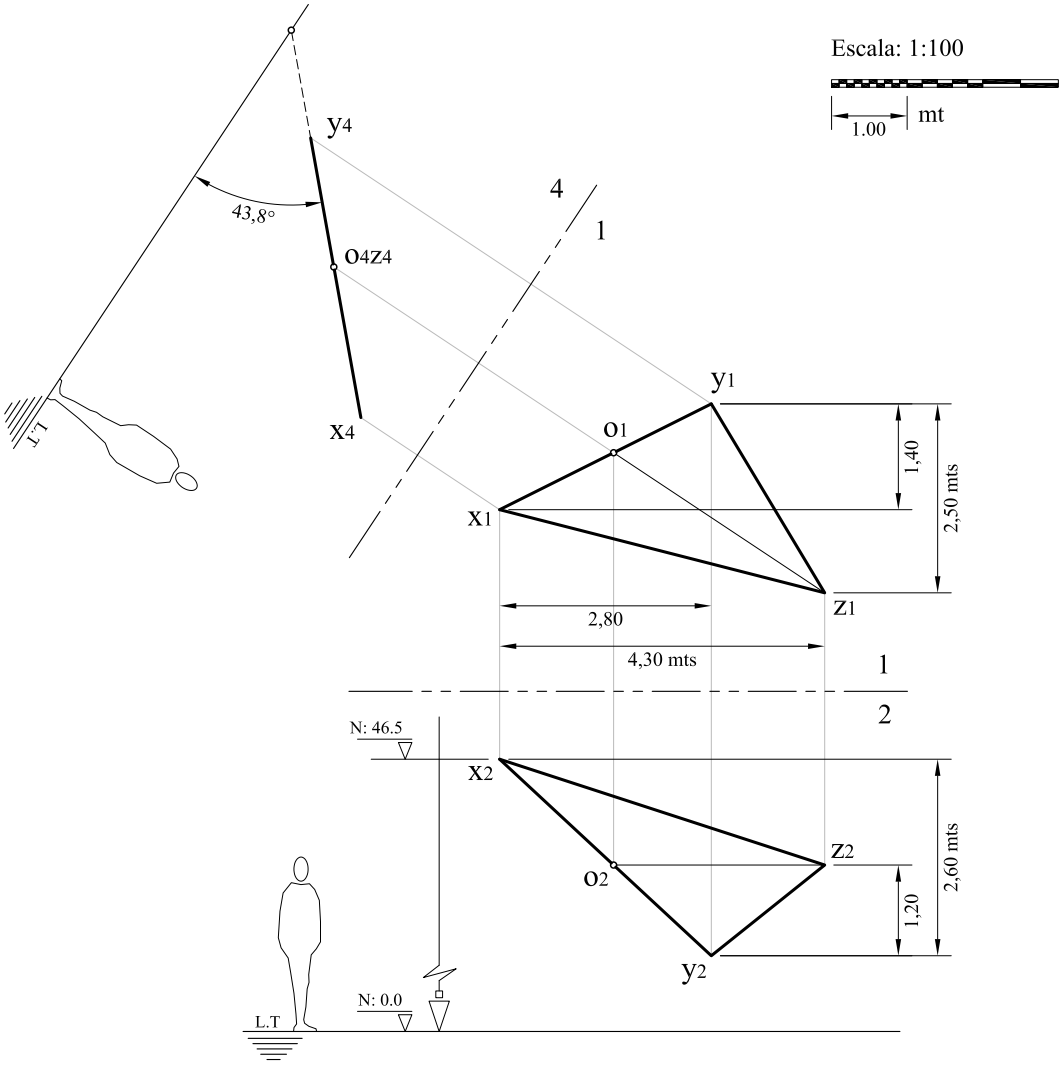
Plano oblicuo
Figura 6.27

6.7 Ejemplos

6.7.1 Ejemplo 1

Un punto Y se localiza 1.40 mts al Norte de X, 2.80 mts al Oriente de X, y 1.20 mts por debajo de Z; el punto X se localiza 1.10 mts al Norte de Z, 4.30 mts al Occidente de Z, y 2.60 mts por encima de Y; además, el punto X posee una cota de 46.5 mts sobre el nivel del mar. Con esta información, defina el plano XYZ, y determine: la orientación, el ángulo de inclinación, el área, el perímetro, y las cotas de elevación de los vértices Y, y Z del plano. Trabajar en sistema ASA, a escala: 1:100

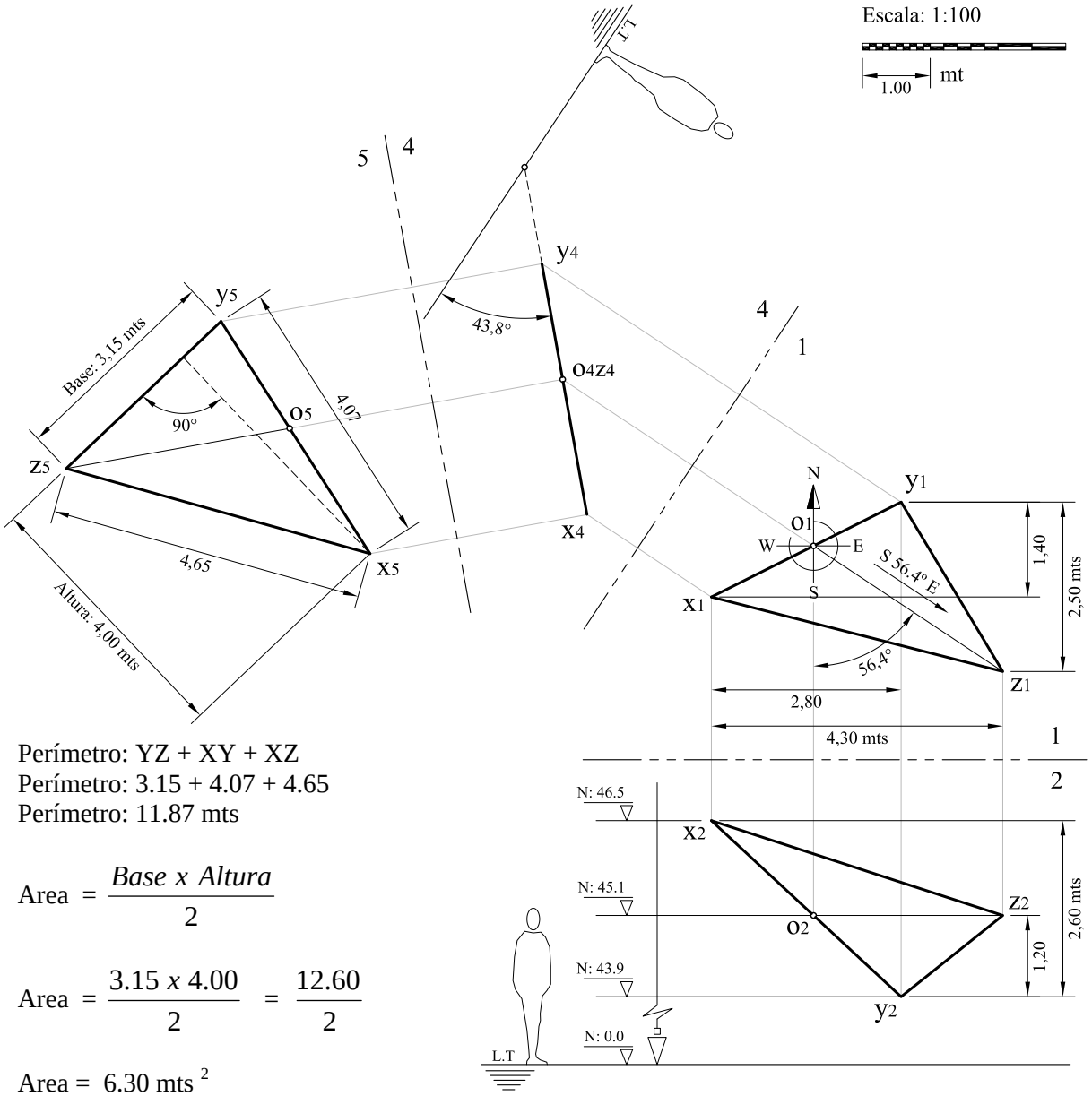
Se localizan los puntos de acuerdo al enunciado, y se define el plano XYZ, dimensionando los valores de desplazamiento, y cota de elevación del punto X; luego, se localiza una recta horizontal OZ, la cual servirá de pauta para visualizar el plano como filo en una vista de alzada, y por consiguiente, medir el ángulo de inclinación del plano XYZ respecto al plano de apoyo *(figura 6.28)*.



Planteamiento del plano XYZ del ejemplo 1
Figura 6.28

Para apreciar la verdadera magnitud del plano XYZ, se procede a dibujar un eje de pliegue 4-5 que sea paralelo a la proyección del plano como filo; de esta forma, en la vista 5 se puede realizar la lectura de las dimensiones reales del triángulo, y así, determinar el perímetro y el área del mismo. Se estipula el lado YZ como la base del triángulo, y la altura del triángulo correspondiente, sería la perpendicular trazada desde el vértice X hasta la base YZ *(figura 6.29).*

En la vista frontal se miden directamente las cotas de elevación de los vértices X, Y, y Z, proyectando cada uno sobre la línea de referencia de alturas; finalmente, se mide el rumbo del plano en la recta o_1z_1.



Perímetro: YZ + XY + XZ
Perímetro: 3.15 + 4.07 + 4.65
Perímetro: 11.87 mts

$$\text{Area} = \frac{\textit{Base x Altura}}{2}$$

$$\text{Area} = \frac{3.15 \textit{ x } 4.00}{2} = \frac{12.60}{2}$$

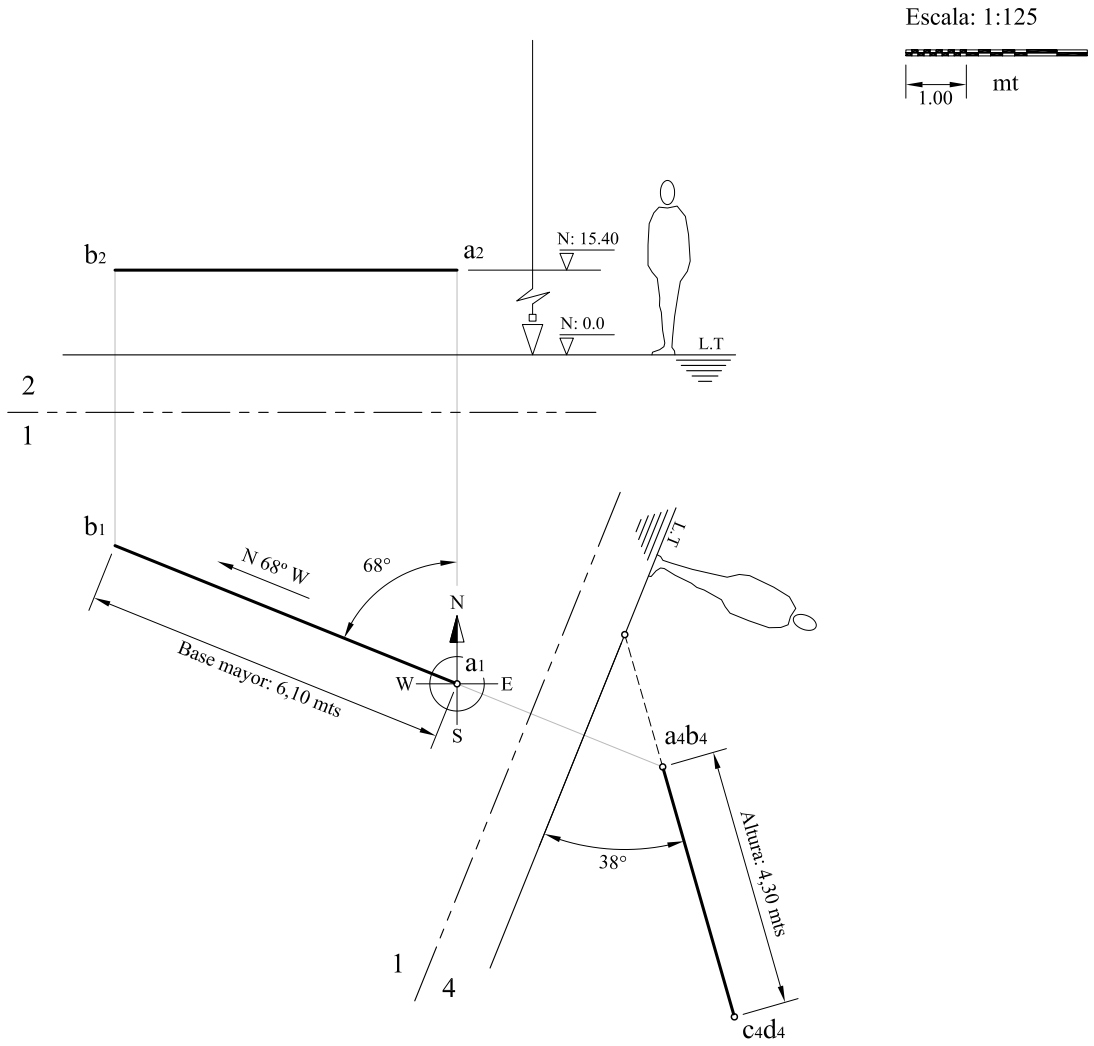
Area = 6.30 mts ^{2}

Desarrollo y solución del plano XYZ, ejemplo 1
Figura 6.29

6.7.2 Ejemplo 2

Dibujar un trapecio con base mayor: 6.10 mts, y base menor: 3.20 mts; dichas bases están separadas a 4.30 mts; igualmente, el trapecio debe estar en posición oblicua, poseer una orientación de N 68º W, y poseer un ángulo de inclinación de 38º respecto al plano de apoyo. La base mayor se considera una recta horizontal situada a 15.40 mts sobre el nivel del mar. Con esta información, se pide determinar: el perímetro, el área, el valor de los ángulos internos, y la altura sobre el nivel del mar de la base menor. Trabajar en sistema DIN a escala 1: 125.

Como la base mayor es una recta horizontal, simplemente se dibuja en las vistas, frontal y superior, donde se aprecian la altura sobre el nivel del mar, la orientación, y su verdadera magnitud; luego, se plantea un eje de pliegue 1-4 perpendicular al rumbo para proyectar el trapecio como filo; aquí se aprecian las bases como un punto, y por ende, se mide directamente la altura del trapecio *(figura 6.30).*

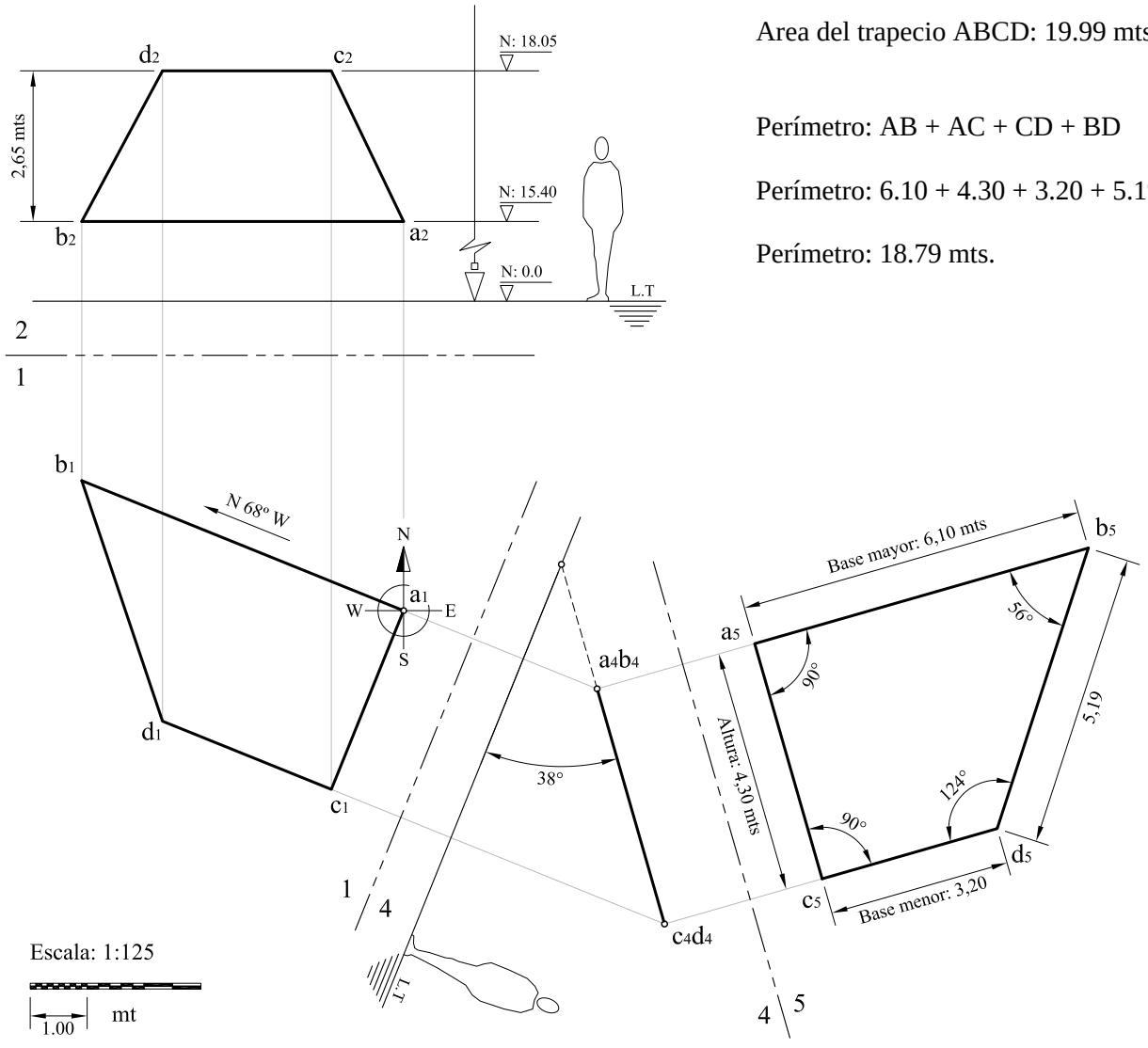


Planteamiento del trapecio, según el ejemplo 2
Figura 6.30

Posteriormente, se plantea un eje de pliegue 4-5 paralelo a la vista del trapecio como filo, para obtener la verdadera forma del mismo; en dicha vista se procede a dimensionar los lados y los ángulos internos, con el fin de realizar los cálculos solicitados.

Se completan las vistas, superior y frontal, trasladando las medidas debidamente; y en la vista frontal se proyecta la cota de elevación de la base menor en la línea de referencia de alturas *(figura 6.31)*.

Area: $\frac{(Base + base)\ x\ Altura}{2}$; Area: $\frac{(6.10 + 3.20)\ x\ 4.30}{2}$; Area: $\frac{9.30\ x\ 4.30}{2}$; Area: $\frac{39.99}{2}$



Area del trapecio ABCD: 19.99 mts^2

Perímetro: AB + AC + CD + BD

Perímetro: 6.10 + 4.30 + 3.20 + 5.19

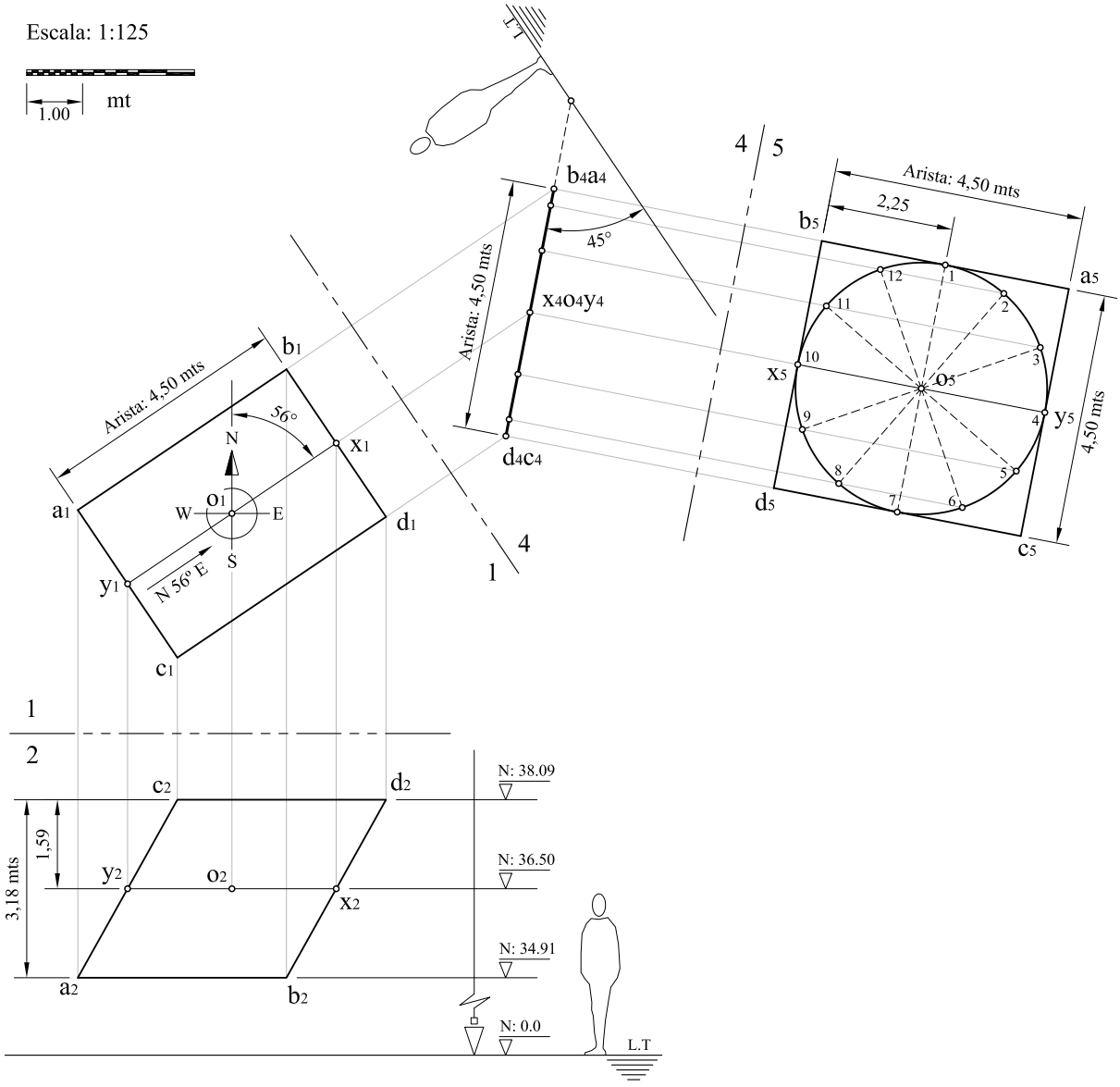
Perímetro: 18.79 mts.

Desarrollo y solución del trapecio ABCD, según el ejemplo 2
Figura 6.31

6.7.3 Ejemplo 3

Plantear un cuadrado ABCD de arista 4.50 mts, en posición oblicuo, sabiendo que presenta un ángulo de inclinación de 45º respecto al plano de apoyo, y posee un rumbo de N 56º E; su centro geométrico presenta una cota de elevación de 36.50 mts sobre el nivel del mar. Dibuje un círculo inscrito tangente al cuadrado. ¿Cuál es la elevación de los vértices del plano? Trabajar en sistema ASA, a escala: 1: 125.

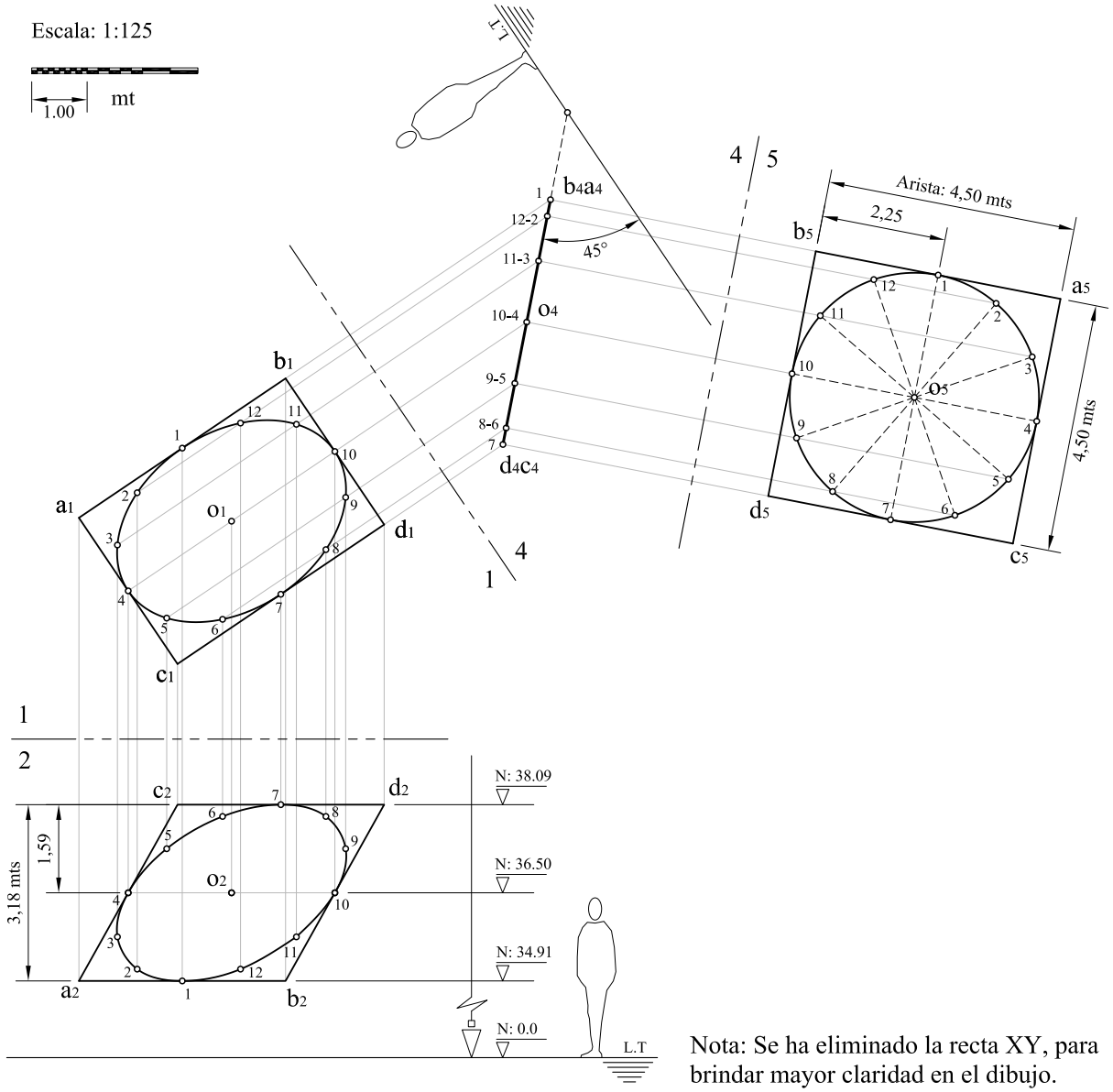
Se localiza el centro o_2 en la vista frontal, y en la vista superior se construye el rumbo sobre una recta horizontal $o_1x_1y_1$, luego, se plantea un eje de pliegue 1-4 perpendicular al rumbo, para visualizar el plano como filo; después, se plantea un eje de pliegue paralelo al plano como filo, y se construye el cuadrado en verdadera forma, con el círculo inscrito y subdividido en 12 partes iguales *(figura 6.32).*



Planteamiento del cuadrado ABCD, según el ejemplo 3
Figura 6.32

Partiendo de los puntos resultantes en la subdivisión del círculo, se proyectan dichos puntos hacia la vista del plano como filo, luego, hacia la vista superior, y de aquí hacia la vista frontal; posteriormente, se unen los puntos con un curvígrafo para dibujar las elipses respectivas. Al final, se determinan las cotas de elevación de los vértices en la línea de referencia de alturas *(figura 6.33).*

Por conveniencia, las subdivisiones de los círculos deben realizarse en números pares, planteando un mínimo de 12 divisiones, hasta un máximo de 36 divisiones; los números pares facilitan el dibujo de las líneas de relación, ya que dos puntos coincidirán en una sola línea de relación, y por consiguiente, se evitan congestiones de líneas innecesarias en el dibujo.



Nota: Se ha eliminado la recta XY, para brindar mayor claridad en el dibujo.

Desarrollo y solución del cuadrado ABCD, según el ejemplo 3
Figura 6.33

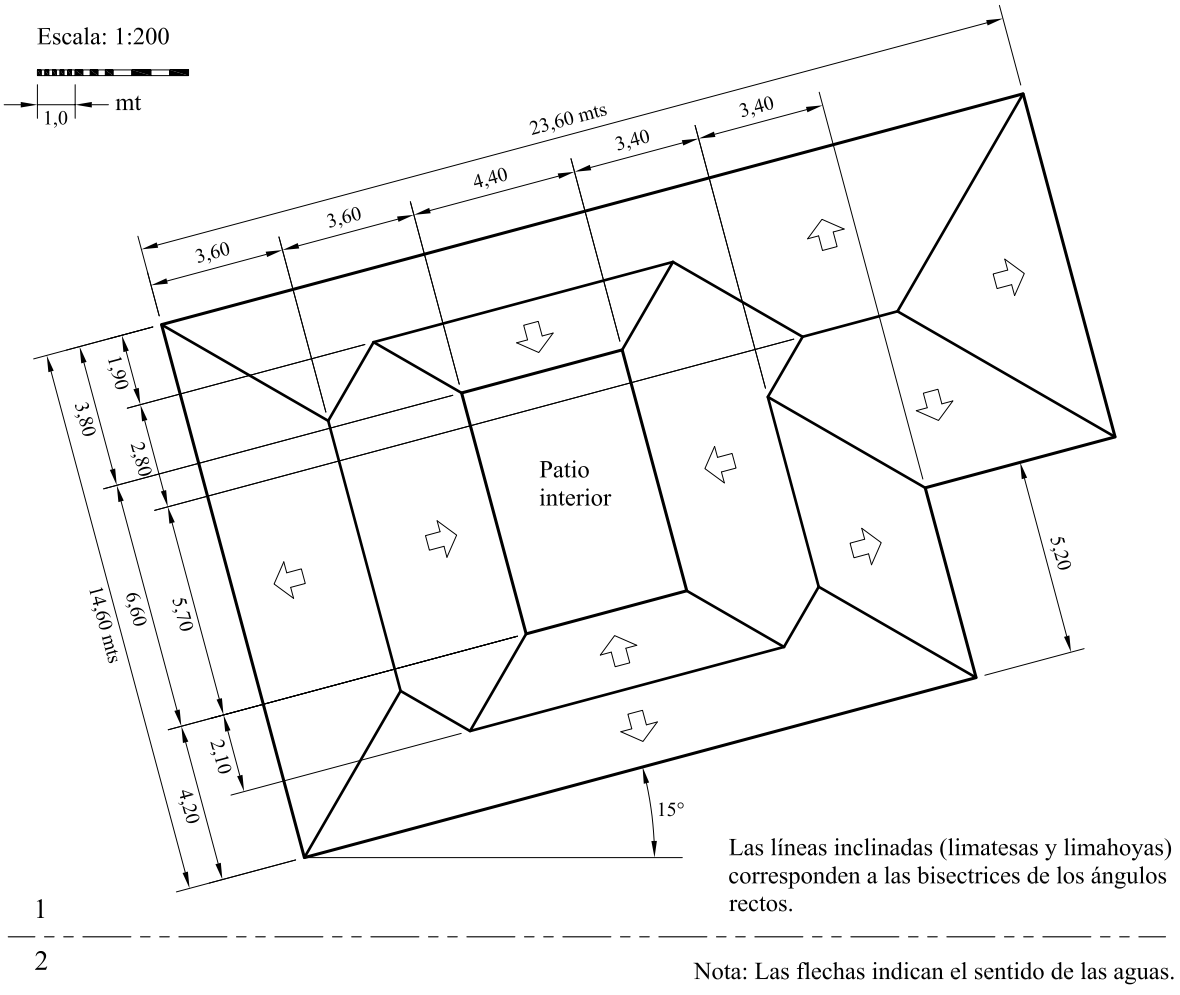
6.8 Ejercicios

6.8.1 Ejercicio 1

Se muestra la vista superior de una cubierta, cuyos planos de vertientes de agua poseen una pendiente del 60%; todos estos planos parten de una línea horizontal (línea de enrase), cuya cota de elevación es de 5.30 mts respecto al nivel de apoyo. Con esta información, se solicita:

- Construir la vista frontal, y visualizar planos ocultos (use como referencia el eje de pliegue 1-2).
- Determinar la verdadera forma de todos los planos.
- Calcular el área de cada plano, y determinar el área total de la cubierta.
- Determinar la cota de elevación máxima de la cumbrera (recta horizontal más alta de la cubierta).
- Construir un modelo tridimensional a escala: 1:100 de la cubierta.

Trabajar en sistema ASA, a escala 1: 200; utilice un formato de 1/2 pliego de papel.



Cubierta para resolver, ejercicio 1
Figura 6.34

6.8.2 Ejercicio 2

El punto A se localiza 24 mts al Sur de C, 44.4 mts al Occidente de B, y 18 mts por encima de C; el punto B se encuentra 15.6 mts al Sur de C, 19.2 mts al Oriente de C, y 8.4 mts por encima de A; defina el plano ABC, y determine:

- La orientación o rumbo del plano.
- El ángulo de inclinación del plano respecto al plano de apoyo.
- El área, y el perímetro del plano ABC.
- El radio del círculo que se puede inscribir tangencialmente en el plano ABC; proyecte el círculo en todas las vistas.
- El área, y el perímetro del círculo inscrito en el plano ABC.

Trabajar en sistema DIN, a escala: 1:75; utilice un formato de 1/4 de pliego de papel.

6.8.3 Ejercicio 3

Una edificación que se encuentra apoyada en el nivel 740 mts sobre el nivel del mar, posee una forma de prisma, cuya base rectangular mide 17.0 mts x 9.0 mts, y presenta una altura de 5.45 mts; dicha edificación posee una cubierta simétrica a 4 aguas, donde el lado mayor de la misma posee un rumbo de N 65º E; además, el cabío de limatesa presenta un ángulo de inclinación de 24º respecto al plano de apoyo. Con esta información, se pide determinar:

- El ángulo de pendiente de los planos de la cubierta, expresada en porcentaje (la pendiente es igual en los 4 planos).
- La altura del caballete respecto al nivel de apoyo de la edificación.
- El área, y el perímetro de todos los planos de la cubierta.
- El área total de la cubierta.

Trabajar en sistema ASA, a escala: 1:200; utilice un formato de 1/4 de pliego de papel.

6.8.4 Ejercicio 4

Construya un triángulo escaleno de área: 135.7 mts^2 en posición oblicuo; si se conoce que la base del triángulo mide 18.70 mts; además, el triángulo presenta una orientación de N 71º E, y posee un ángulo de inclinación de 28º respecto al plano de apoyo. Rectifique el área en otro procedimiento de vista.

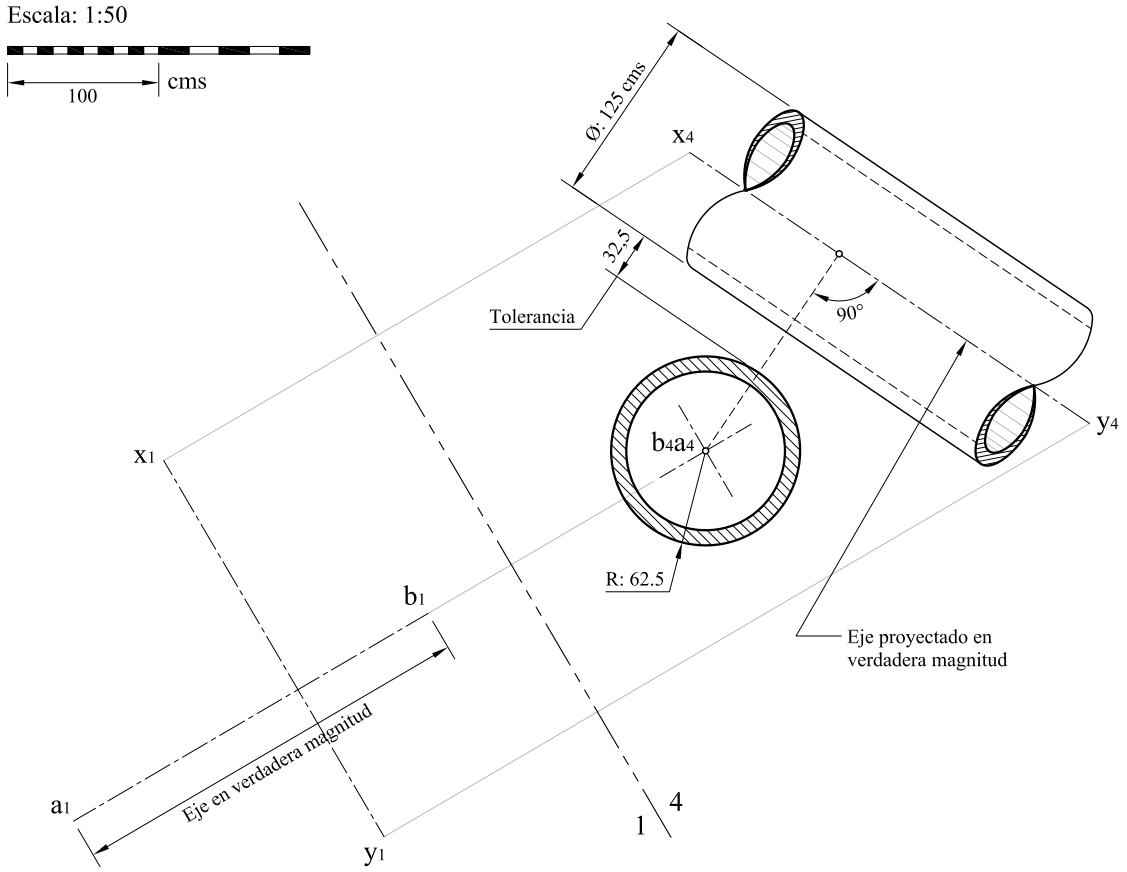
Trabajar en sistema ASA, a escala: 1:200; utilice un formato de 1/4 de pliego de papel.

7.0 Relaciones espaciales

7.0 Generalidades de las relaciones espaciales

Las relaciones espaciales se refieren a las propiedades geométricas y comportamientos existentes entre puntos, rectas, y planos; con el fin de medir y establecer márgenes de seguridad, áreas de afectación, y tolerancias involucradas entre dos o más elementos geométricos; los resultados obtenidos proporcionan aspectos importantes relacionados con el diseño, y la construcción, tales como, factores determinantes de diseño, presupuestos y cantidades de obra, factibilidades, planificaciones de obra, etc.

Las propiedades geométricas más representativas que se presentan entre dichos elementos, consisten en, el paralelismo, la perpendicularidad, la intersección, y el cruzamiento; es conveniente, que al momento de realizar un desarrollo de análisis de un determinado comportamiento, se tengan en cuenta la abstracción de los objetos que intervienen, así como, la precisión con que se dibuja, y la escala empleada; por ejemplo, un tubo de Ø: 125 cms, a escala: 1:50, mediría 25 mms en el dibujo; por lo tanto, se dibuja sólo el eje del mismo en todas las vistas, y en el momento de medir alguna tolerancia respecto a otro tubo, se dibuja detalladamente la sección del tubo en verdadera forma *(figura 7.1).*

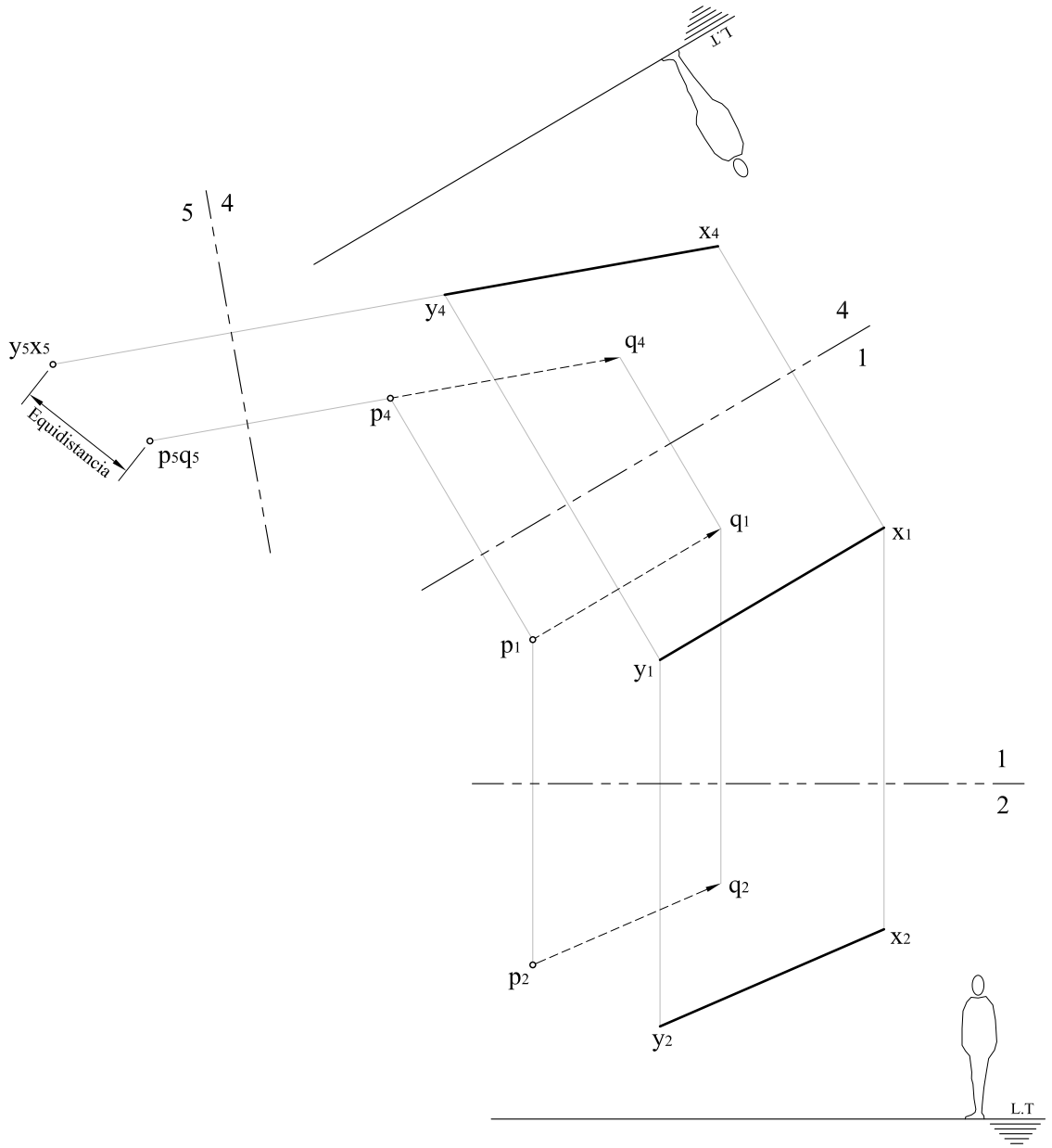


Ejemplo de tolerancia entre dos tubos que se cruzan
Figura 7.1

7.1 Relaciones entre puntos y rectas

7.1.1 Trazar una recta que pase por un punto exterior a una recta, y sea paralela a la misma

Cuando se tiene un punto P exterior a una recta XY dada no colineal, simplemente se traza una recta de manera indefinida que pase por el punto P, y sea paralela a la recta dada en todas sus proyecciones; si se requiere comprobar su construcción, bastará visualizar la recta dada como un punto, y la nueva recta también se proyectará como tal, donde se aprecia la equidistancia en verdadera magnitud *(figura 7.2).*



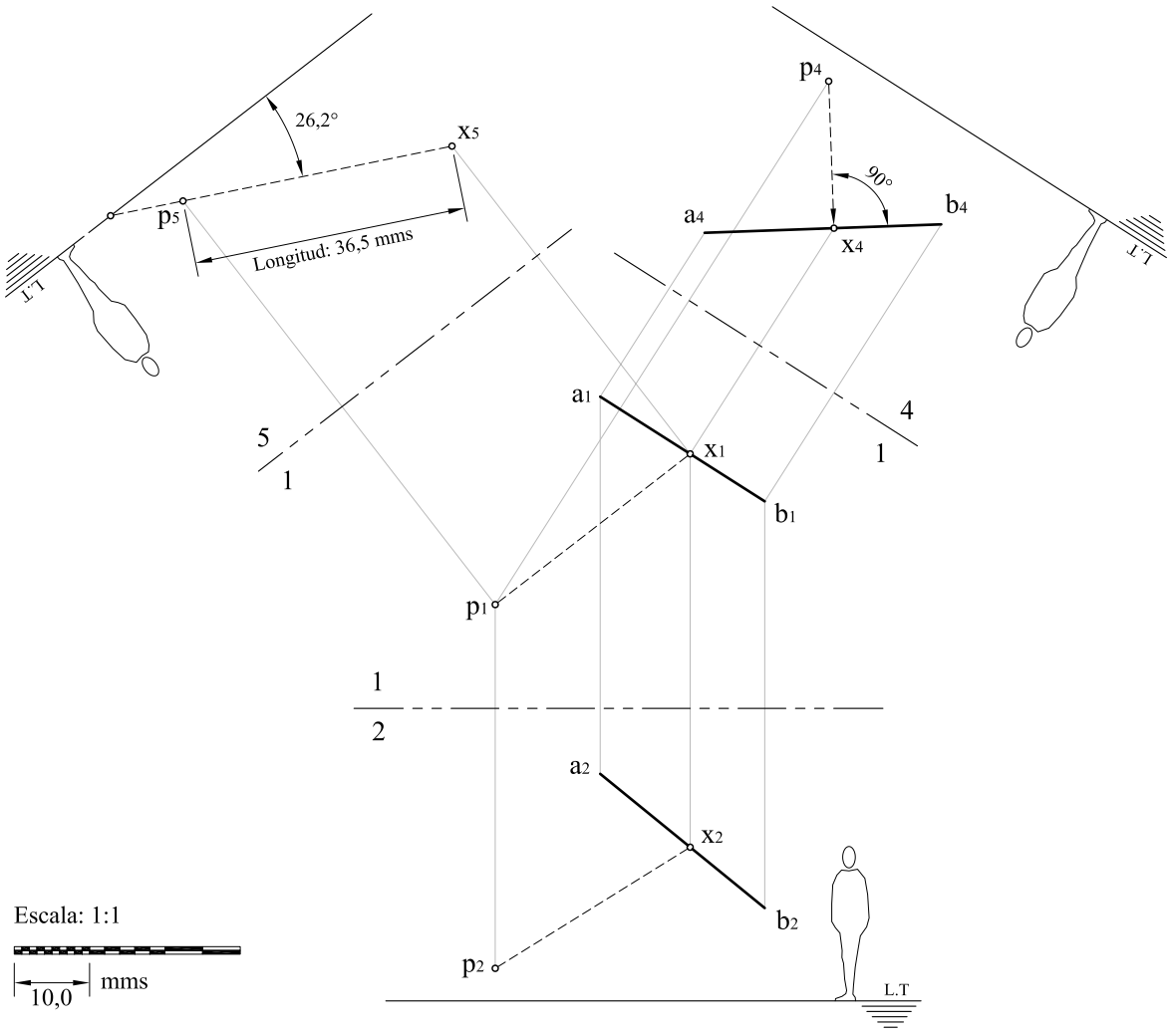
Trazado de una recta que pasa por un punto exterior P, y paralela a una recta XY dada
Figura 7.2

7.1.2 Trazar desde un punto exterior a una recta dada, la perpendicular o distancia más corta

La distancia más corta desde un punto exterior no colineal a una recta dada, es una recta perpendicular a la misma; para este caso, se tendrá en cuenta el siguiente teorema:

Teorema 10: Dos rectas son perpendiculares entre sí, cuando una de las rectas se visualiza en verdadera magnitud, y se proyecta el ángulo de 90º entre ambas.

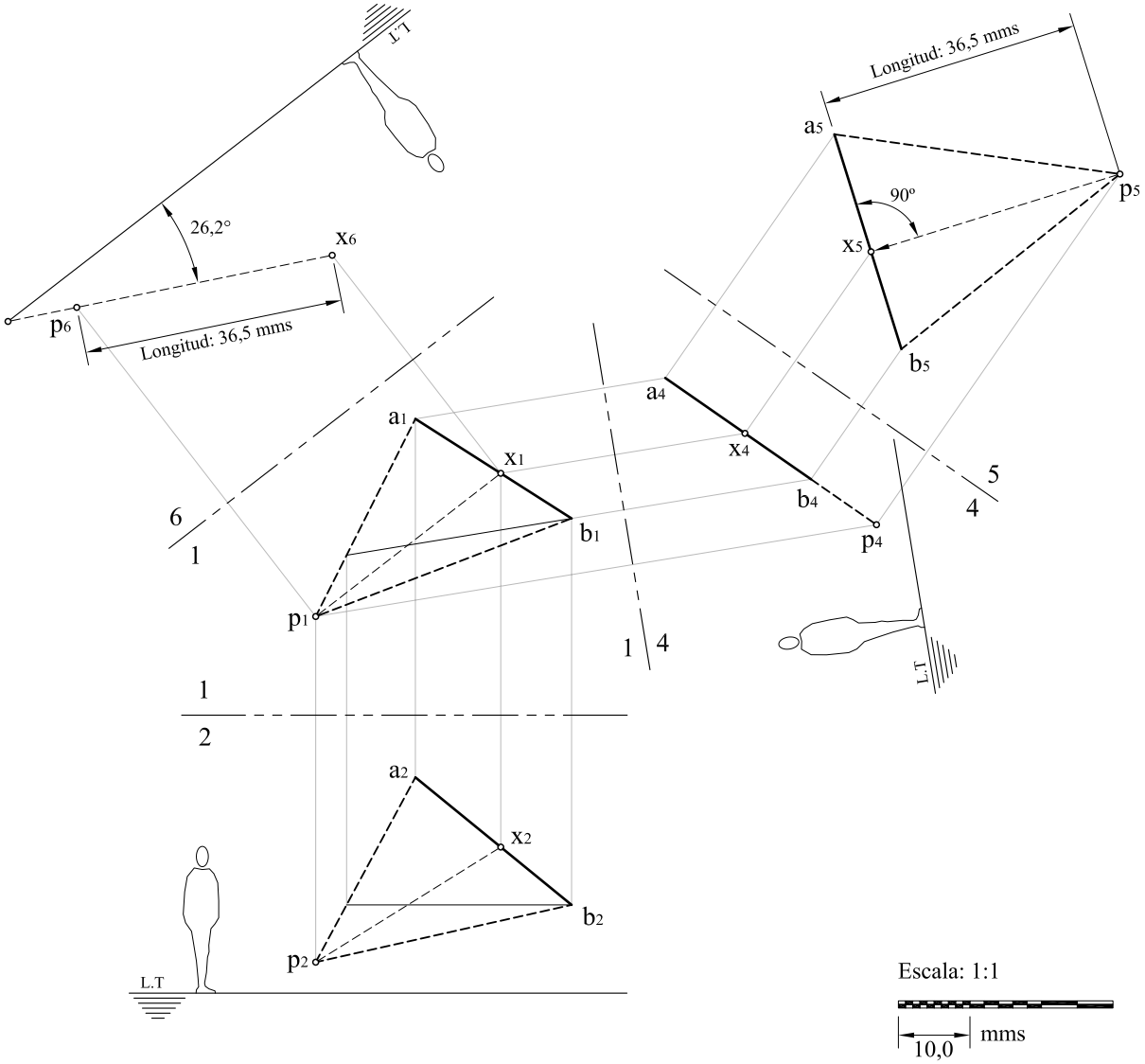
Supóngase una recta AB dada en posición oblicua, y un punto P exterior no colineal; para trazar la perpendicular desde el punto, se debe determinar la verdadera magnitud de la recta AB, y en esta vista se traza la perpendicular hasta que intercepte la recta en un punto X; luego, se relaciona dicho punto hacia las demás proyecciones; al final, si se solicita encontrar el ángulo de inclinación del tramo PX, y su verdadera magnitud, se plantea un eje de pliegue 1-5 paralelo a la recta p_1x_1, para visualizar la verdadera magnitud y el ángulo de inclinación respecto al plano de apoyo *(figura 7.3).*



Trazar una recta perpendicular desde un punto exterior P hasta una recta AB dada
Figura 7.3

En el ejemplo anteriormente descrito, también se puede trazar la perpendicular desde el punto P hasta la recta AB; utilizando el método del plano, para ello, se define el plano ABP uniendo los vértices entre sí; luego, se determina la verdadera forma del plano, tal como se ha visto anteriormente, y en esta proyección se dibuja una línea perpendicular desde el vértice p_5 hasta que intercepte la recta a_5b_5 en el punto x_5, de esta forma, el tramo p_5x_5 se proyectará en verdadera magnitud (36,5 mms).

Para rectificar la longitud del tramo p_5x_5, se plantea un eje de pliegue 1-6 paralelo a la recta p_1x_1, y en la vista de alzada 6, se proyectarán la longitud real (36,5 mms), y el ángulo de inclinación respecto al plano de apoyo (β: 26,2º) *(figura 7.4)*.



Trazar una recta perpendicular desde un punto exterior P hasta una recta AB dada (método del plano)
Figura 7.4

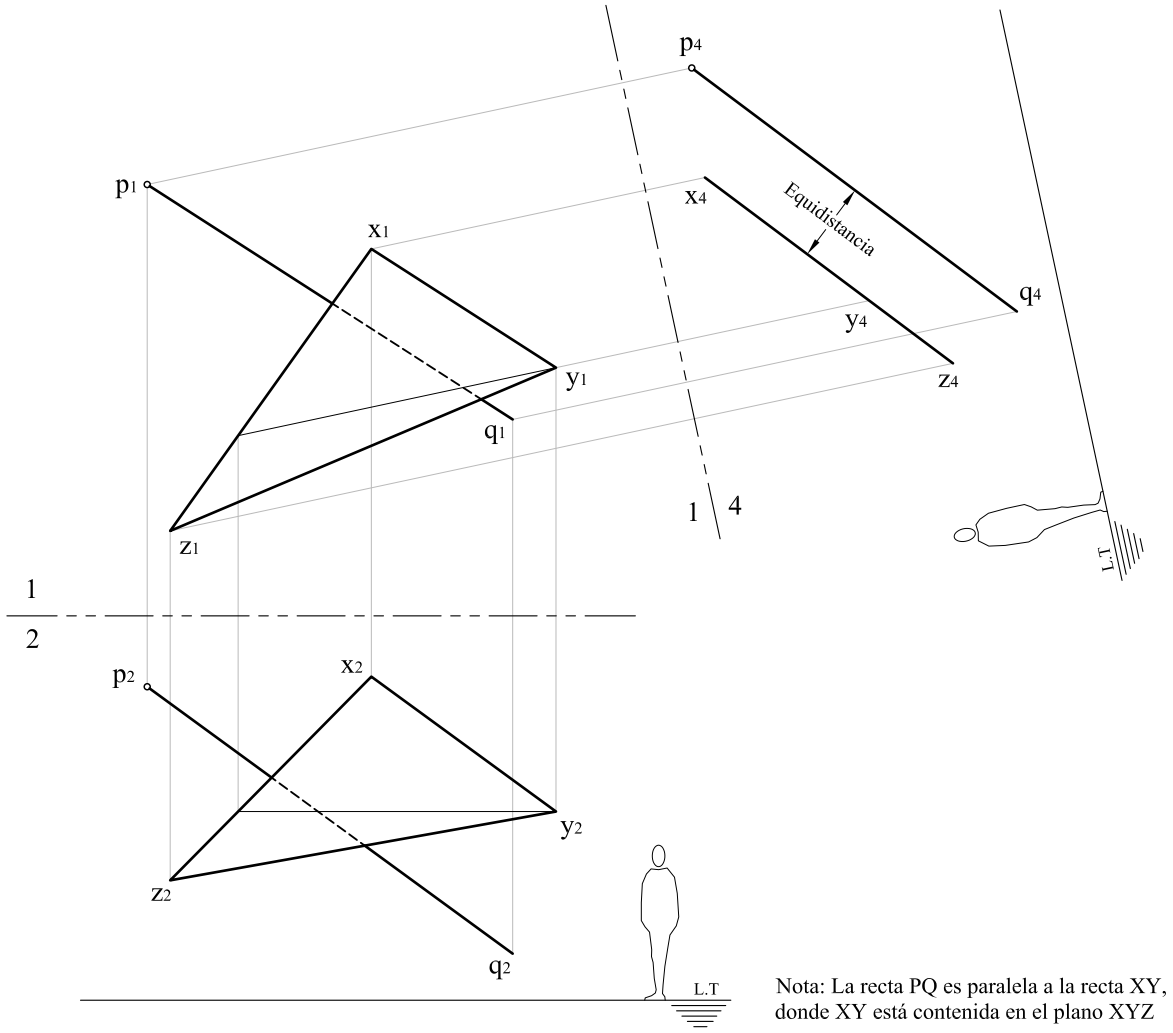
7.2 Relaciones entre puntos y planos

7.2.1 Trazar desde un punto exterior a un plano dado, una recta paralela al mismo

Para dibujar una recta que pase por un punto P exterior no coplanar a un plano XYZ dado, bastará identificar una recta cualquiera contenida en el plano, la cual servirá de pauta para construir la paralela solicitada; en este caso, se tiene en cuenta el siguiente teorema:

Teorema 11: Una recta es paralela a un plano, cuando la recta es paralela a una sola recta contenida en el plano.

Se identifica una recta de borde XY, la cual pertenece al plano XYZ, y a partir del punto P se traza una recta indefinida hasta el vértice Q, y sea paralela a la recta XY en todas las vistas; para comprobar el paralelismo, simplemente en la vista del plano como filo, se proyectará la equidistancia en verdadera magnitud que existe entre el plano dado y la recta PQ; y finalmente, se visualiza *(figura 7.5).*



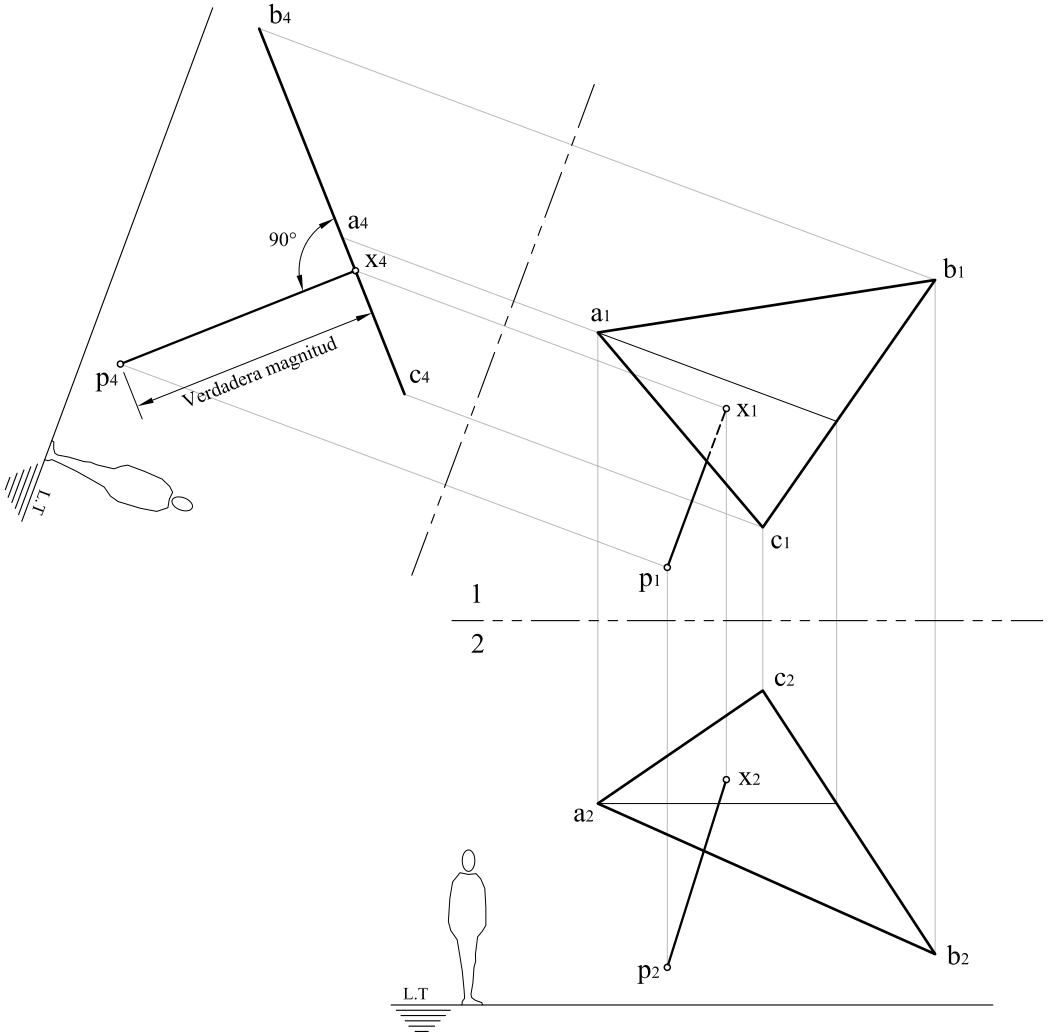
Trazado de una recta que pasa por un punto exterior P, y sea paralela a un plano XYZ dado
Figura 7.5

7.2.2 Trazar la distancia más corta o perpendicular desde un punto exterior a un plano dado

La distancia más corta que existe entre un punto exterior P no coplanar y un plano ABC dado, consiste en trazar una recta perpendicular desde el punto hasta que intercepte al plano; en este caso se tendrá en cuenta el siguiente teorema:

Teorema 12: La distancia más corta desde un punto exterior a un plano, es la línea perpendicular trazada desde el punto hasta que intercepte al plano visto como filo.

Este proceso también conocido como método del plano, consiste en determinar una proyección del plano como filo, y en esta vista se dibuja la línea perpendicular desde p_4, hasta que intercepte al plano $a_4b_4c_4$ en un punto x_4; como el tramo p_4x_4 se considera una longitud real, quiere decir que el tramo p_1x_1 en la vista superior estará paralelo al eje de pliegue 1-4; por eso, el punto x_4 se relaciona hasta que intercepte una línea auxiliar paralela al eje de pliegue 1-4 que parte desde p_1. Cabe mencionar que el punto X es un punto de intersección que existe entre la recta PX y el plano ABC *(figura 7.6).*



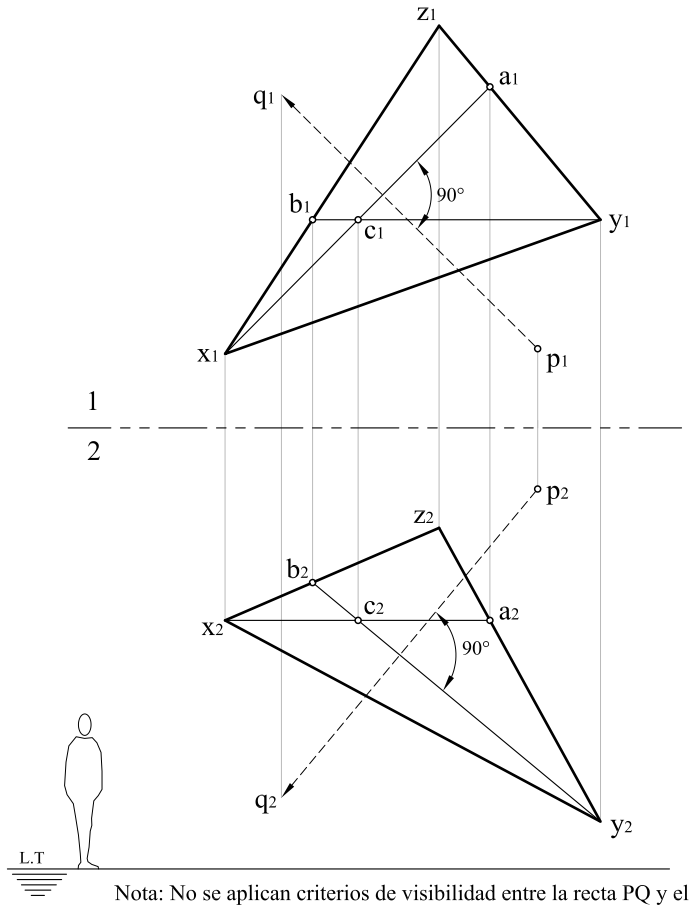
Trazar la distancia más corta desde un punto exterior P hasta un plano ABC dado (método del plano)
Figura 7.6

Existe otra forma de dibujar una línea perpendicular desde un punto exterior hacia un plano, y consiste en utilizar el método de las dos vistas, en el cual, se requiere emplear dos vistas adyacentes, y se aplica cuando el plano está en posición oblicuo; en este caso, se tendrá en cuenta el siguiente teorema:

Teorema 13: Una recta es perpendicular a un plano, cuando dicha recta forma un ángulo de 90º con dos rectas contenidas en el plano, proyectadas en verdadera magnitud, y que se intercepten entre sí.

Se procede a identificar dos rectas contenidas en el plano XYZ; se dibuja una recta horizontal AX, la cual, proyecta su longitud real en la vista superior, y se traza una recta frontal BY, la cual, proyecta su verdadera magnitud en la vista frontal; ambas rectas se interceptan entre sí en un punto C. El siguiente paso, consiste en trazar una línea desde p_1, que sea perpendicular a la recta a_1x_1 de manera indefinida hasta el vértice q_1; luego, se dibuja una línea desde p_2, que sea perpendicular a la recta b_2y_2 hasta llegar al extremo q_2; de esta manera, la recta PQ será perpendicular al plano XYZ *(figura 7.7).*

Para determinar el punto de intersección entre la recta PQ y el plano XYZ, es necesario construir una vista auxiliar donde el plano se proyecte como filo, y relacionar dicho punto hacia las demás vistas; o en caso contrario, determinar la intersección utilizando los métodos para resolver intersecciones entre rectas y planos, los cuales, se estudiarán posteriormente.

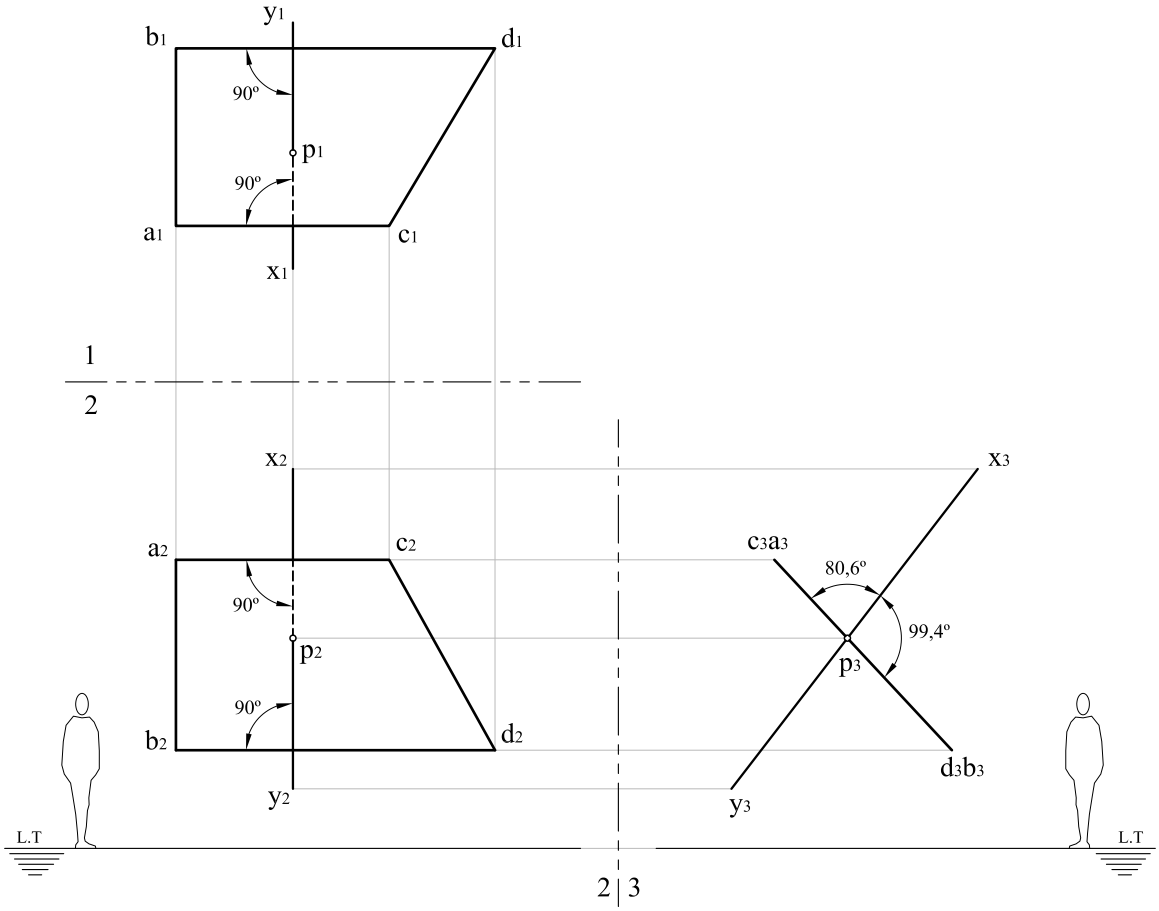


Nota: No se aplican criterios de visibilidad entre la recta PQ y el plano XYZ, porque no se ha determinado la intersección entre ambos; lo que interesa en este caso, es la perpendicularidad.

Trazar una recta perpendicular desde un punto exterior P hacia un plano XYZ (método de las 2 vistas)
Figura 7.7

El método anteriormente descrito, no aplica cuando las dos rectas contenidas en el plano sean paralelas entre sí, aunque se proyecten en verdadera magnitud.

Considérese una recta de perfil XY, y un plano ABCD en posición lateral; el plano ha sido definido por las rectas laterales AC y BD, las cuales son paralelas entre sí, y se proyectan en verdadera magnitud en todas las vistas adyacentes a la vista lateral derecha; tanto en la vista frontal, como en la vista superior, la recta XY será perpendicular a las rectas AC y BD; pero, al construir la vista lateral derecha, se evidencia que la recta XY no es perpendicular al plano visto como filo; por lo tanto, el teorema referido no aplica en estas condiciones *(figura 7.8)*.



Análisis entre una recta de perfil XY y un plano ABCD en posición lateral
Figura 7.8

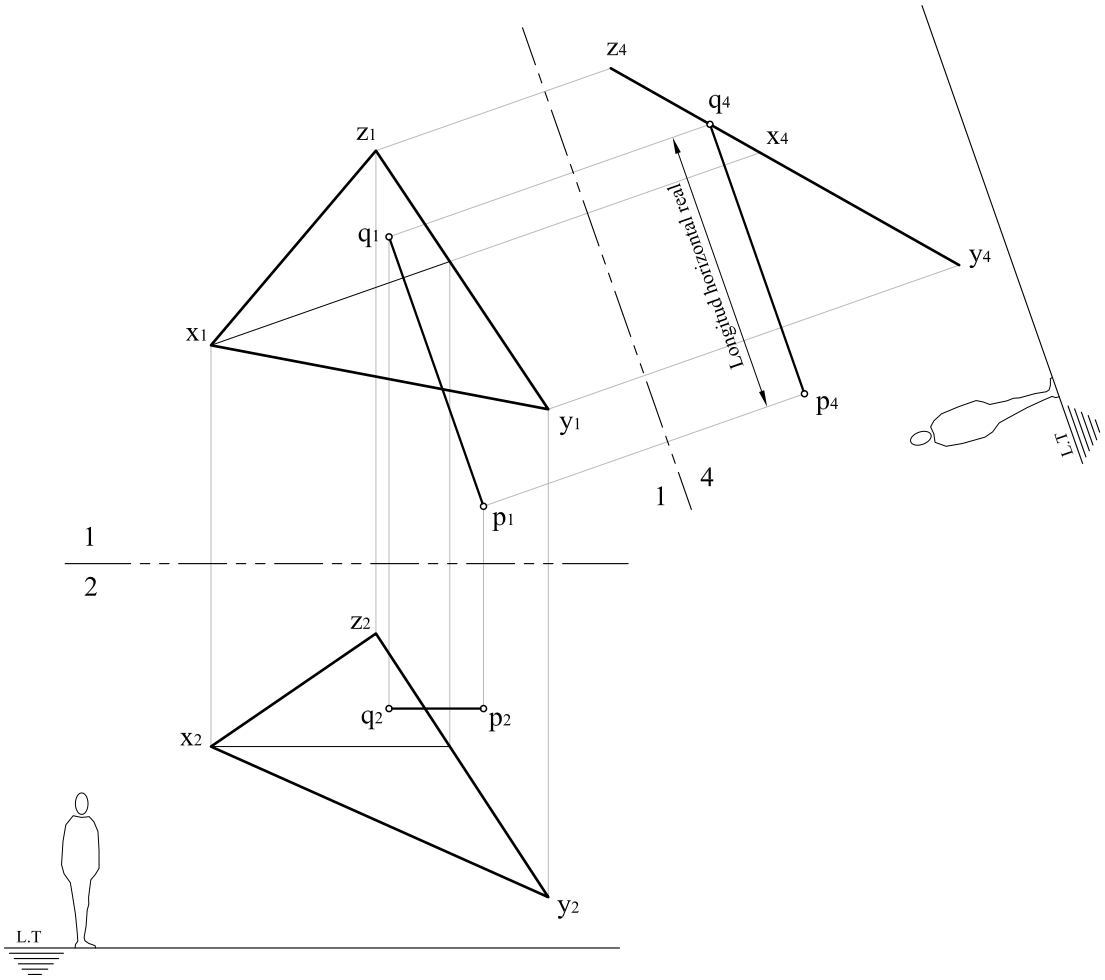
En el campo de la Arquitectura y el Diseño Industrial, suele emplearse el estudio del asoleamiento y las sombras, para analizar el grado de iluminación afectada, y las sombras arrojadas que producen los cuerpos rígidos sobre las superficies, cuando estos son afectados por una fuente de luz solar; en este caso, la aplicación del teorema anteriormente descrito, permite la construcción de rayos luminosos de manera indefinida y que sean perpendiculares a un plano de referencia., utilizando 2 vistas adyacentes.

7.2.3 Trazar la distancia horizontal más corta desde un punto exterior a un plano dado

La distancia horizontal más corta que existe entre un punto exterior no coplanar y un plano dado, es una línea paralela a la línea de tierra que parte desde el punto hasta interceptar al plano visto como filo; en este caso, se considera el siguiente teorema:

Teorema 14: La distancia horizontal más corta desde un punto exterior a un plano dado, se proyecta en una vista de alzada, donde dicha distancia es una línea paralela que parte desde el punto, hasta interceptar al plano visto como filo.

Considérese un plano XYZ dado, y un punto P exterior no coplanar; para trazar la distancia horizontal solicitada, simplemente se plantea una vista de alzada, donde el plano se proyecte como filo, y en esta misma vista, se traza la recta desde el punto p_4, de tal forma, que sea paralela a la línea de tierra, hasta que intercepte al plano visto como filo $x_4y_4z_4$, en un punto q_4. Como el tramo p_4q_4 está proyectado en verdadera magnitud, quiere decir, que el punto q_4 se relaciona hacia la vista superior, hasta que intercepte la recta auxiliar que sea paralela al eje de pliegue 1-4 y que parte desde p_1. Finalmente, se completan las demás proyecciones *(figura 7.9).*



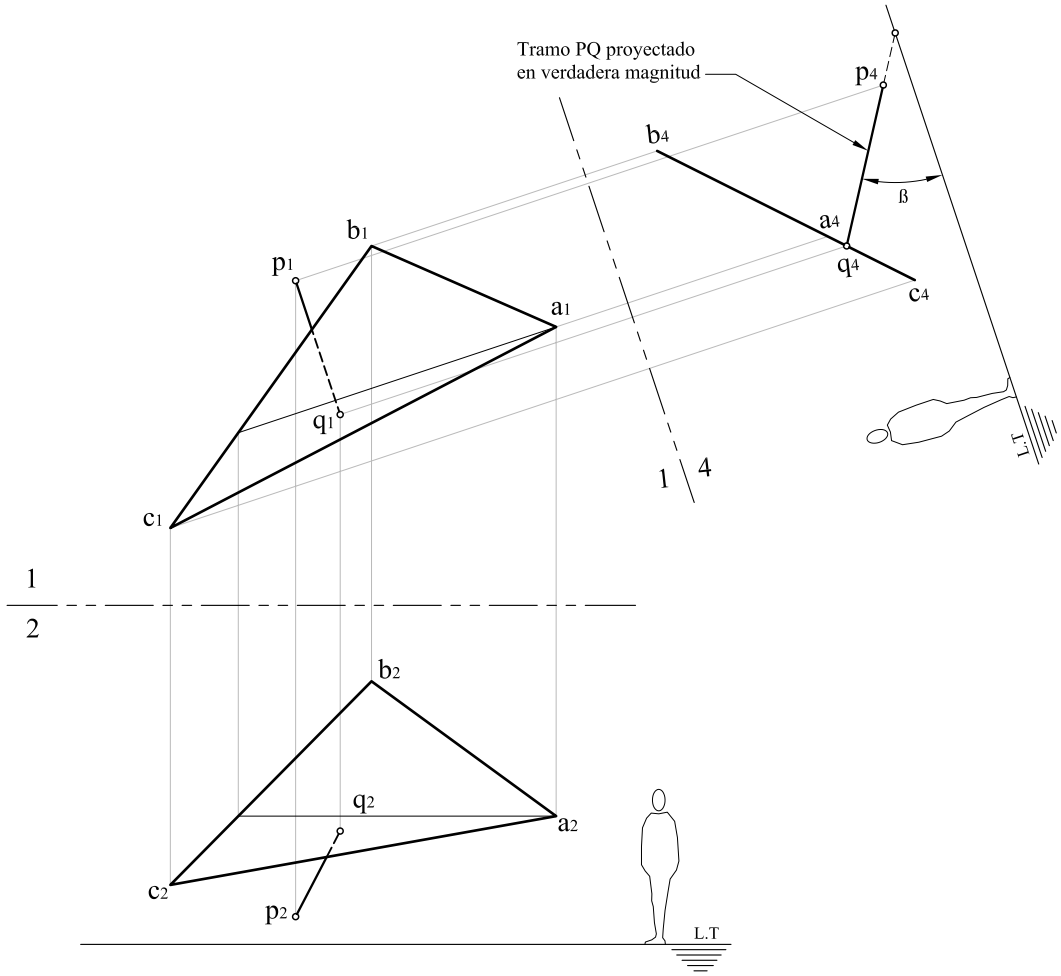
Trazar la distancia horizontal más corta desde un punto exterior P a un plano XYZ dado
Figura 7.9

7.2.4 Trazar la distancia con pendiente más corta desde un punto exterior a un plano dado

La distancia con pendiente conocida más corta que existe entre un punto exterior no coplanar y un plano dado, es una línea con ángulo real de inclinación que parte desde el punto hasta interceptar al plano visto como filo; en este caso, se tiene en cuenta el siguiente teorema:

Teorema 15: La distancia con pendiente conocida más corta trazada desde un punto exterior a un plano dado, se proyecta en una vista de alzada, donde dicha distancia proyecta su ángulo real de inclinación, y verdadera magnitud, hasta interceptar al plano visto como filo.

Supóngase un plano ABC dado, y un punto P exterior no coplanar; para trazar la distancia solicitada con pendiente establecida, se plantea una vista de alzada, donde el plano se proyecte como filo, y en esta misma vista, se traza la recta desde el punto p_4, de tal forma, que proyecte el ángulo real de inclinación (β) respecto a la línea de tierra, hasta que intercepte al plano visto como filo $a_4b_4c_4$, en un punto q_4. Como el tramo p_4q_4 está proyectado en verdadera magnitud, quiere decir, que el punto q_4 se relaciona hacia la vista superior, hasta que intercepte la recta auxiliar que sea paralela al eje de pliegue 1-4 y que parte desde p_1. Al final, se completan las demás vistas *(figura 7.10).*



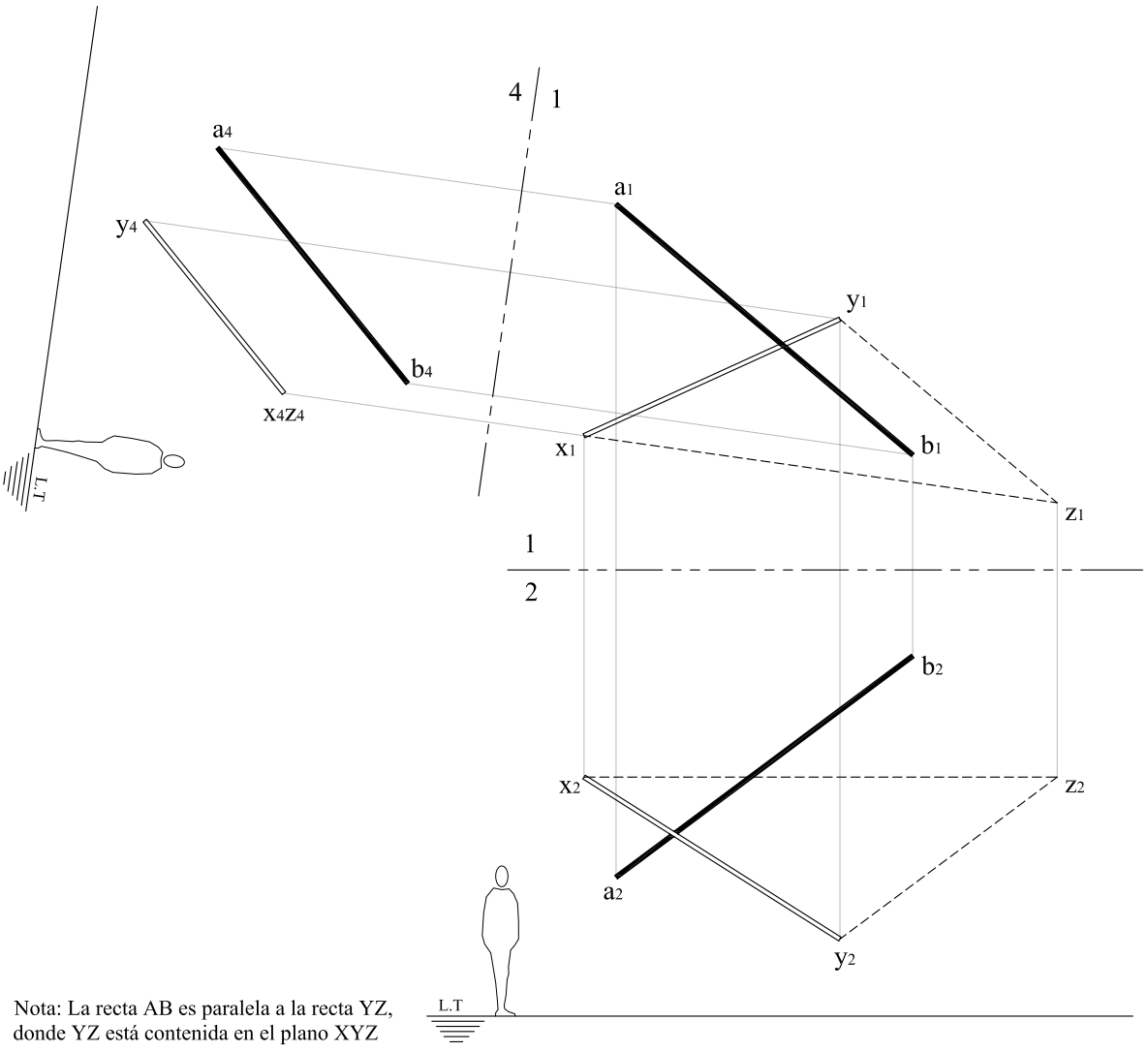
Trazar la distancia con pendiente conocida más corta desde un punto exterior P a un plano ABC dado
Figura 7.10

7.3 Relaciones entre rectas

7.3.1 Construir un plano paralelo a una recta dada y que contenga a su vez, una recta que se cruce con la anterior

Cuando dos rectas se cruzan, se puede construir un plano auxiliar que contenga una de las rectas dadas, y a su vez, dicho plano sea paralelo a la otra recta; supóngase dos rectas que se crucen, XY y AB; y se requiere construir el plano solicitado.

Bastará localizar un punto para definir un plano con una de las rectas dadas; en este caso, se localiza un vértice Z, para concretar el plano XYZ, de tal manera, que la recta YZ sea paralela a la recta dada AB; si se construye una proyección del plano como filo, se rectifica el paralelismo entre la recta AB y el plano auxiliar XYZ *(figura 7.11).*



Nota: La recta AB es paralela a la recta YZ, donde YZ está contenida en el plano XYZ

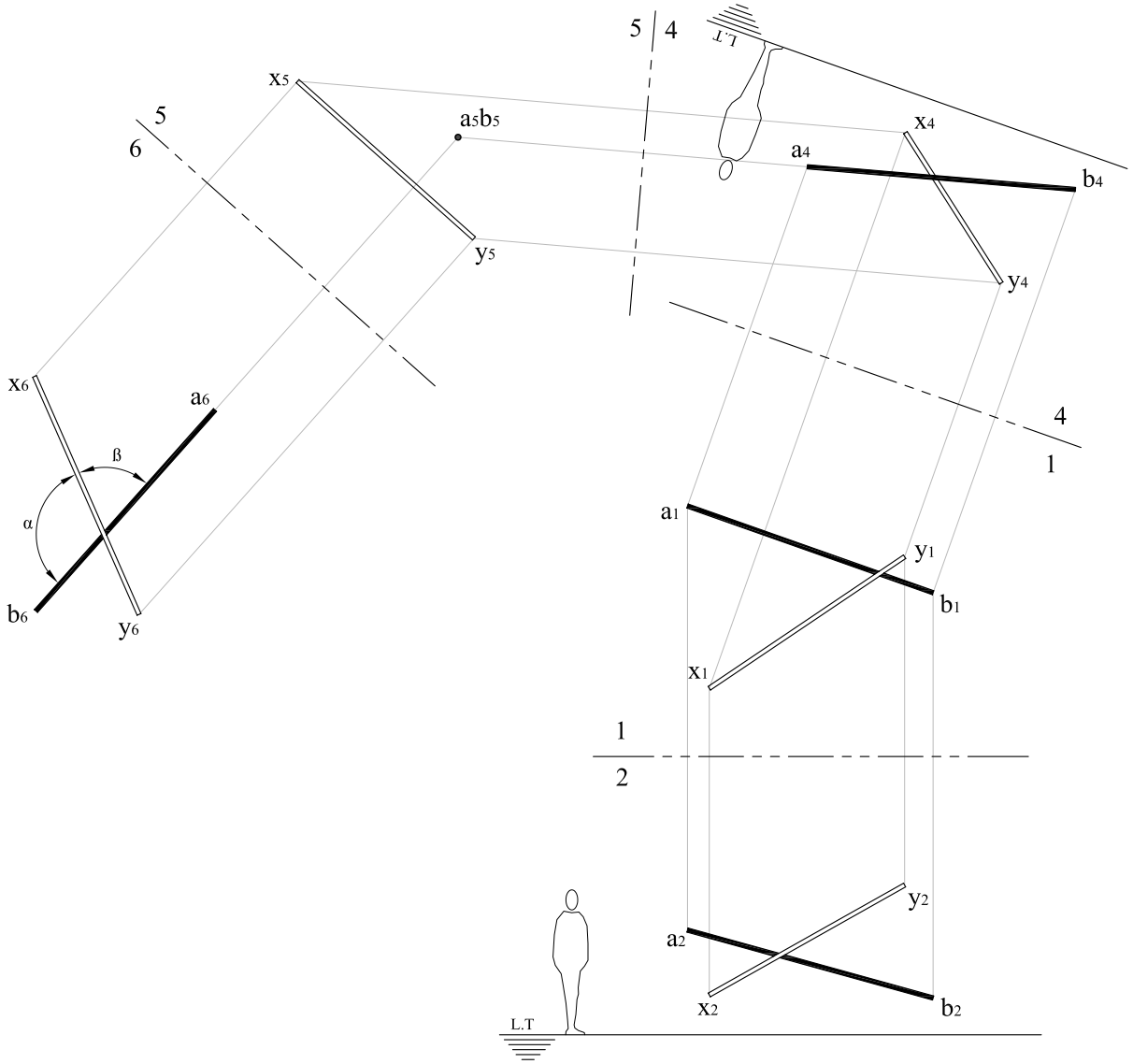
Plano paralelo a una recta dada y que contiene a su vez, una recta que se cruce con la anterior
Figura 7.11

7.3.2 Determinar el ángulo real proyectado entre dos rectas interceptadas o cruzadas

Cuando 2 rectas se interceptan o se cruzan entre sí, se proyecta un ángulo formado entre ambas; y para poder apreciar el valor real de dicho ángulo, es necesario que ambas rectas se encuentren proyectadas en verdadera magnitud; por estas razones, se deduce el siguiente teorema:

Teorema 16: El ángulo real proyectado entre dos rectas que se intercepten o se crucen entre sí, se aprecia en una vista donde ambas rectas se proyecten en verdadera magnitud.

Para conseguir este propósito, se busca una vista donde una de las rectas se proyecte como un punto, y en dicha proyección, se plantea una vista adyacente que sea paralela a la otra recta; de esta manera, se obtiene la visualización de ambas rectas en verdadera magnitud *(figura 7.12).*

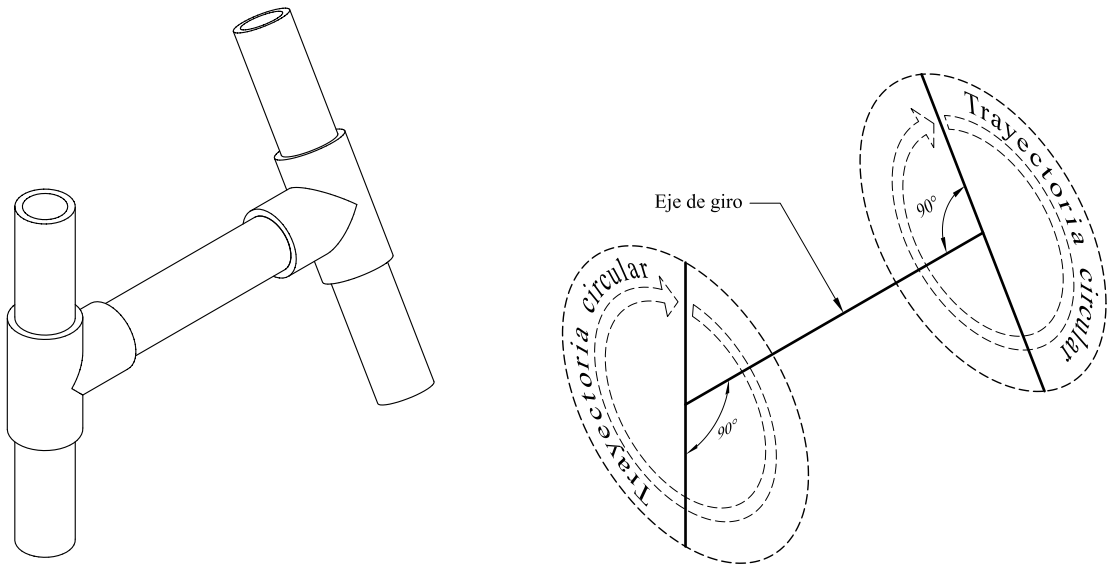


Angulo real proyectado entre dos rectas que se interceptan o se cruzan entre sí
Figura 7.12

7.3.3 Determinar la distancia más corta entre dos rectas que se cruzan

La distancia más corta entre dos rectas que se cruzan, es la perpendicular que existe entre ambas rectas; esto quiere decir, que el tramo que las conecta forma un ángulo de 90º con cada recta.

Este tipo de situación es frecuente en el área de la Ingeniería, en el cual, suelen utilizarse conectores rígidos en forma de "T" para unir dos tramos de tuberías cruzadas; cabe mencionar, que la distancia más corta entre dos rectas que se cruzan, representa un eje de giro, por medio del cual, las rectas rotan describiendo trayectorias circulares, siendo estas circunferencias paralelas entre sí *(figura 7.13).*

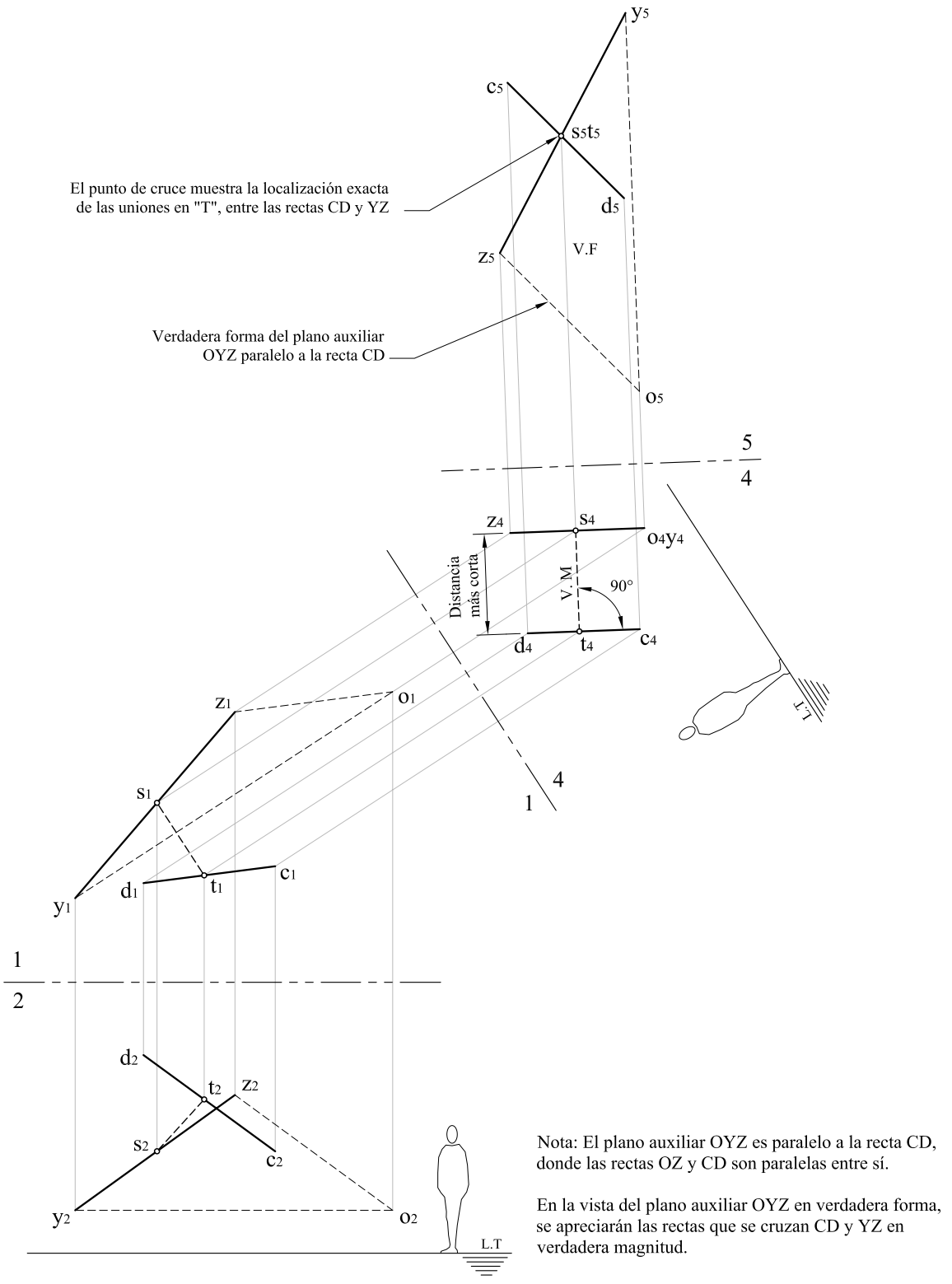


Utilización de conectores en forma de T, entre dos rectas que se cruzan
Figura 7.13

De acuerdo a la última observación, se concluye que dos rectas que se cruzan, en algún momento se proyectan paralelas entre sí, y ocurre cuando uno de los planos virtuales se proyecta como filo, o una de las rectas se proyecta como un punto; en ambos casos, la distancia más corta que existe entre ambas rectas, se proyectará en verdadera magnitud; por estas razones, se deduce el siguiente teorema:

Teorema 17: La distancia real más corta entre dos rectas que se cruzan, se aprecia en una vista donde ambas rectas se proyectan paralelas entre sí, o una de las rectas se proyecta como un punto.

Para el primer caso, es necesario construir un plano auxiliar que contenga una de las rectas, y a su vez, este plano sea paralelo a la otra recta *(véase numeral 7.3.1)*; bastará medir la equidistancia que existe en la proyección donde las dos rectas cruzadas se proyectan paralelas entre sí; además, en la vista del plano virtual en verdadera forma, se apreciarán las dos rectas en verdadera magnitud, así como, la localización exacta de las uniones en T, en el punto de cruce *(figura 7.14).*



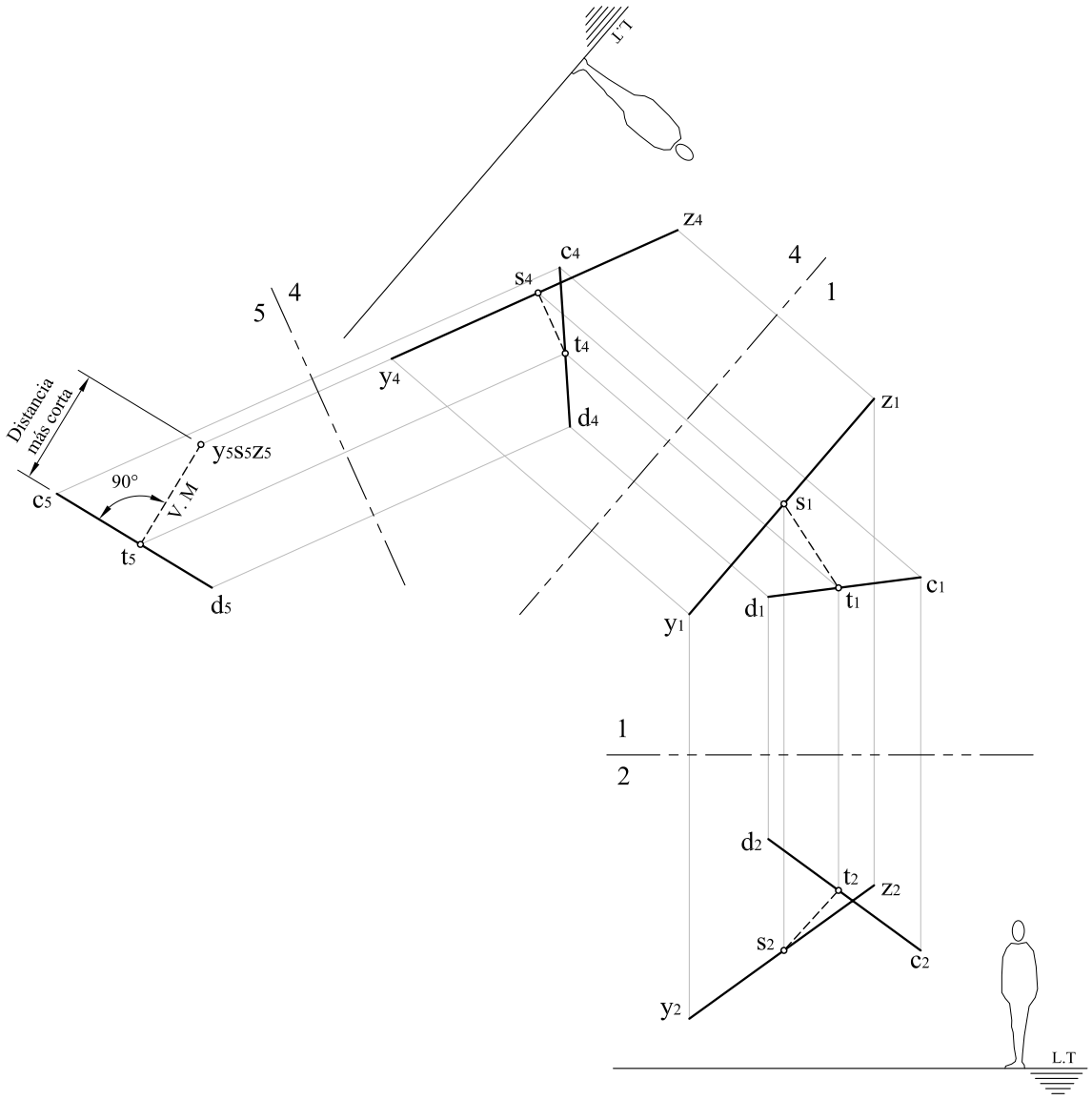
Nota: El plano auxiliar OYZ es paralelo a la recta CD, donde las rectas OZ y CD son paralelas entre sí.

En la vista del plano auxiliar OYZ en verdadera forma, se apreciarán las rectas que se cruzan CD y YZ en verdadera magnitud.

Distancia más corta entre dos rectas que se cruzan (método del plano auxiliar)
Figura 7.14

En el segundo caso, simplemente se busca una vista donde una de las rectas se proyecte como un punto, y en esta misma vista se traza una línea perpendicular desde la recta proyectada como un punto, hasta interceptar la otra recta.

Considerando el mismo ejemplo explicado en la figura 7.14, la recta y_5z_5 se proyecta como un punto, porque el eje de pliegue 4-5 es perpendicular a la recta y_4z_4, la cual, está proyectada en verdadera magnitud; se traza una recta perpendicular desde y_5z_5, donde se supone que se encuentra el extremo S, hasta interceptar la recta c_5d_5, determinando así, el extremo T; si el tramo s_5t_5 se proyecta en longitud real, quiere decir, que el tramo s_4t_4 es paralelo al eje de pliegue 4-5; finalmente, se completan las demás vistas *(figura 7.15).*

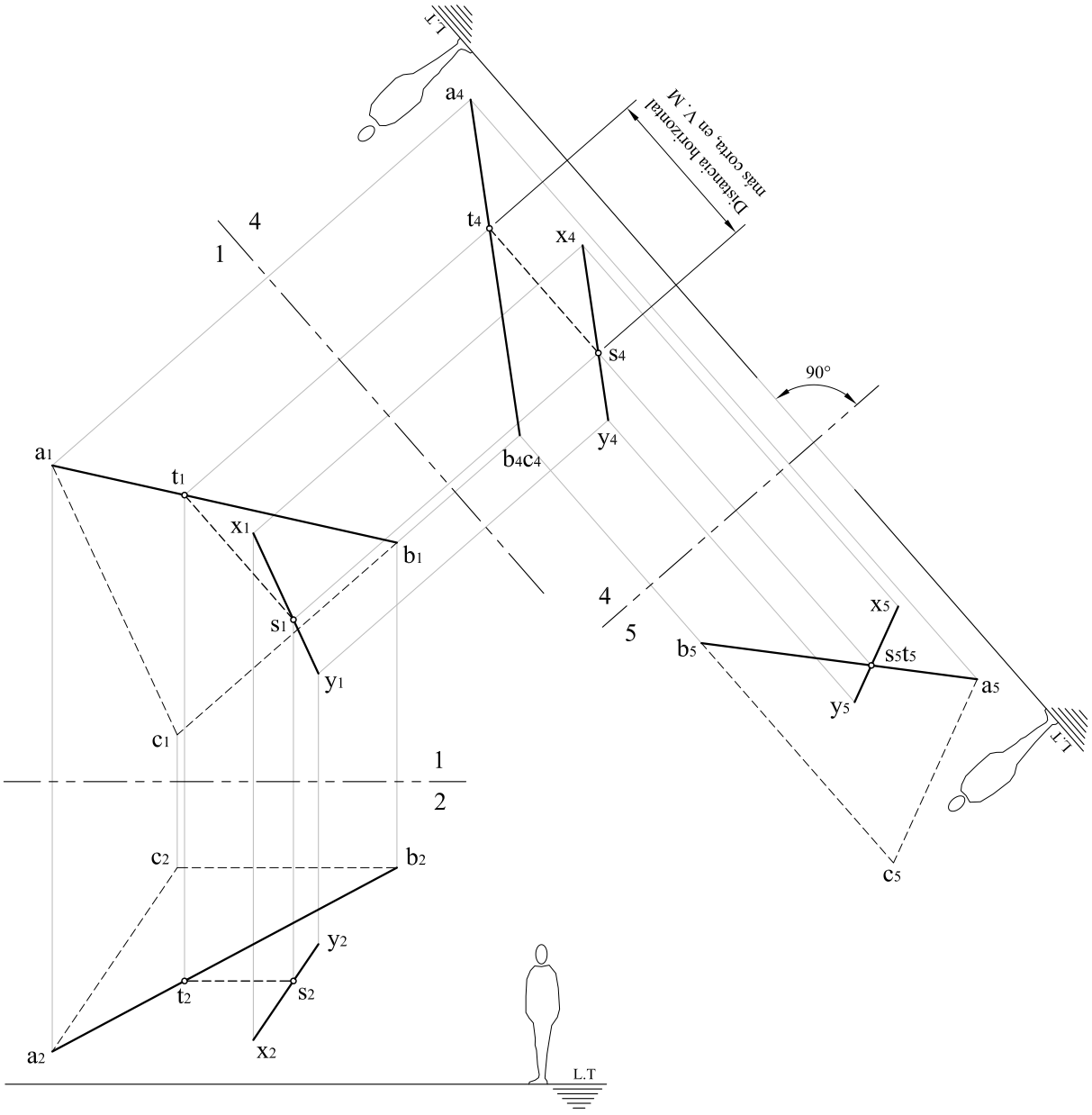


Distancia más corta entre dos rectas que se cruzan (método lineal)
Figura 7.15

7.3.4 Determinar la distancia horizontal más corta entre dos rectas que se cruzan

Dos rectas que se cruzan, se pueden conectar mediante una línea de mínima longitud, y a su vez, este nuevo tramo sea una recta horizontal; en el campo de la Minería, los tramos horizontales suelen utilizarse para facilitar la remoción de escombros mediante vagones impulsados por inercia.

La distancia horizontal más corta entre dos rectas cruzadas se aprecia en una vista adyacente a una vista de alzada donde figuren las dos rectas proyectadas paralelas entre sí, además, la nueva vista debe ser perpendicular a la línea de tierra, para poder visualizar el punto de cruce entre las dos rectas, donde se encuentran las uniones del nuevo tramo horizontal *(figura 7.16)*.

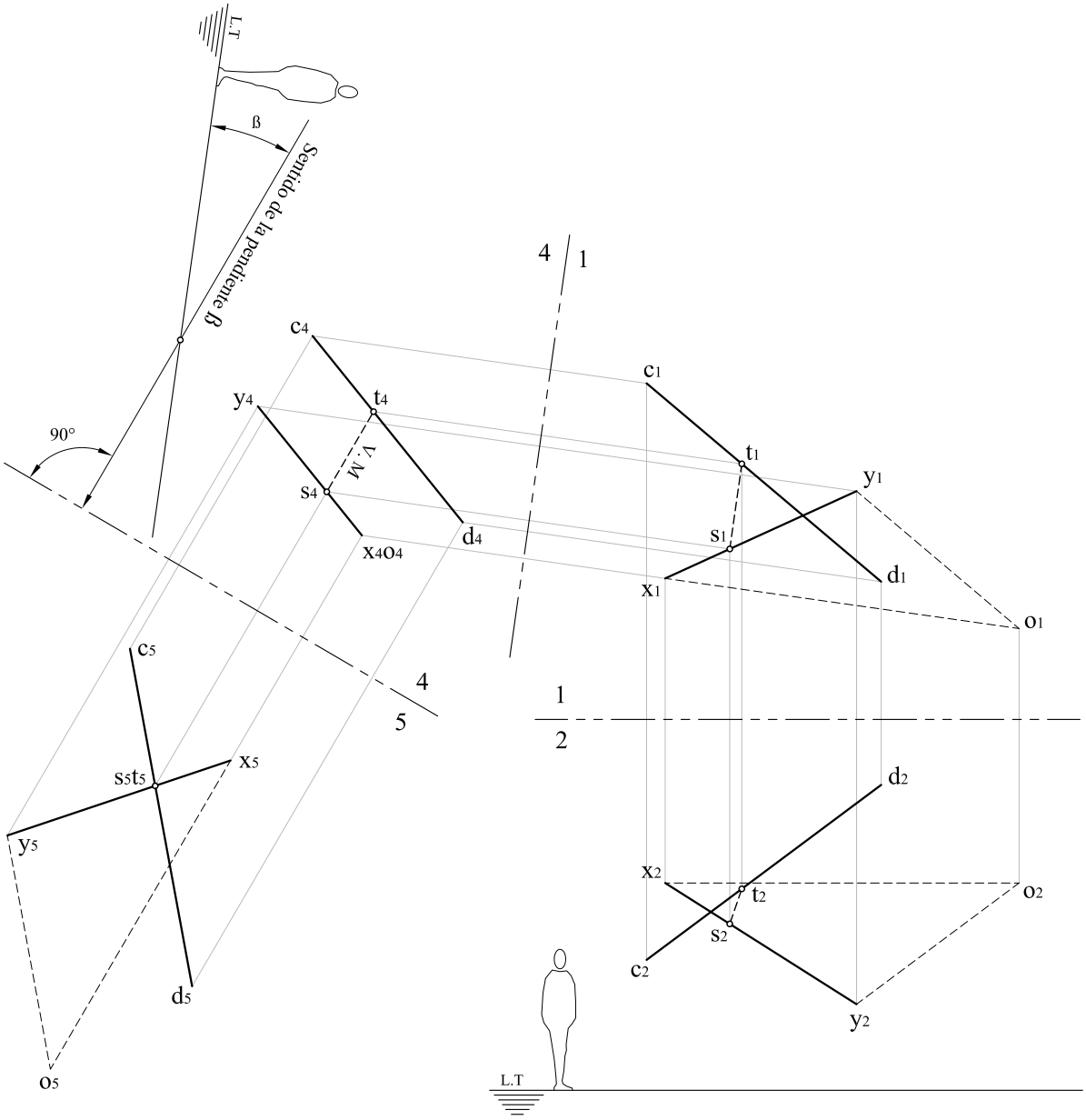


Distancia horizontal más corta entre dos rectas que se cruzan (método del plano)
Figura 7.16

7.3.5 Determinar la distancia más corta con pendiente conocida, entre dos rectas que se cruzan

Dos rectas que se cruzan, se pueden conectar mediante una línea de mínima longitud, y a su vez, este nuevo tramo sea una recta con pendiente conocida.

La distancia más corta con pendiente conocida entre dos rectas cruzadas, se visualiza en una vista adyacente a una vista de alzada donde figuren las dos rectas proyectadas paralelas entre sí, además, la nueva vista debe ser perpendicular al sentido de la pendiente dada, para poder visualizar el punto de cruce entre las dos rectas, donde se encuentran las uniones del nuevo tramo inclinado *(figura 7.17).*



Distancia más corta con pendiente conocida β entre dos rectas que se cruzan (método del plano)
Figura 7.17

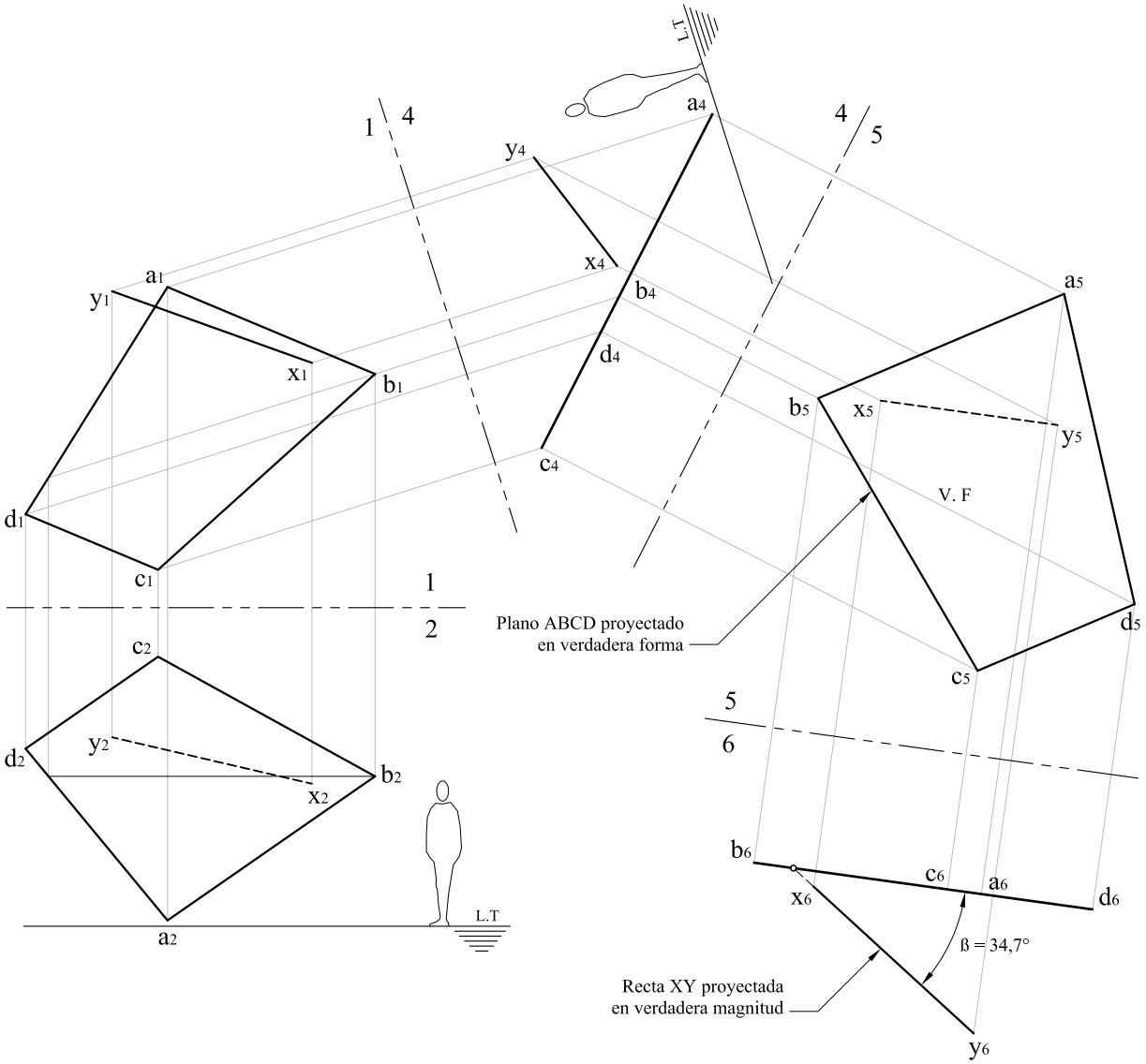
7.4 Relaciones entre rectas y planos

7.4.1 Determinar el ángulo formado entre una recta y un plano dado

Para apreciar el ángulo real que forma una recta respecto a un plano cualquiera dado, se tiene en cuenta el siguiente teorema:

Teorema 18: El ángulo real formado entre una recta y un plano dado, se aprecia en una vista donde la recta se proyecte en verdadera magnitud, y el plano a su vez, se proyecte como filo.

Se determina la verdadera forma del plano dado, y en esta proyección, se construye un eje de pliegue adyacente que sea paralelo a la recta, para poder apreciar el ángulo solicitado *(figura 7.18).*



Determinar el ángulo formado entre una recta y un plano dado
Figura 7.18

Las relaciones entre un plano y una recta, consisten en el paralelismo y la intersección; el cruzamiento no se presenta, porque al prolongar la recta y extender el plano al infinito, éstos se interceptarán en un punto.

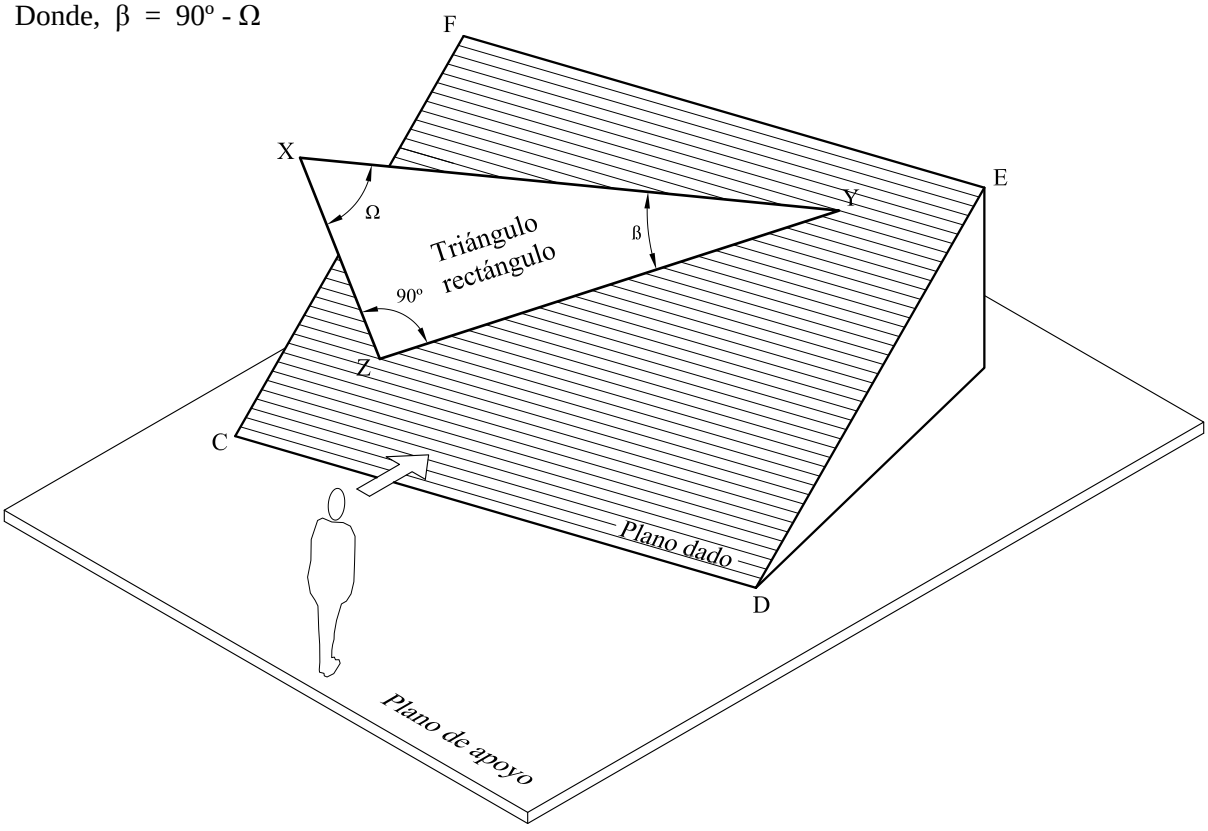
El paralelismo entre una recta y un plano, ha sido expuesto en el numeral 7.2.1, mientras que el caso de la perpendicularidad entre los mismos elementos, ha sido explicado en el numeral 7.2.2 de este mismo capítulo; queda entonces, determinar el punto de intersección de una recta respecto a un plano, cuando estos no son paralelos; este caso en particular, se analizará en el siguiente capítulo.

Cuando una recta no es paralela a un plano dado, quiere decir, que estos se interceptan en un vértice, y por lo tanto, se forma un ángulo; por eso, es conveniente conocer el valor de dicho ángulo, cuando este es distinto de 90º. El método del ángulo complementario, es un procedimiento que permite conocer el valor de dicho ángulo, sin necesidad de determinar el punto de intersección.

Este método, consiste en construir un plano que contenga la recta, y a su vez, este nuevo plano sea perpendicular al plano dado; de esta manera, el plano construido se comporta como un triángulo rectángulo, donde la recta representa la hipotenusa, y el cateto opuesto es una recta perpendicular al plano, el cual forma un ángulo Ω con la hipotenusa *(figura 7.19).*

$\beta + \Omega + 90^o = 180^o$

Donde, $\beta = 90^o - \Omega$

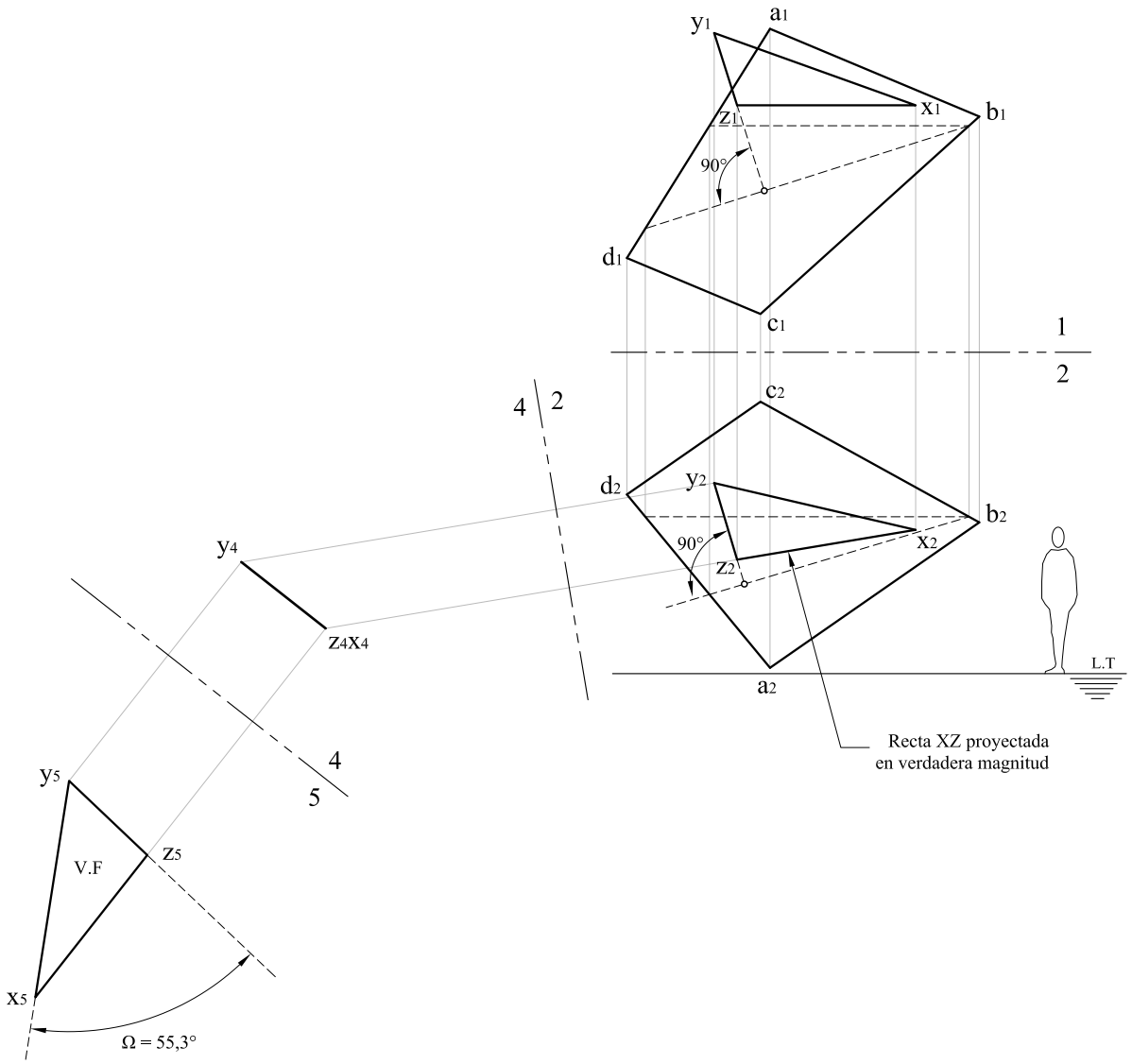


Método del ángulo complementario
Figura 7.19

La hipotenusa y el cateto opuesto, son las rectas que definen el plano; el cateto opuesto se construye con el método de las dos vistas *(véase numeral 7.2.2)*, luego, se procede a determinar la verdadera magnitud de dicho plano, y así, medir el valor del ángulo Ω; este último valor al restarse con el ángulo de 90º equivale al ángulo solicitado.

Tomando como base el mismo ejercicio en la figura 7.18; se traza desde el extremo Y la perpendicular al plano ABCD en ambas proyecciones, luego, se define el plano XYZ, y se procede a determinar la verdadera forma del mismo *(figura 7.20)*. Al final se mide el ángulo Ω, cuyo valor es 55.3º; luego, el ángulo real β que forma la recta XY con el plano ABCD, sería:

$\beta = 90^o - \Omega$, donde $\beta = 90^o - 55.3^o$, $\beta = 34.7^o$



Determinar el ángulo formado entre una recta y un plano dado (Método del ángulo complementario)
Figura 7.20

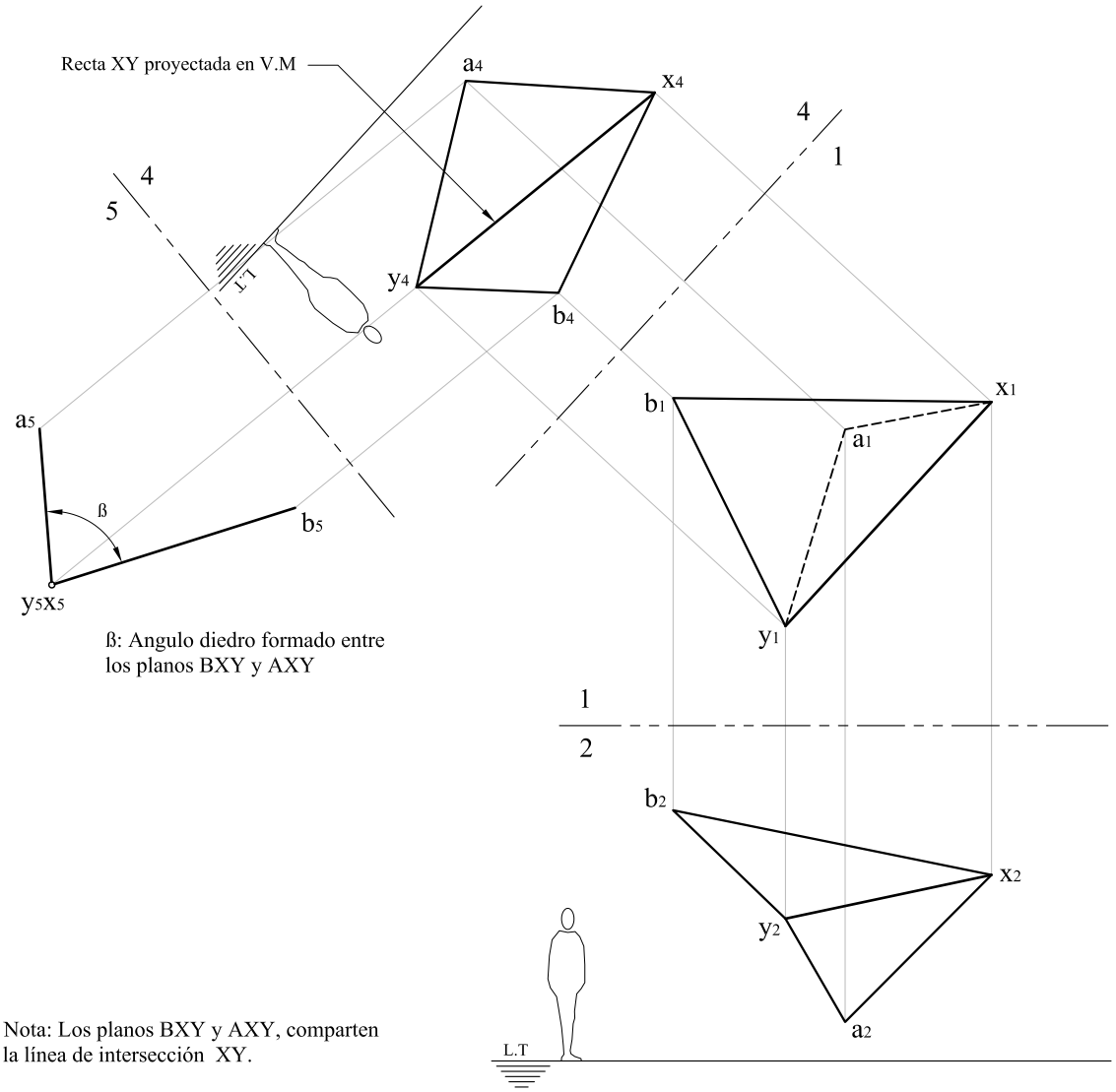
7.5 Relaciones entre planos

7.5.1 Determinar el ángulo diedro formado entre dos planos (con intersección conocida)

Para visualizar el ángulo diedro formado entre dos planos no paralelos, cuya intersección es conocida, se tiene en cuenta el siguiente teorema:

Teorema 19: El ángulo diedro formado entre dos planos no paralelos, cuya intersección es conocida, se aprecia en una vista donde la línea de intersección se visualiza como un punto.

Dos planos se interceptan en una línea que es común a ambos planos; si dicha línea de intersección se visualiza como un punto, quiere decir, que ambos planos se visualizarán como filo, y por consiguiente, se aprecia el valor del ángulo diedro formado entre los dos planos *(figura 7.21).*



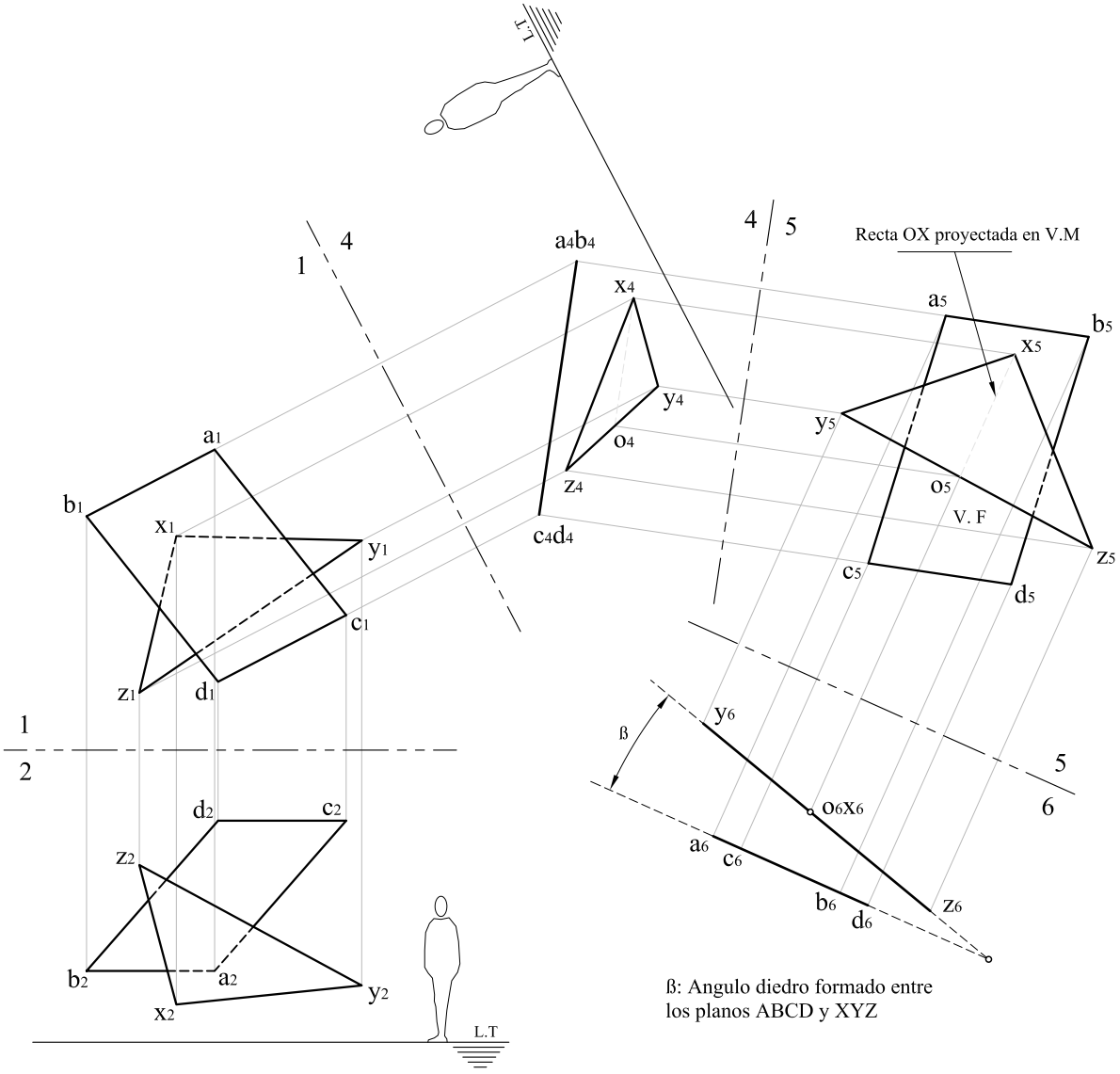
Determinar el ángulo diedro formado dos planos, cuya intersección es conocida
Figura 7.21

7.5.2 Determinar el ángulo diedro formado entre dos planos (sin conocer la intersección)

Para apreciar el ángulo diedro formado entre dos planos no paralelos, sin conocer la intersección, se tiene en cuenta el siguiente teorema, el cual, se deduce del anterior numeral:

Teorema 20: El ángulo diedro formado entre dos planos no paralelos, cuya intersección no se conoce, se aprecia en una vista donde ambos planos se proyecten como filo.

Para visualizar ambos planos como filo, simplemente se determina la verdadera magnitud de uno de los planos dados, y en esta vista, se localiza una recta en el otro plano que se proyecte en verdadera magnitud; finalmente, se plantea un eje de pliegue perpendicular a dicha recta, para apreciar ambos planos como filo *(figura 7.22).*



Determinar el ángulo diedro formado dos planos, sin conocer la intersección
Figura 7.22

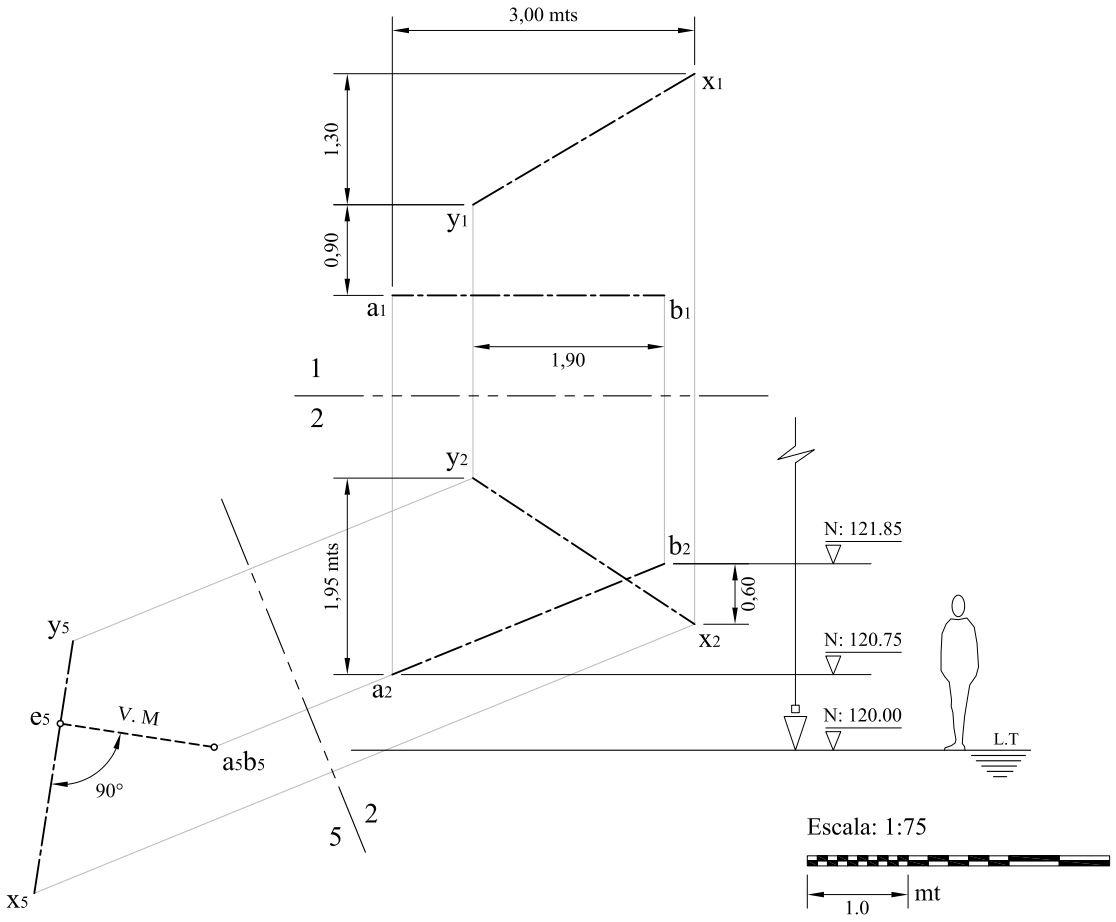
7.6 Ejemplos

7.6.1 Ejemplo 1

Dos tramos de tubería AB y XY, cuyo diámetro es de 0.90 mts; se definen de la siguiente manera: El tramo AB posee un rumbo igual al Oriente/Occidente, donde los extremos A y B, se localizan a 120.75 y 121.85 mts sobre el nivel del mar respectivamente; el vértice Y se localiza 0.90 mts al Norte de AB, 1.90 mts al Occidente de B, y 1.95 mts por encima de A; el punto X se localiza 1.30 mts al Norte de Y, 3.00 mts al Oriente de A, y 0.60 mts por debajo de B. Con esta información, se pide determinar: El margen de separación mínimo entre ambos tramos de tubería, orientación, pendiente en porcentaje del nuevo tramo, y cotas de elevación sobre el nivel del mar, de los puntos de unión del nuevo tramo.

Trabajar en sistema ASA, a escala: 1:75

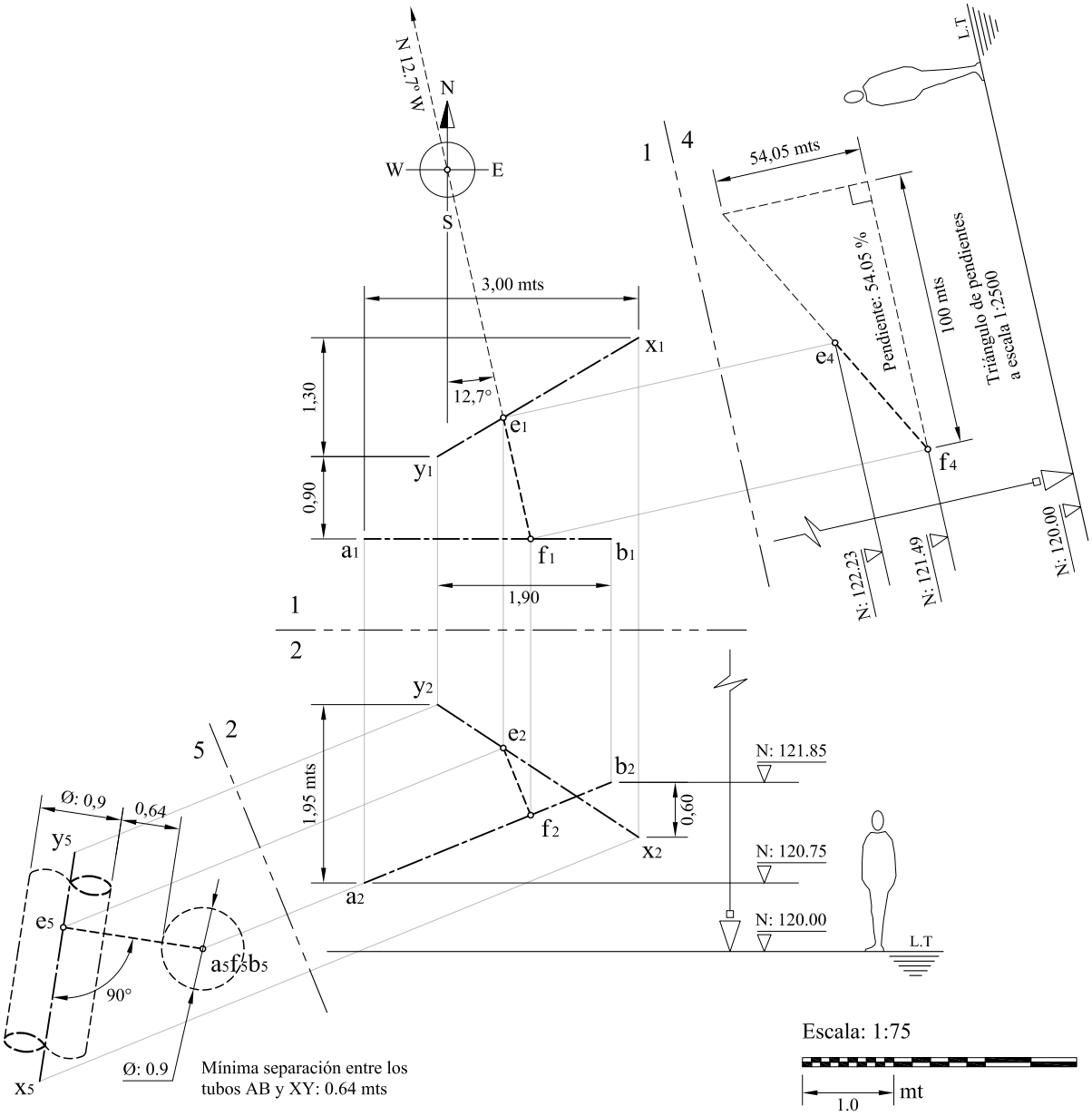
Se plantean los ejes de los tramos AB y XY, de acuerdo a las referencias especificadas; la recta AB representa una recta frontal, la cual proyecta su longitud real en la vista frontal; luego, se plantea un eje de pliegue 2-5 perpendicular a la recta a_2b_2, para visualizar dicha recta como un punto; en la vista 5 se dibuja la recta perpendicular desde a_5b_5 hasta interceptar la recta x_5y_5 en el punto e_5 *(figura 7.23).*



Planteamiento del ejemplo 1
Figura 7.23

En la vista 5 se dibujan los contornos de los diámetros de las tuberías, para poder medir el margen de separación mínima entre dichos tubos; luego, se relaciona el punto e_5 hacia la vista frontal, y desde el punto e_2 se traza una línea paralela al eje de pliegue 2-5, hasta interceptar la recta a_2b_2 en el punto f_2.

Se construye una vista de alzada cuyo eje de pliegue 1-4 sea paralelo a la recta e_1f_1, y en esta vista se construye un triángulo de pendientes a escala: 1: 2500, para determinar su respectiva pendiente en porcentaje; luego, se proyectan los extremos hacia una línea de referencia de alturas, y de esta manera, establecer las cotas de elevación de dichos extremos; finalmente, se mide en la vista superior el rumbo u orientación que forma el tramo e_1f_1 respecto a la línea N-S de referencia *(figura 7.24).*

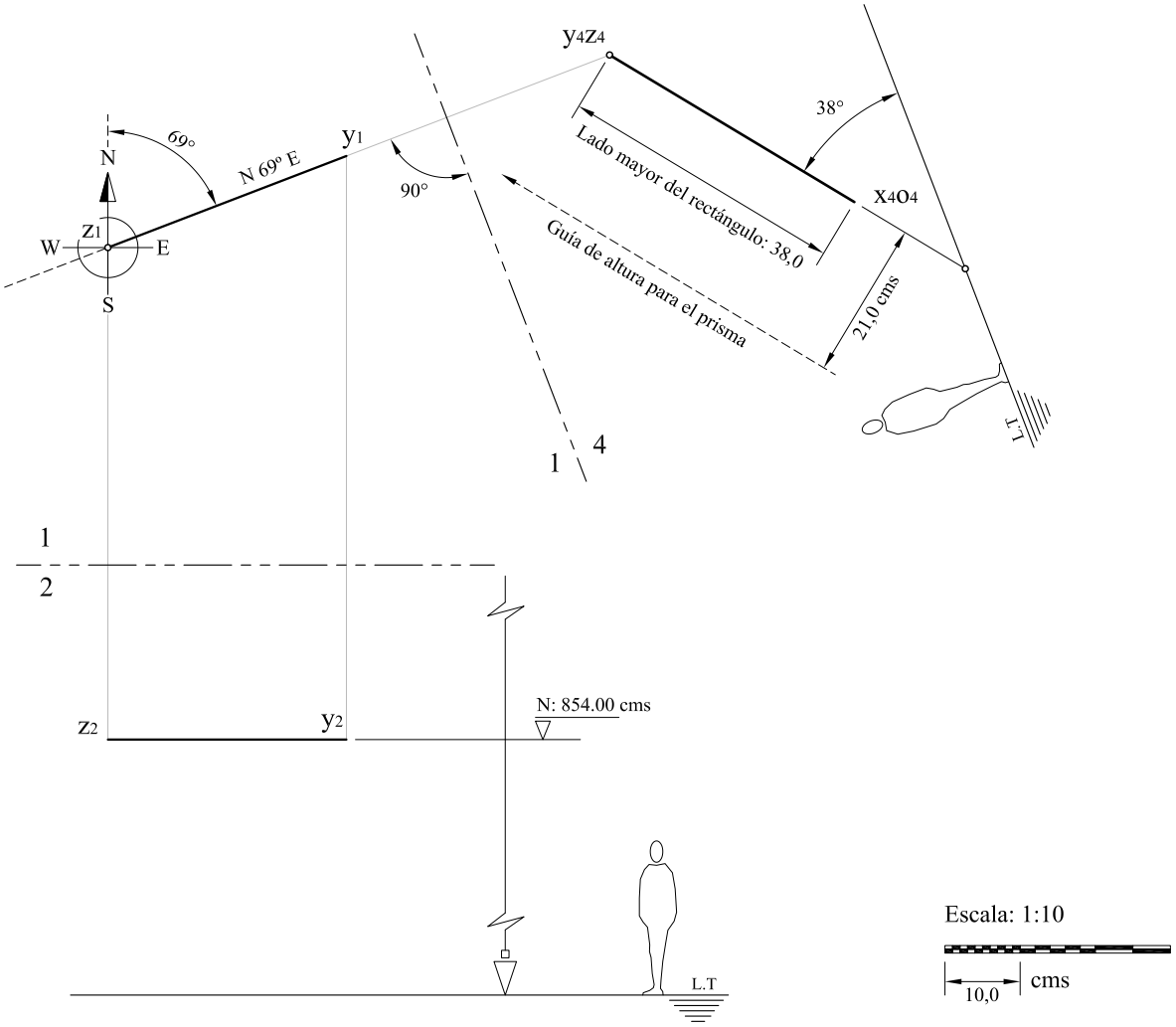


Desarrollo del ejemplo 1 (Método lineal)
Figura 7.24

7.6.2 Ejemplo 2

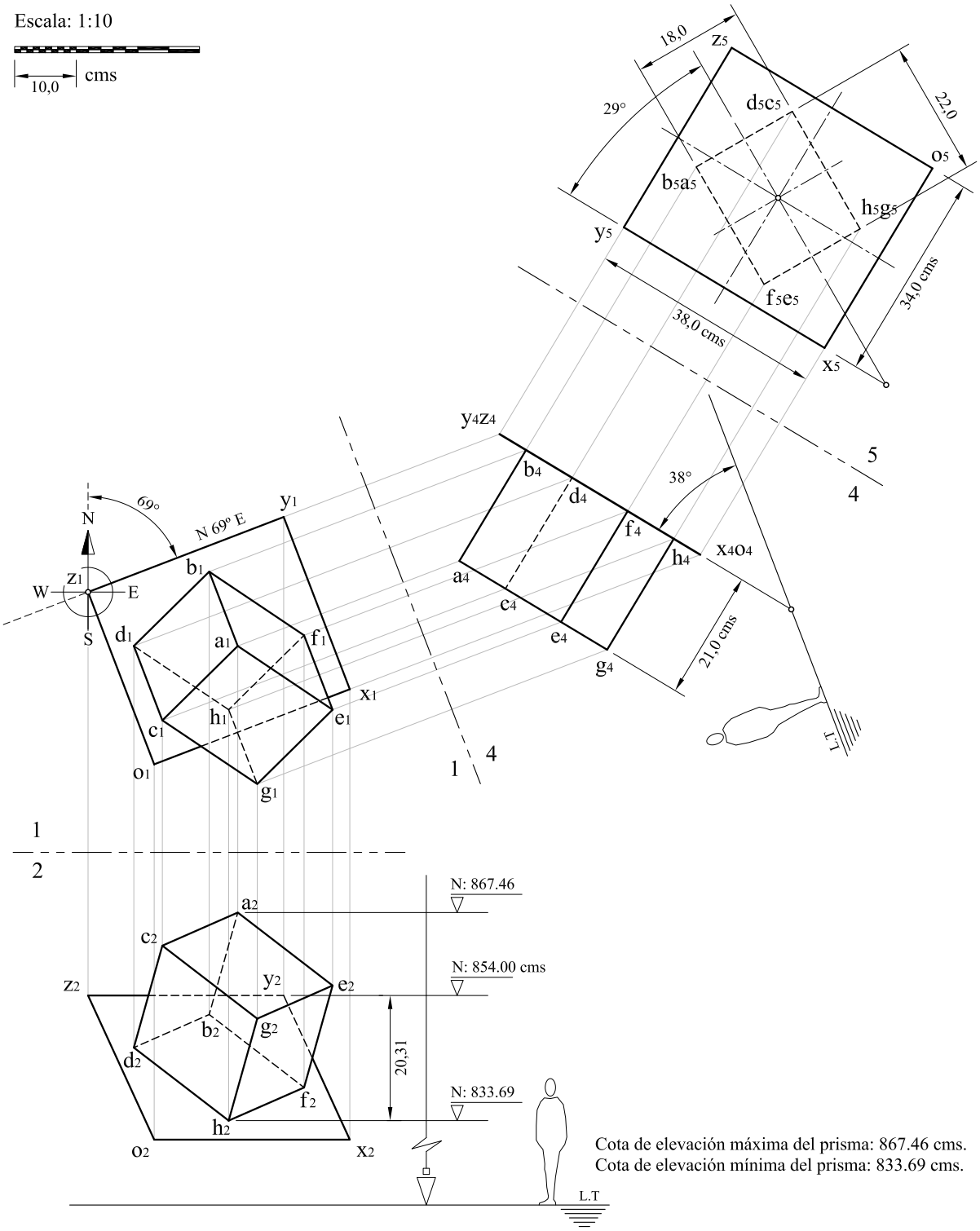
El lado menor de un rectángulo YZ posee una cota de elevación de 854 cms sobre el nivel del mar, y posee un rumbo desde Z hacia Y de N 69º E. Se pide construir un rectángulo OXYZ, el cual, posee un ángulo de inclinación de 38º respecto al plano de apoyo, y sus dimensiones reales son: 34.0 x 38.0 cms; además, se debe ubicar un prisma apoyado sobre el rectángulo, cuya base rectangular mide 18.0 x 22.0 cms, y altura 21.0 cms, de tal forma, que el lado mayor de la base del prisma forme un ángulo de 29º respecto al lado mayor del rectángulo referenciado; dibuje todas las proyecciones, y visualice. ¿Cuáles son las cotas de elevación máxima, y mínima que tendrá el prisma? Sistema ASA, escala: 1:10.

En este caso, la recta YZ del rectángulo consiste en una recta horizontal, la cual se localiza de acuerdo a las referencias especificadas; luego, se dibuja un eje de pliegue 1-4 perpendicular a su rumbo, para visualizar en la nueva vista el rectángulo OXYZ como filo; además, se podrá visualizar también, el ángulo de inclinación, y la longitud del lado mayor; por lo tanto, sobre este plano visto como filo, se traza una línea paralela a $o_4x_4y_4z_4$ con una equidistancia igual a la altura del prisma *(figura 7.25).*



Planteamiento del ejemplo 2
Figura 7.25

Se determina la V. F del plano OXYZ, y se construye el prisma según las instrucciones *(figura 7.26).*



Desarrollo del ejemplo 2
Figura 7.26

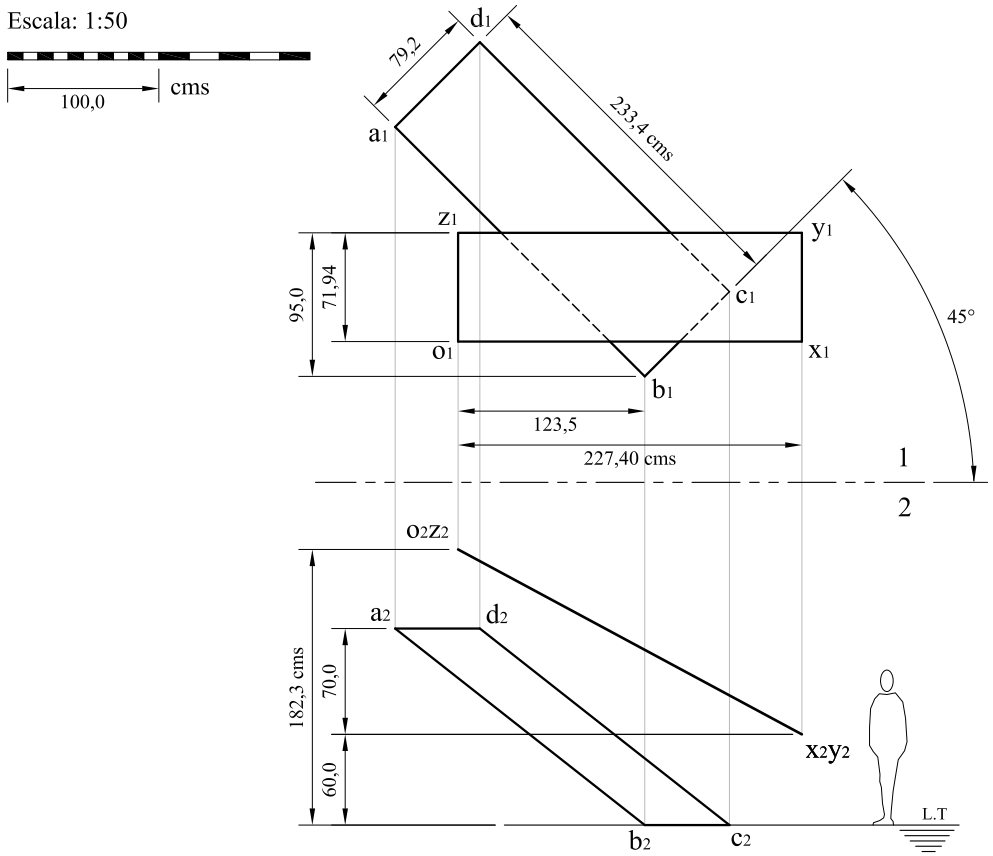
7.6.3 Ejemplo 3

En el grafico expuesto a continuación, se muestran dos rampas de transporte de cajas que se cruzan entre sí (rampas ABCD y OXYZ), las cuales se encuentran dimensionadas y referenciadas en cms.

Se requiere determinar la distancia más corta que se presenta entre ambas rampas, con el fin de conocer la altura máxima permitida de las cajas que circulan por la rampa ABCD con una tolerancia de -1.0 cm; siempre en cuando, el ancho de la caja no exceda el ancho de su respectiva rampa. Trabajar en sistema ASA, a escala: 1:50 *(figura 7.27).*

Como las cajas van apoyadas sobre el plano ABCD, quiere decir, que las caras verticales de las mismas forman un ángulo de 90º respecto al plano de transporte; por lo tanto, el problema se reduce en visualizar las aristas AB y CD como un punto (método lineal), o visualizar el plano ABCD como filo (método del plano); en cualquiera de las dos formas, se procede a construir la distancia más corta desde AB ó CD (vistas como puntos), hasta la arista más cercana del plano OXYZ.

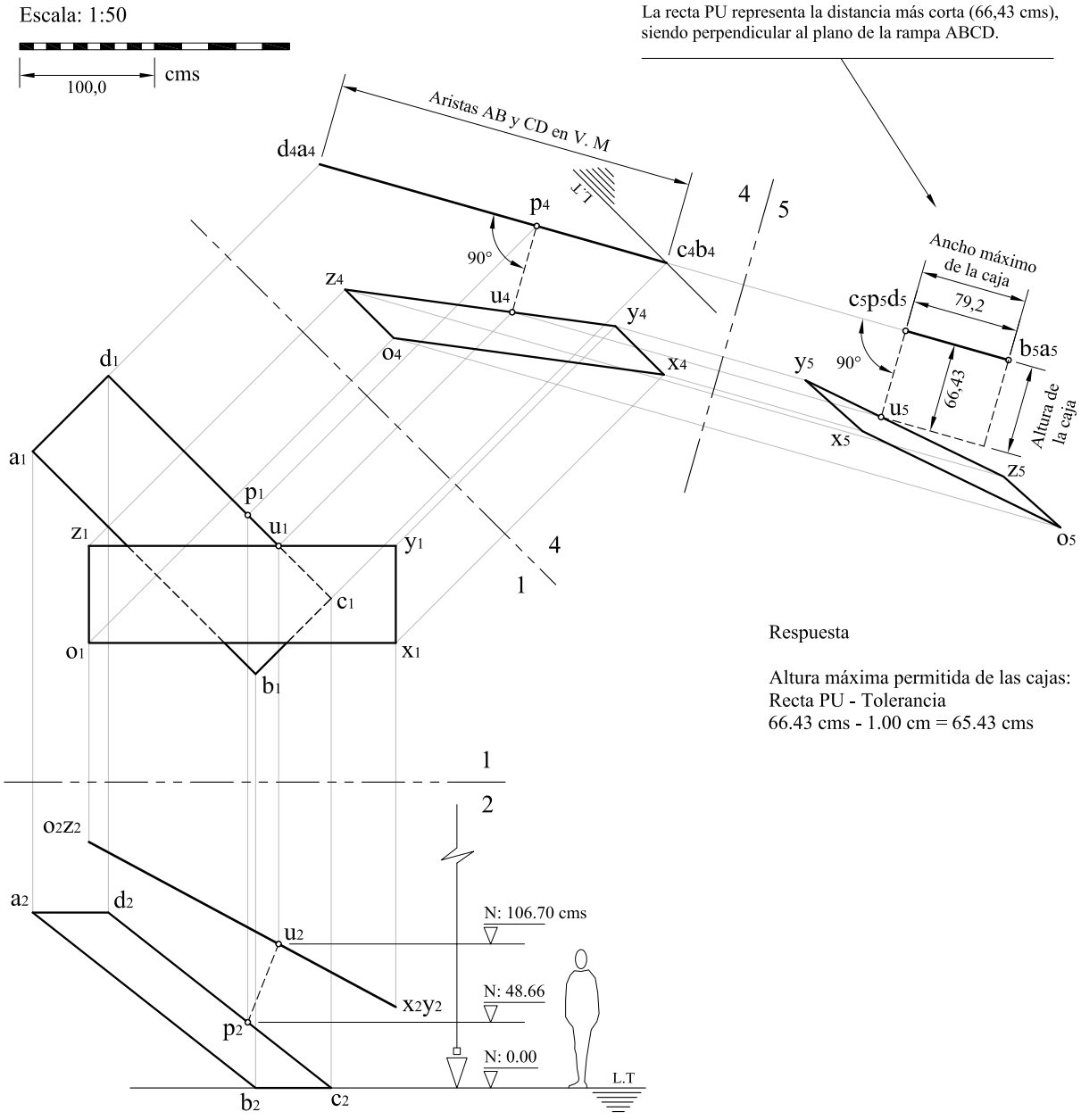
En el primer caso, se procede a determinar la verdadera forma de las aristas AB y CD; luego, se plantea un eje de pliegue perpendicular a dichas aristas, para apreciarlas en la nueva vista como un punto, y por consiguiente, el plano ABCD se visualizará como filo. Desde c_5d_5 se dibuja una línea que forme 90º con el plano $a_5b_5c_5d_5$ hasta interceptar la arista y_5z_5 en el punto u_5; de esta manera, el nuevo tramo PU, representa la mínima distancia entre los planos ABCD y OXYZ.



Planteamiento del ejemplo 3
Figura 7.27

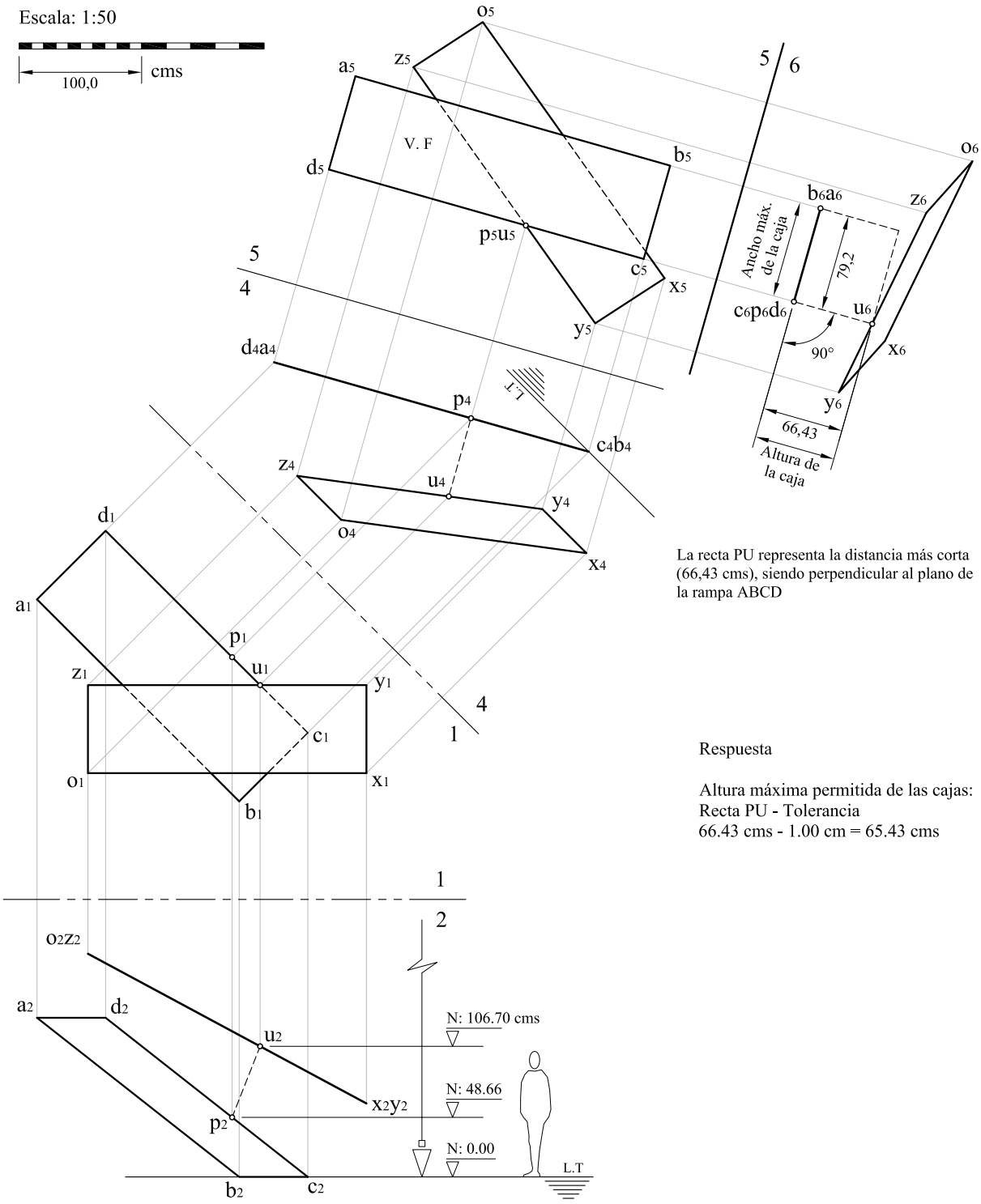
Se dibuja el tramo PU hasta la vista frontal si se requiere determinar la cota de elevación de los puntos de contacto respecto al nivel de apoyo.

Finalmente, se completa el dibujo de tal manera, que se especifique la altura permitida de las cajas, y que el ancho corresponda con el ancho de la rampa que las transporta; luego, la altura máxima permitida de las cajas será: PU - Tolerancia, o sea, 66.43 cms - 1.00 cm = 65.43 cms *(figura 7.28)*



Desarrollo del ejemplo 3 (método lineal)
Figura 7.28

Con el método del plano, se procede a determinar la V.F del plano ABCD, luego, se dibuja una vista donde las aristas AB y CD se proyecten como puntos, y se determina la distancia mínima *(figura 7.29)*



Desarrollo del ejemplo 3 (método del plano)
Figura 7.29

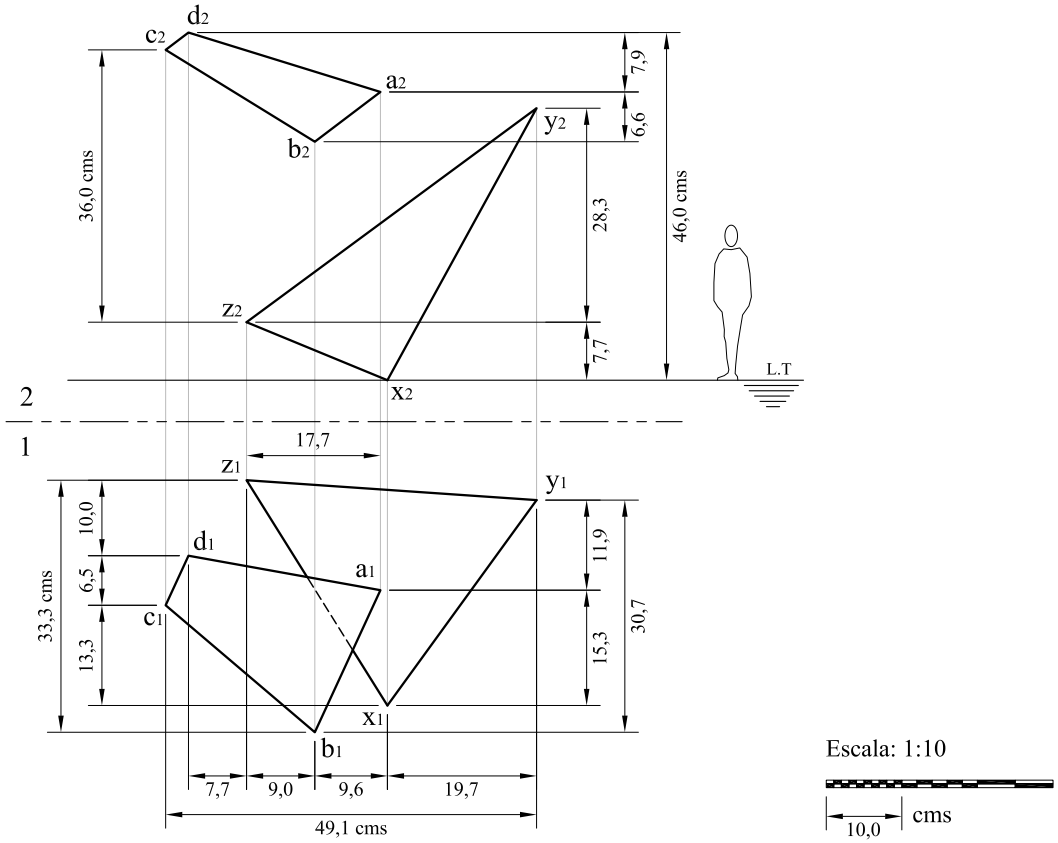
7.6.4 Ejemplo 4

En el gráfico expuesto a continuación, se muestran dos planos en posición oblicua ABCD y XYZ, los cuales se encuentran dimensionados y referenciados en cms *(figura 7.30).*

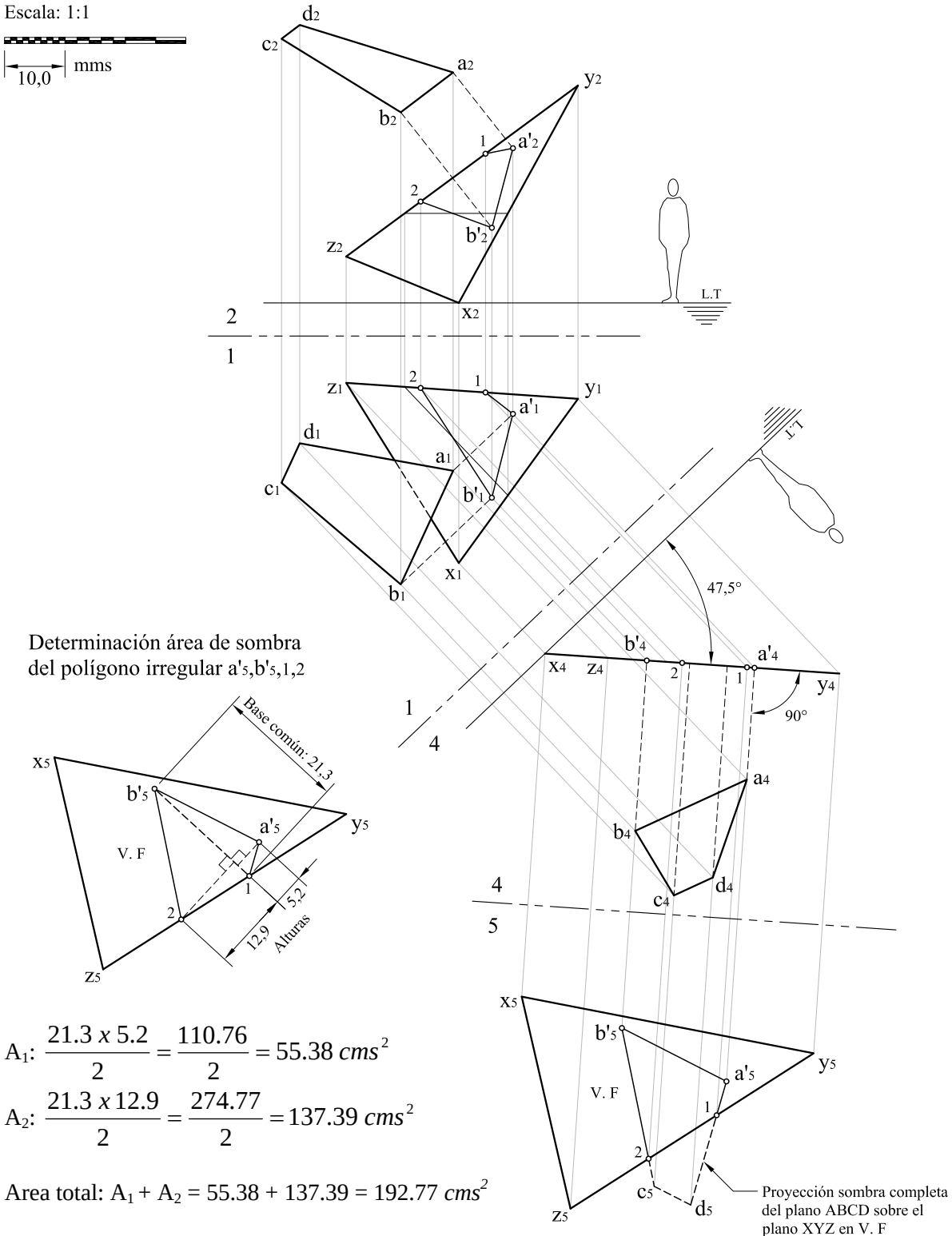
Se requiere proyectar la sombra del plano ABCD sobre el plano XYZ, de tal manera, que los rayos de luz sean perpendiculares al plano en que inciden; muestre el procedimiento completo, y dibuje la sombra en todas las vistas. ¿Cuál será el área de la sombra proyectada? Sistema DIN, a escala:1:10.

Se procede a determinar una vista del plano XYZ como filo, y en esta proyección se dibujan los rayos luminosos desde los puntos a_4, b_4, c_4, y d_4, de tal manera, que sean perpendiculares al plano $x_4y_4z_4$; después, se construye una vista donde se visualice la verdadera forma del plano XYZ, así como, la proyección real de la sombra solicitada.

En la vista 5 se comprueba que la sombra sobresale los límites del plano $x_5y_5z_5$, por esta razón, se define el polígono de sombra con los puntos a'_5, b'_5, 1, y 2, los cuales, se relacionan hacia la vista frontal; al final, se completan las proyecciones, sin necesidad de considerar los rayos luminosos que parten de los puntos C y D, debido a que estos proyectan la sombra por fuera de los límites del plano XYZ. En la vista 5, se descompone el polígono a'_5-b'_5-1-2, en dos triángulos, para proceder a calcular el área total de la sombra proyectada *(figura 7.31).*



Planteamiento del ejemplo 4
Figura 7.30



$$A_1: \frac{21.3\ x\ 5.2}{2} = \frac{110.76}{2} = 55.38\ cms^2$$

$$A_2: \frac{21.3\ x\ 12.9}{2} = \frac{274.77}{2} = 137.39\ cms^2$$

Area total: $A_1 + A_2 = 55.38 + 137.39 = 192.77\ cms^2$

Desarrollo del ejemplo 4 (Método del plano)
Figura 7.31

7.7 Ejercicios

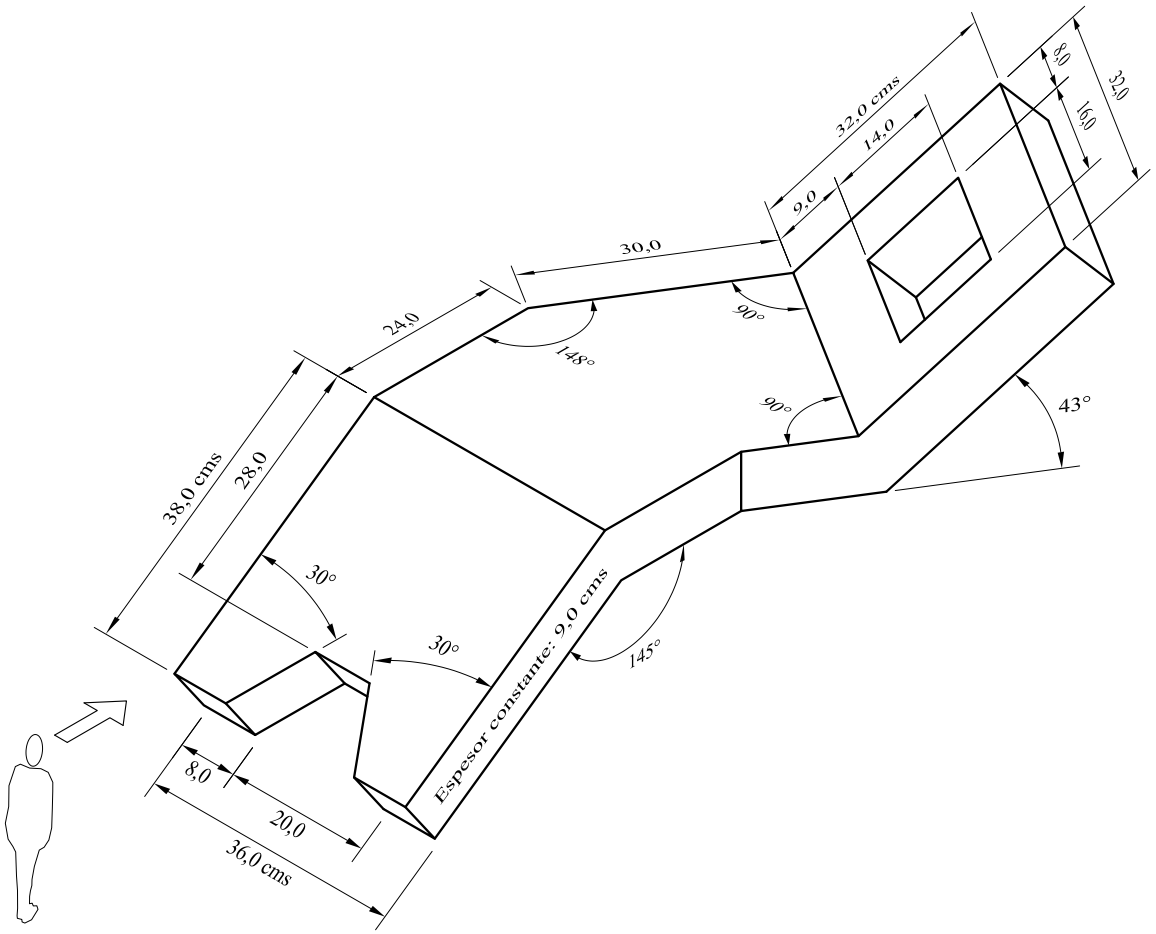
7.7.1 Ejercicio 1

El centro de un tanque en forma de esfera, cuyo radio es de 160.0 cms, se localiza 50.0 cms al Norte de un punto X, 260.0 cms al Oriente de X, y posee una cota de elevación de 1160.0 cms sobre el nivel del mar. Desde un punto X, el cual se encuentra situado a 1055.0 cms sobre el nivel del mar, se proyecta una tubería cuyo Ø exterior es de 70.0 cms, en dirección S 50º E, y con una pendiente ascendente de 47º. ¿Cuál será el margen de separación mínimo entre la esfera y el tubo?

Trabajar en sistema DIN, a escala: 1:25; utilice un formato de 1/2 pliego de papel.

7.7.2 Ejercicio 2

Construya las tres vistas principales del objeto cuyas dimensiones están expresadas en cms; muestre el procedimiento completo, visualice, y dimensione las magnitudes reales del mismo; tenga en cuenta la posición del observador para la vista frontal *(figura 7.32).* Trabajar en sistema ASA, a escala: 1: 10; utilice un formato de 1/4 de pliego de papel.



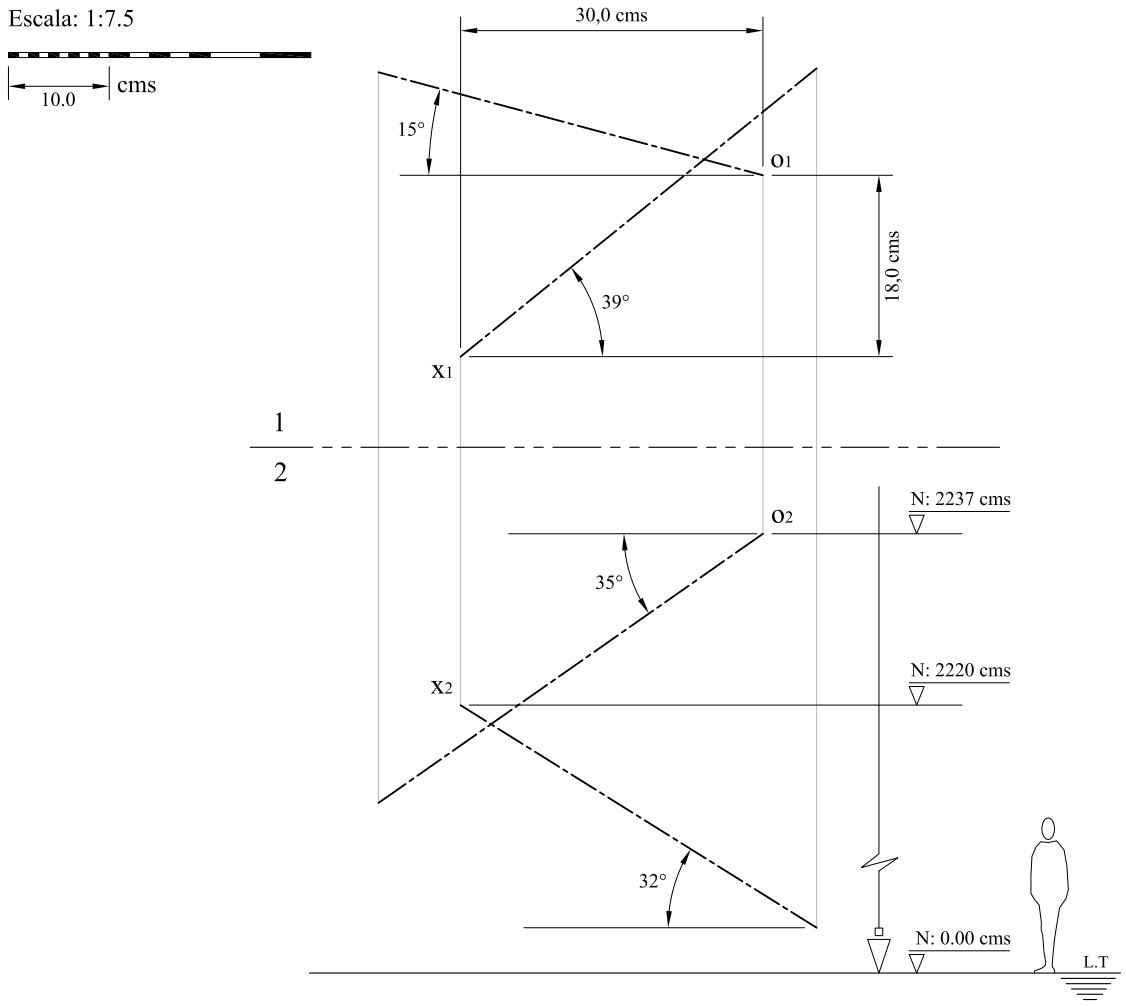
Perspectiva del objeto, ejercicio 2
Figura 7.32

7.7.3 Ejercicio 3

Desde un punto A situado a una altura de 1740 mts sobre el nivel del mar, parte un túnel con un rumbo N 40º E, y una pendiente ascendente del 25%; un segundo túnel que parte desde un punto B, el cual se encuentra 25.0 mts al Norte, 162.0 mts al Este, y 25.0 mts por encima de A, posee un rumbo N 75º W, y una pendiente ascendente del 68%. Construir el túnel más corto que conecte los túneles A y B, determine el rumbo, la pendiente expresada en grados sexagesimales, y altura sobre el nivel del mar de las uniones. Trabajar en sistema ASA, a escala: 1:2000; utilice un formato de 1/4 de pliego de papel.

7.7.4 Ejercicio 4

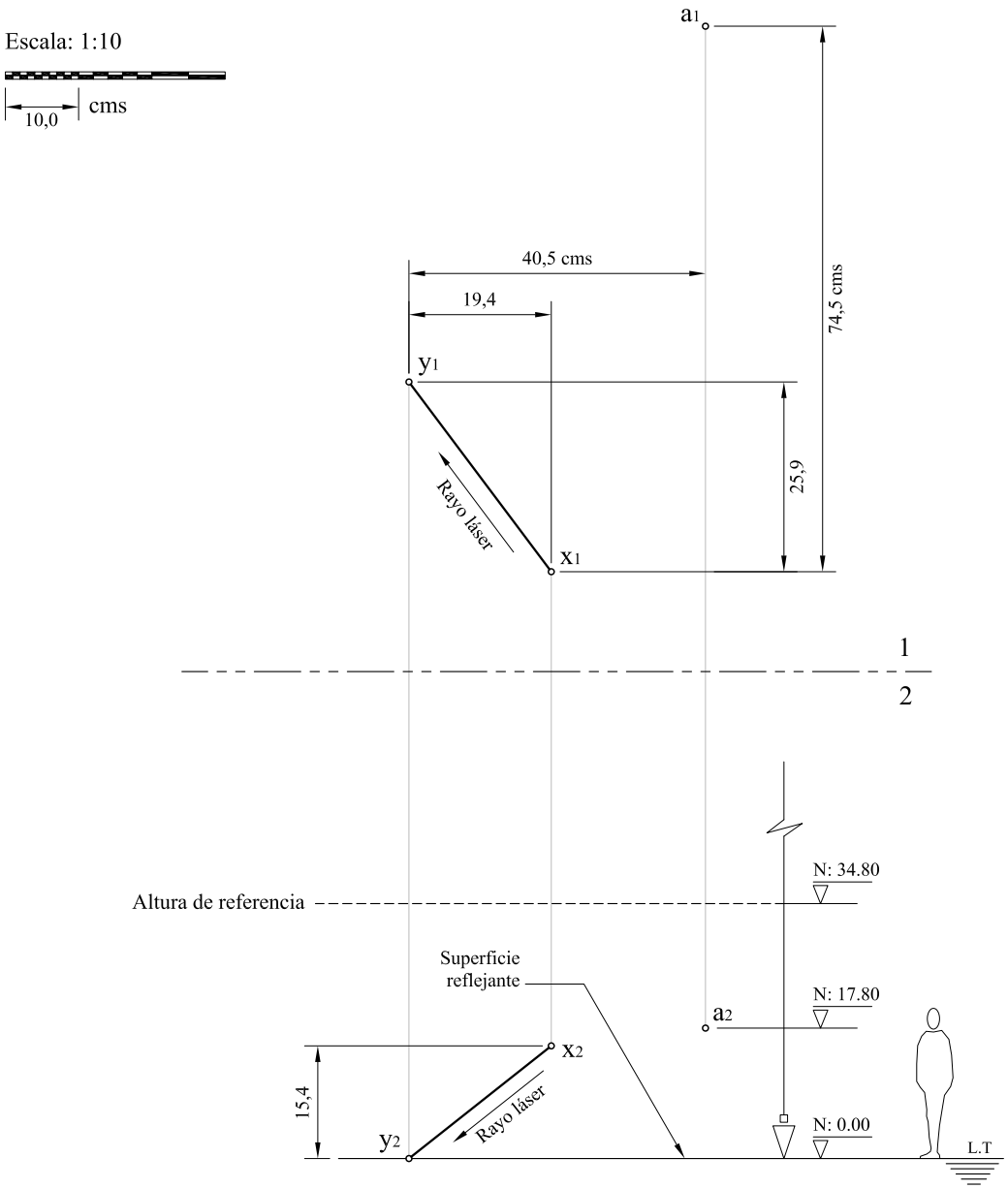
En el gráfico expuesto a continuación, se muestran dos ejes de tuberías O y X, cuyo diámetro es de 6.0 cms cada uno. Se pide determinar el margen de separación mínimo entre las dos tuberías. ¿Cuánto habrá que elevar o descender verticalmente la tubería X, conservando la misma pendiente?, esto con el propósito de fundir una capa de aislamiento de 7.0 cms de espesor entre ambas tuberías. Trabajar en sistema ASA, a escala: 1:7,5; utilice un formato de 1/4 de pliego de papel *(figura 7.33)*.



Planimetría de los ejes de tubería O y X, Ejercicio 4
Figura 7.33

7.7.5 Ejercicio 5

En el gráfico expuesto a continuación, muestra un rayo láser que parte desde un punto X, e incide en una superficie reflejante en un punto Y; dicho rayo, debe desviarse e incidir en un punto A (objetivo). Se debe construir y ubicar un espejo en forma cuadrada de arista: 34,0 cms, de tal manera, que su centro geométrico se encuentre ubicado a una altura de 34,8 cms por encima de la superficie reflejante. ¿Cuál será el rumbo y la inclinación del espejo cuadrado?: Determine el valor del ángulo de reflexión tanto en la superficie reflejante como en el espejo construido. Trabajar en sistema ASA, a escala: 1:10; utilice un formato de 1/4 de pliego de papel *(figura 7.34).*

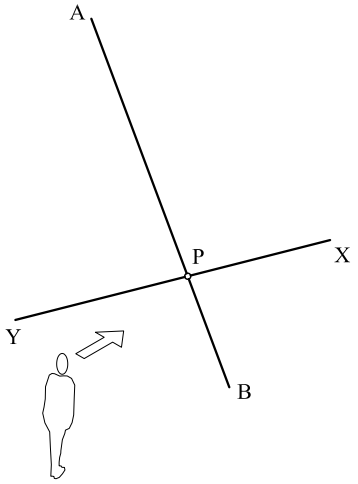


Planimetría del ejercicio 5 para resolver
Figura 7.34

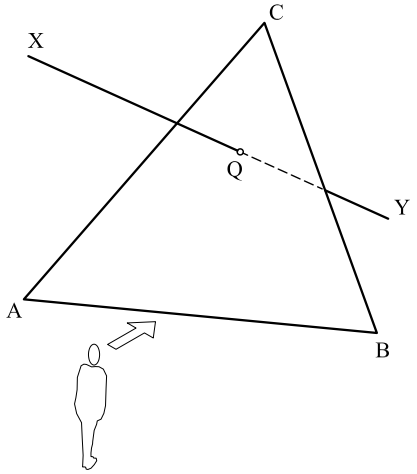
8.0 Intersecciones entre rectas y planos

8.0 Generalidades de las intersecciones

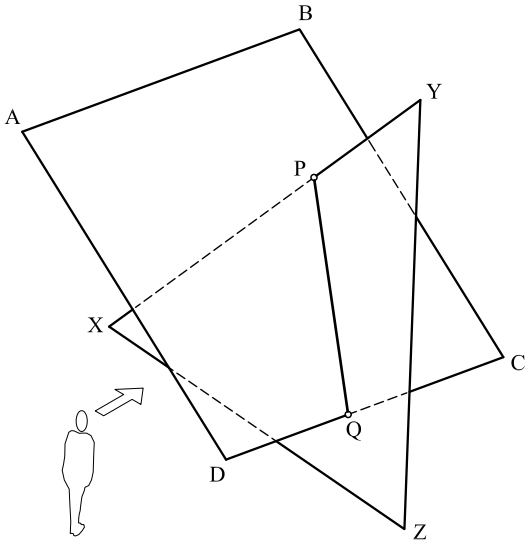
Las intersecciones representan un tipo de relación espacial interesante para estudiar; suele definirse como el encuentro entre dos elementos geométricos que se cortan entre sí; generalmente se presentan cuando dos elementos geométricos no son paralelos, ni se cruzan entre sí, y por lo tanto se define un elemento en común que los conecta; de esta manera, se pueden interceptar dos rectas entre sí, una recta con un plano, dos planos entre sí, y un plano con un sólido *(figura 8.1).*



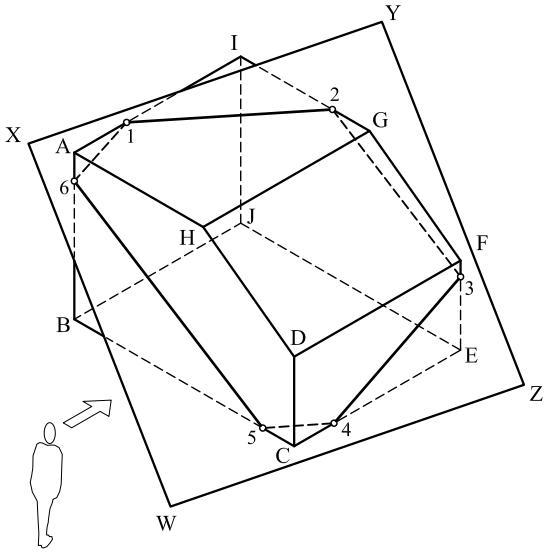
INTERSECCION ENTRE DOS RECTAS
Se determina un punto



INTERSECCION ENTRE UNA RECTA Y UN PLANO
Se determina un punto



INTERSECCION ENTRE DOS PLANOS
Se determina una línea



INTERSECCION ENTRE UN PLANO Y UN SÓLIDO
Se determina una superficie coplanar al plano

Tipos de intersección representativos entre dos posibles elementos geométricos
Figura 8.1

8.1 Intersección entre dos rectas

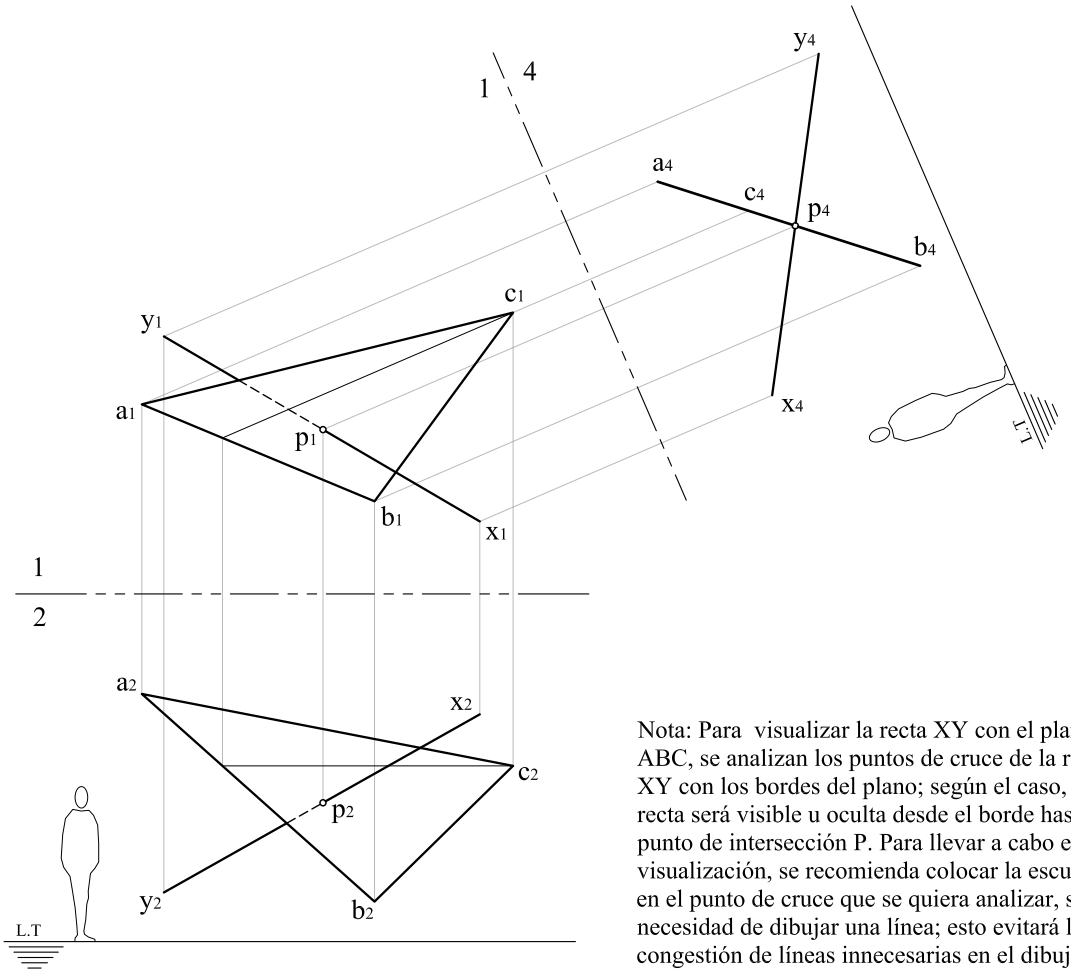
Según los conceptos vistos en el numeral 6.1, dos rectas se interceptan entre sí, cuando el punto común de intersección se encuentra en una sola línea de relación en todas las vistas (*véase figura 6.4*).

8.2 Intersección entre una recta y un plano

La intersección entre una recta y un plano, se puede definir utilizando cualquiera de los dos métodos:

a) Método del plano como filo.
b) Método del plano cortante.

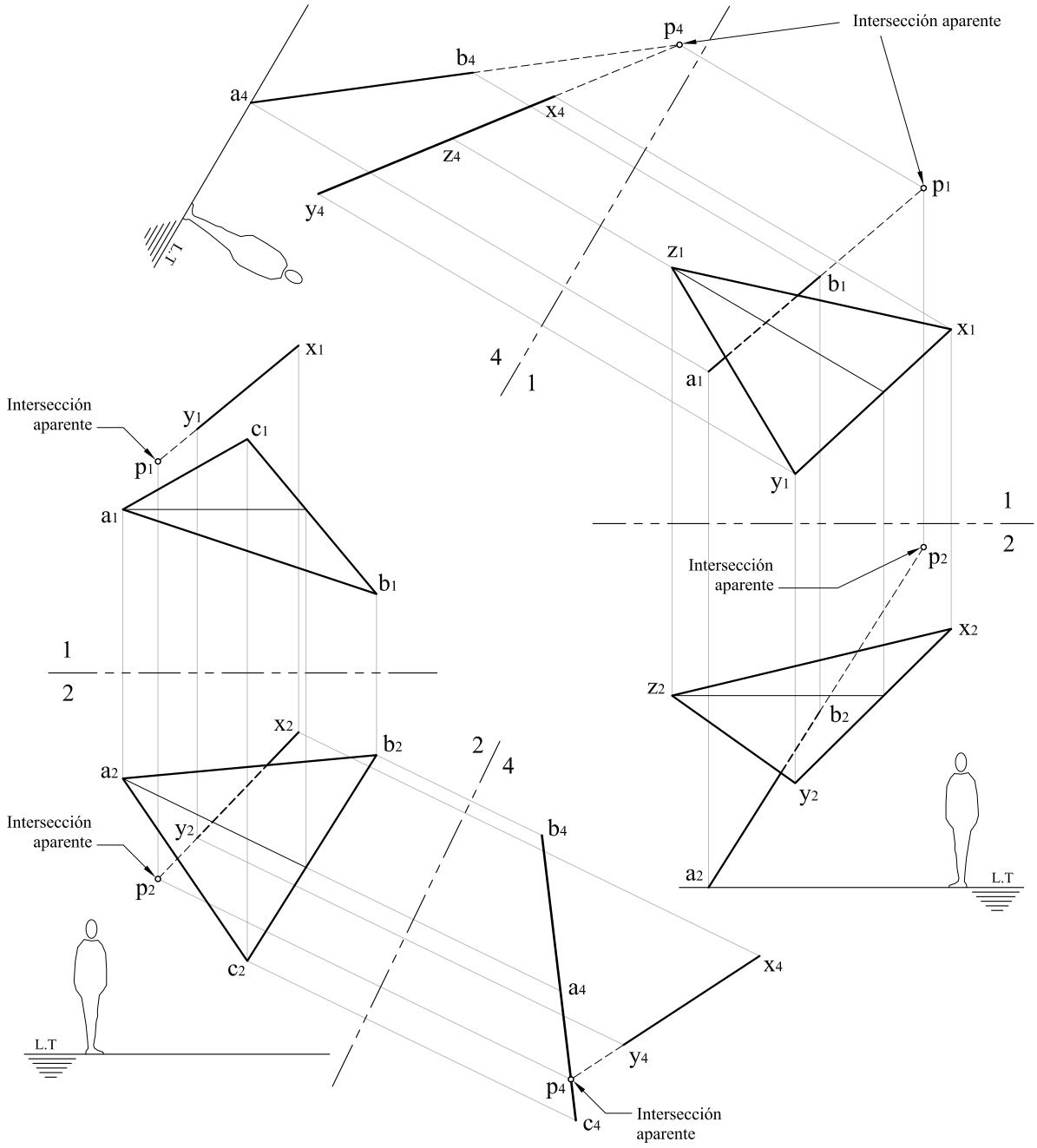
En el primer caso, como su nombre lo indica, es necesario visualizar el plano como filo; si la recta no es paralela a dicho plano, entonces la recta interceptará al plano como filo en un punto; bastará dibujar una línea de relación hacia una vista adyacente (no perpendicular al plano como filo) desde el punto hasta que intercepte la recta; si el punto común está dentro de los límites del plano, y pertenece a la recta, entonces, se trataría de una intersección real *(figura 8.2).*



Nota: Para visualizar la recta XY con el plano ABC, se analizan los puntos de cruce de la recta XY con los bordes del plano; según el caso, la recta será visible u oculta desde el borde hasta el punto de intersección P. Para llevar a cabo esta visualización, se recomienda colocar la escuadra en el punto de cruce que se quiera analizar, sin necesidad de dibujar una línea; esto evitará la congestión de líneas innecesarias en el dibujo.

Intersección real entre una recta y un plano (método del plano como filo)
Figura 8.2

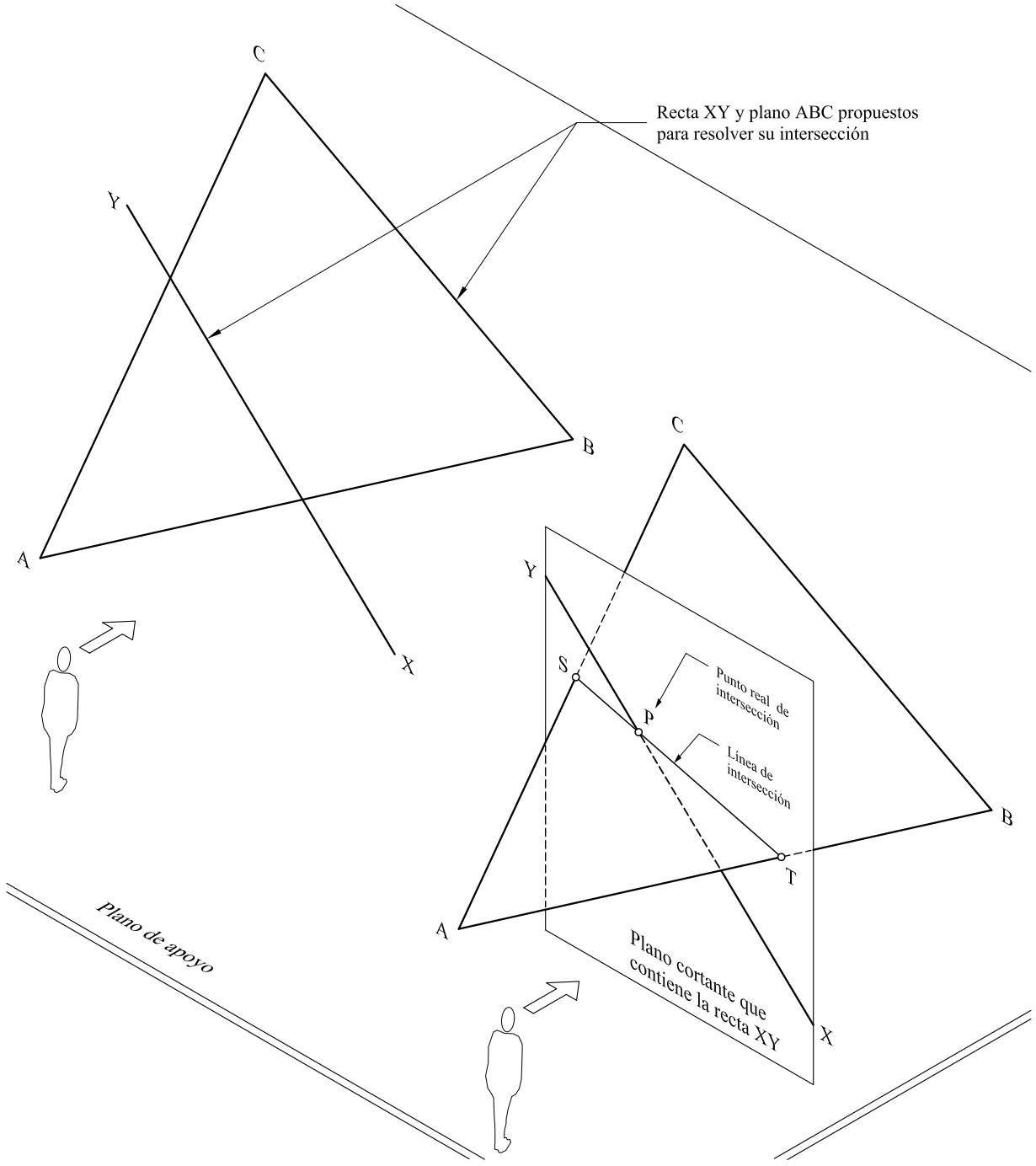
Algunas veces, es necesario prolongar la recta y/o el plano como filo hasta que se intercepten en un punto; en este caso, se obtendría una intersección ficticia o aparente[3], la cual se encuentra por fuera de los bordes del plano, o más allá de uno de los vértices de la recta *(figura 8.3).*



Ejemplos de intersecciones aparentes entre una recta y un plano (método del plano como filo)
Figura 8.3

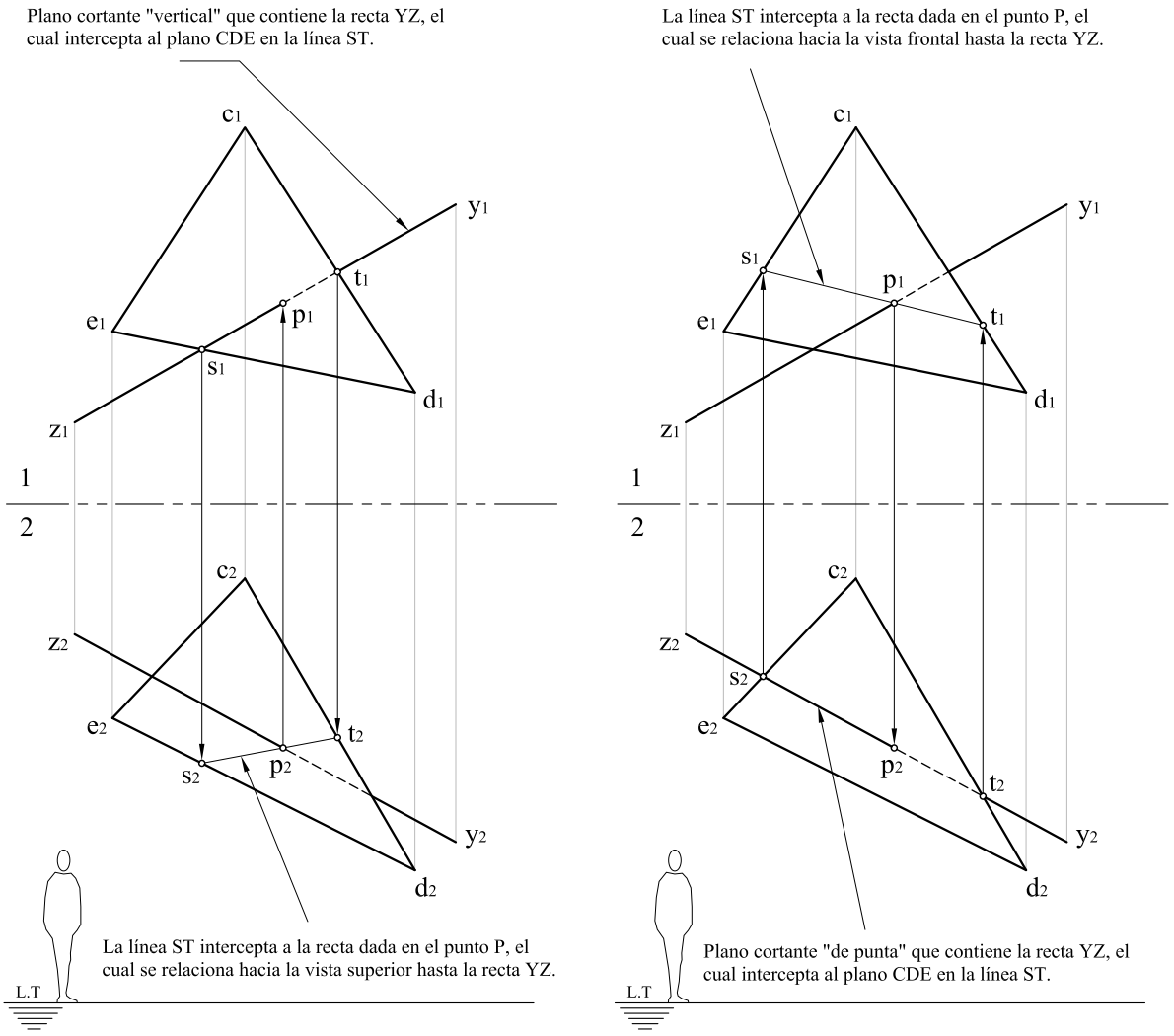
[3] Nota del Autor: Aunque las intersecciones aparentes suelen presentarse, se estudiaran principalmente las intersecciones reales, debido a las características delimitadoras y tangibles de sus elementos geométricos.

El método del plano cortante consiste en utilizar un plano virtual que contenga a la recta, y a su vez, este se proyecta como filo; dicho plano virtual deberá interceptar al plano dado en dos puntos como mínimo, la unión de estos dos puntos definen una línea de intersección, y si esta línea intercepta con la recta propuesta, entonces se obtendría el punto de intersección real *(figura 8.4).*



Intersección real entre una recta y un plano (método del plano cortante)
Figura 8.4

La ventaja que ofrece el método del plano cortante, es que sólo se requieren dos vistas adyacentes para determinar la intersección entre una recta y un plano; bastará definir el plano cortante que se visualice como filo en alguna de las dos vistas, y en la otra vista adyacente se percibirá la línea de intersección; la cual interceptará la recta dada en un punto *(figura 8.5).*

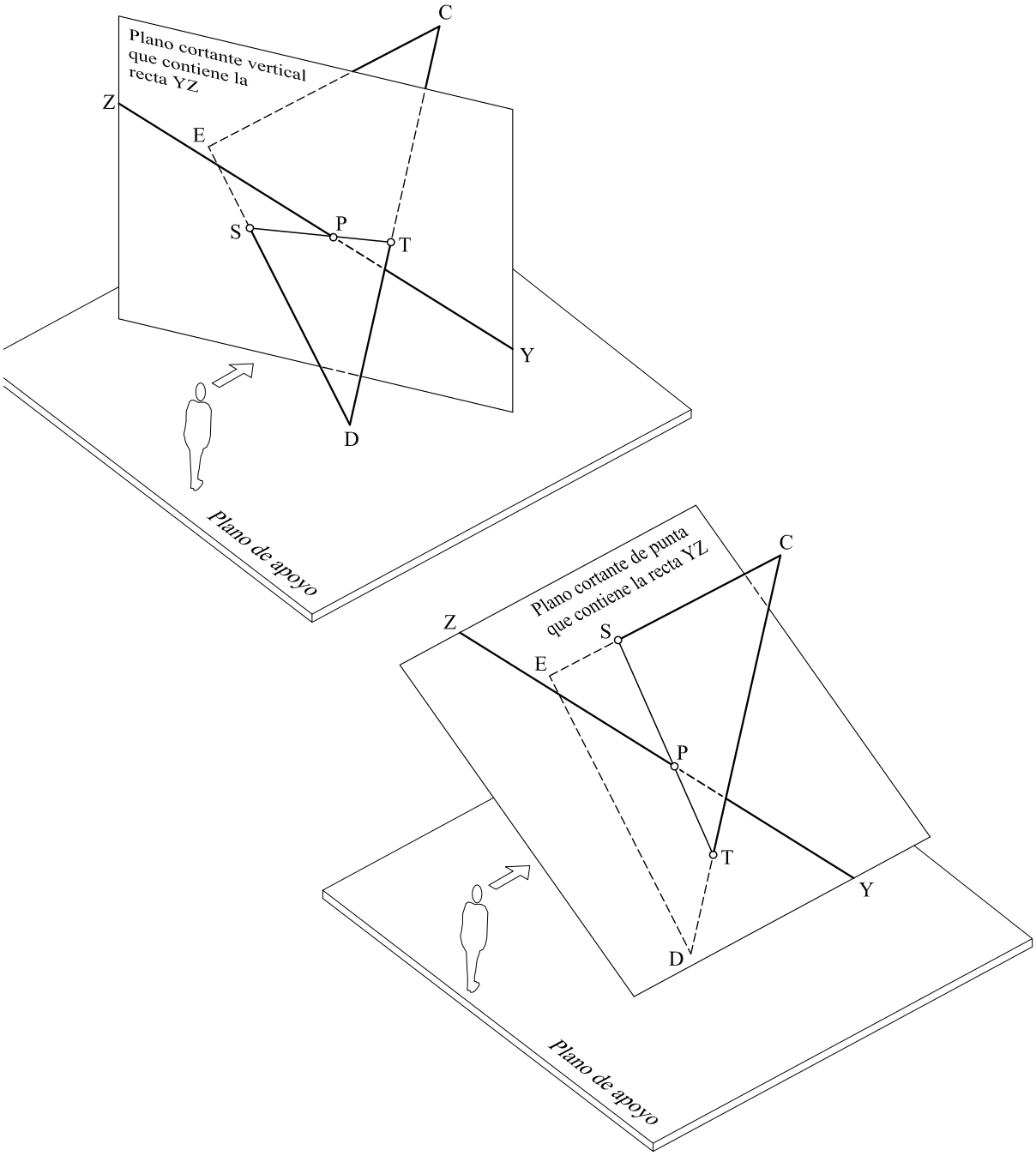


Intersección real entre una recta YZ y un plano CDE (método del plano cortante)
Figura 8.5

Cabe mencionar, que la línea de intersección definida por el encuentro entre un plano dado y el plano cortante que contiene la recta, ofrece tres posibilidades:

a) La línea intercepta a la recta dada en un punto contenido dentro de los límites del plano dado; en este caso, se obtendría un punto de intersección real.
b) La línea intercepta a la recta dada en un punto coplanar y situado por fuera de los límites del plano dado; en este caso, se obtendría un punto de intersección aparente.
c) La línea es paralela a la recta dada; en este caso, la recta y el plano son paralelos entre sí, y por lo tanto, no habría intersección.

En la figura 8.5 se muestra el plano cortante que contiene la recta YZ; dicho plano puede ser un plano vertical, o un plano de punta, debido a la posición oblicua de la recta; el plano vertical al proyectarse como filo en la vista superior, interceptará al plano CDE en los puntos S y T, los cuales, al unirse en la vista frontal interceptará a la recta YZ en el punto P de intersección real; en forma análoga, se obtendrá el mismo punto P cuando se utilice el plano cortante de punta *(figura 8.6)*



Intersección de la recta YZ y el plano CDE, mostrando los planos cortantes vertical y de punta
Figura 8.6

El método del plano cortante se utiliza más que todo, cuando el plano dado se encuentra en posición oblicuo, ya que en las demás posiciones analizadas en el numeral 6.6, el plano estará proyectado como filo en alguna de las tres vistas principales, y por lo tanto, se utilizaría el método del plano como filo.

Aunque una recta puede contener infinitos planos cortantes, conviene tener en cuenta las posiciones especiales que puede ofrecer el plano cortante, ya que dependerá de la posición de la recta, así como, de las vistas principales que se analicen *(figura 8.7).*

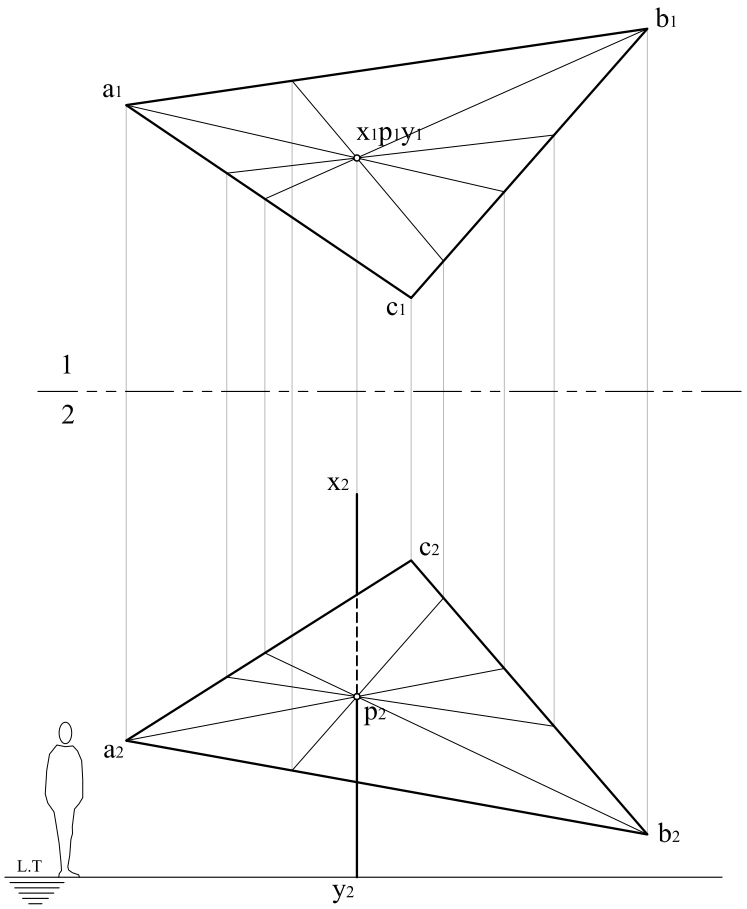
POSICIÓN DE LA RECTA	VISTAS PRINCIPALES	PLANOS CORTANTES QUE PUEDE CONTENER LA RECTA
Recta horizontal	Vista superior	Plano vertical
	Vista frontal	Plano horizontal
	Vista lateral derecha	Plano horizontal
Recta frontal	Vista superior	Plano frontal
	Vista frontal	Plano de punta
	Vista lateral derecha	Plano frontal
Recta de perfil	Vista superior	Plano de perfil
	Vista frontal	Plano de perfil
	Vista lateral derecha	Plano lateral
Recta vertical	Vista superior	Todo plano perpendicular al plano superior
	Vista frontal	Plano de perfil
	Vista lateral derecha	Plano frontal
Recta de punta	Vista superior	Plano de perfil
	Vista frontal	Todo plano perpendicular al plano frontal
	Vista lateral derecha	Plano horizontal
Recta lateral	Vista superior	Plano frontal
	Vista frontal	Plano horizontal
	Vista lateral derecha	Todo plano perpendicular al plano lateral derecho
Recta oblicua	Vista superior	Plano vertical
	Vista frontal	Plano de punta
	Vista lateral derecha	Plano lateral

Planos cortantes que se pueden construir, según la posición de la recta, y sus vistas principales
Figura 8.7

De acuerdo a la tabla anteriormente descrita, cuando la recta dada se proyecta como un punto, como ocurre con las rectas vertical, de punta, y lateral, se pueden construir infinitos planos cortantes; esto quiere decir, que todas las líneas de intersección que determinan los planos cortantes respecto al plano dado, pasarán por el mismo punto de intersección de la recta. Por eso, cuando se tiene el caso de una intersección entre un plano y una recta proyectada como un punto, se deduce el siguiente teorema:

Teorema 21: Toda línea contenida en un plano que pase por una recta proyectada como un punto, pasará siempre por el mismo punto de intersección que hace la recta con el plano dado.

Supóngase un plano ABC en posición oblicuo, y una recta XY en posición vertical; en este caso, se considerarán tres posibles planos cortantes que contengan la recta x_1y_1, los cuales determinarán tres rectas de intersección contenidas en el plano ABC; al relacionar cada una de estas rectas hacia la vista frontal, se comprueba que todas pasan por el mismo punto P de intersección *(figura 8.8).*

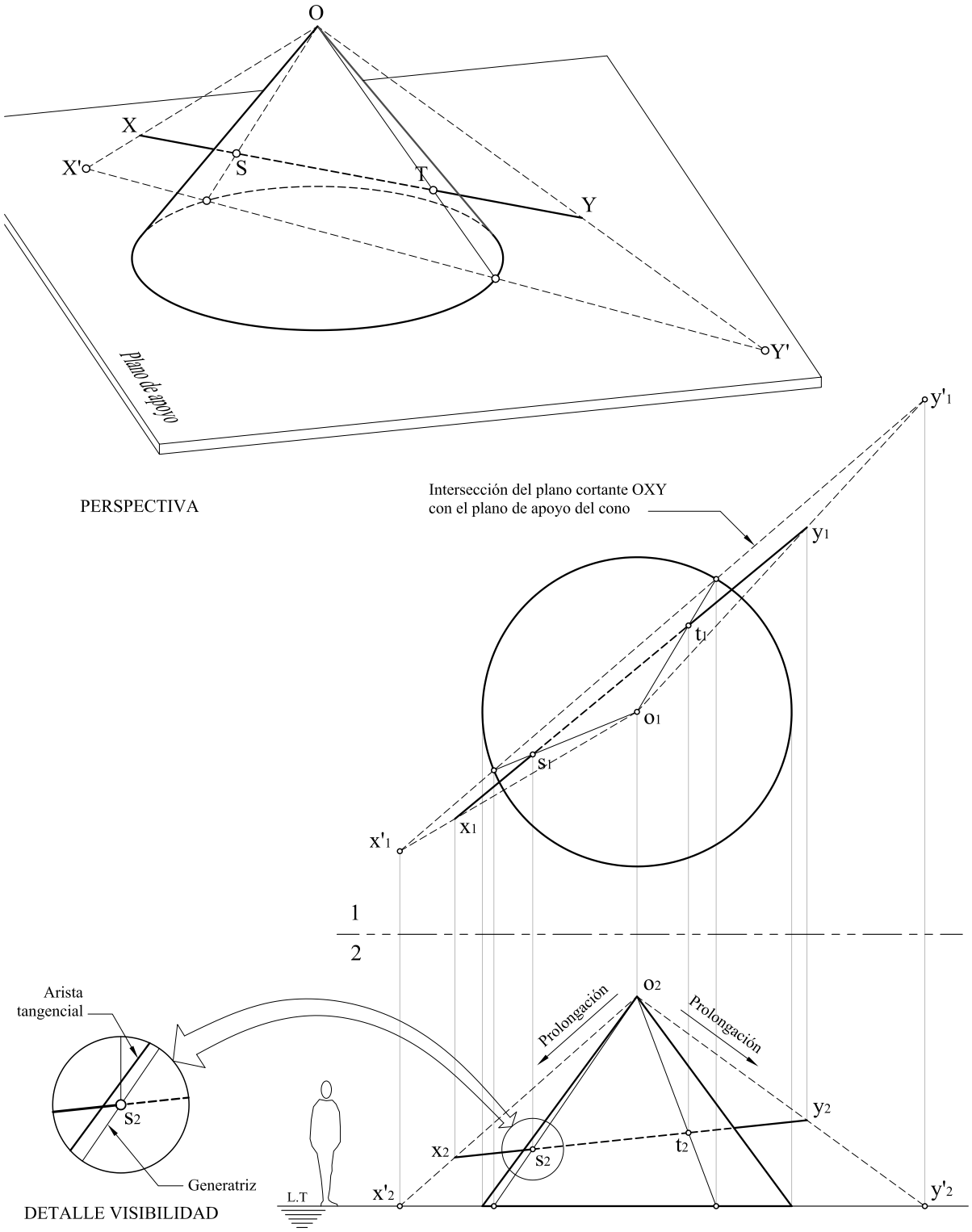


Intersección entre una recta vertical XY y un plano oblicuo ABC
Figura 8.8

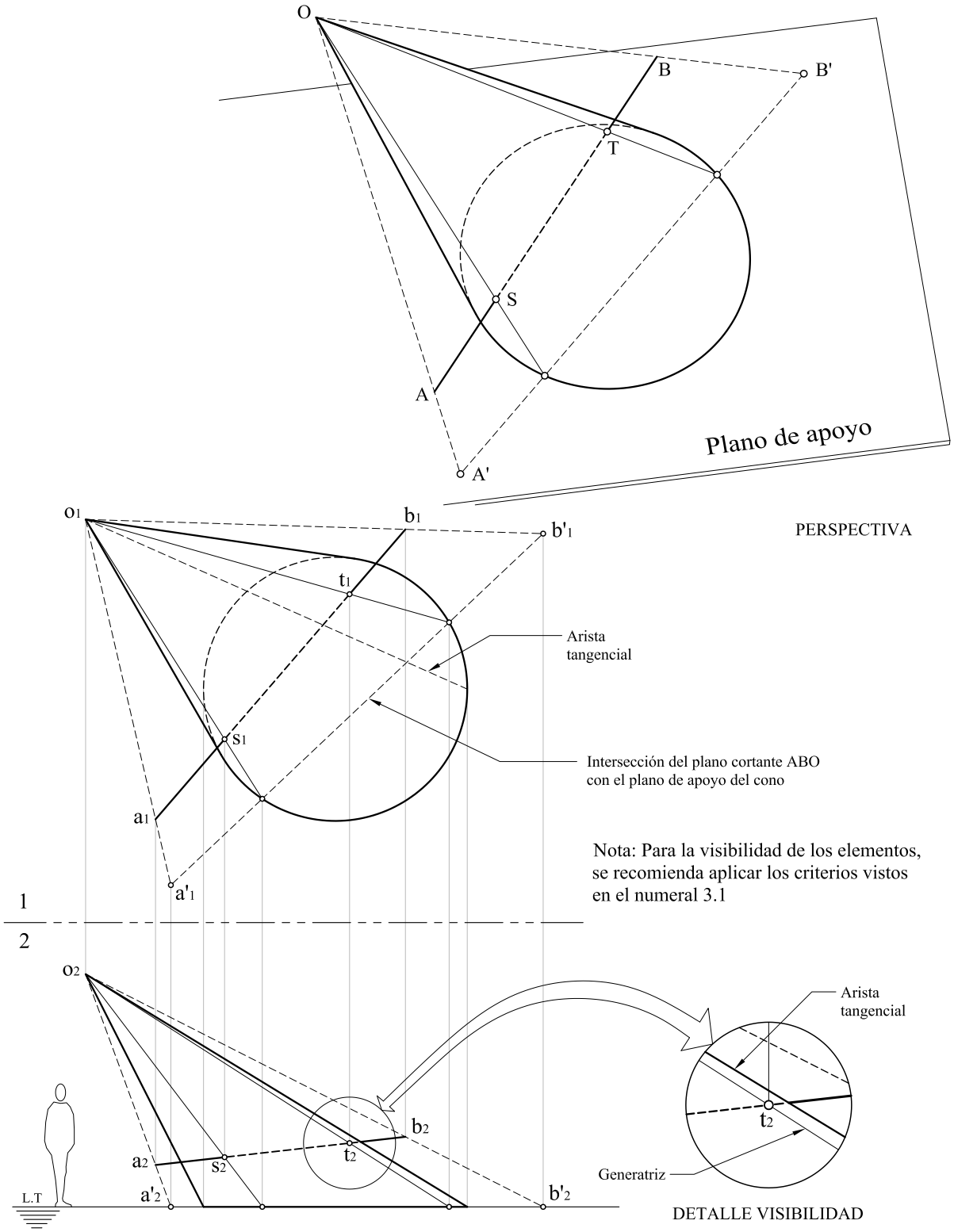
8.3 Intersección entre una recta y una superficie de simple curvatura (casos especiales)

8.3.1 Intersección entre una recta y un cono recto u oblicuo

Para determinar la intersección entre una recta y un cono recto u oblicuo, es necesario definir un plano auxiliar cortante entre la recta dada y el vértice del cono; este plano cortante debe prolongarse hasta interceptar el plano de apoyo donde está situado el cono; si la línea de intersección resultante entre el plano cortante y el plano de apoyo intercepta el contorno circular del cono en dos puntos, quiere decir, que la recta en realidad atraviesa al cono; bastará dibujar las generatrices respectivas que pasen por dichos puntos hasta el vértice; de esta manera, las generatrices interceptarán la recta dada, definiendo así, los puntos de entrada y de salida de la recta en el cono (puntos S y T) *(figura 8.9 y 8.10).*



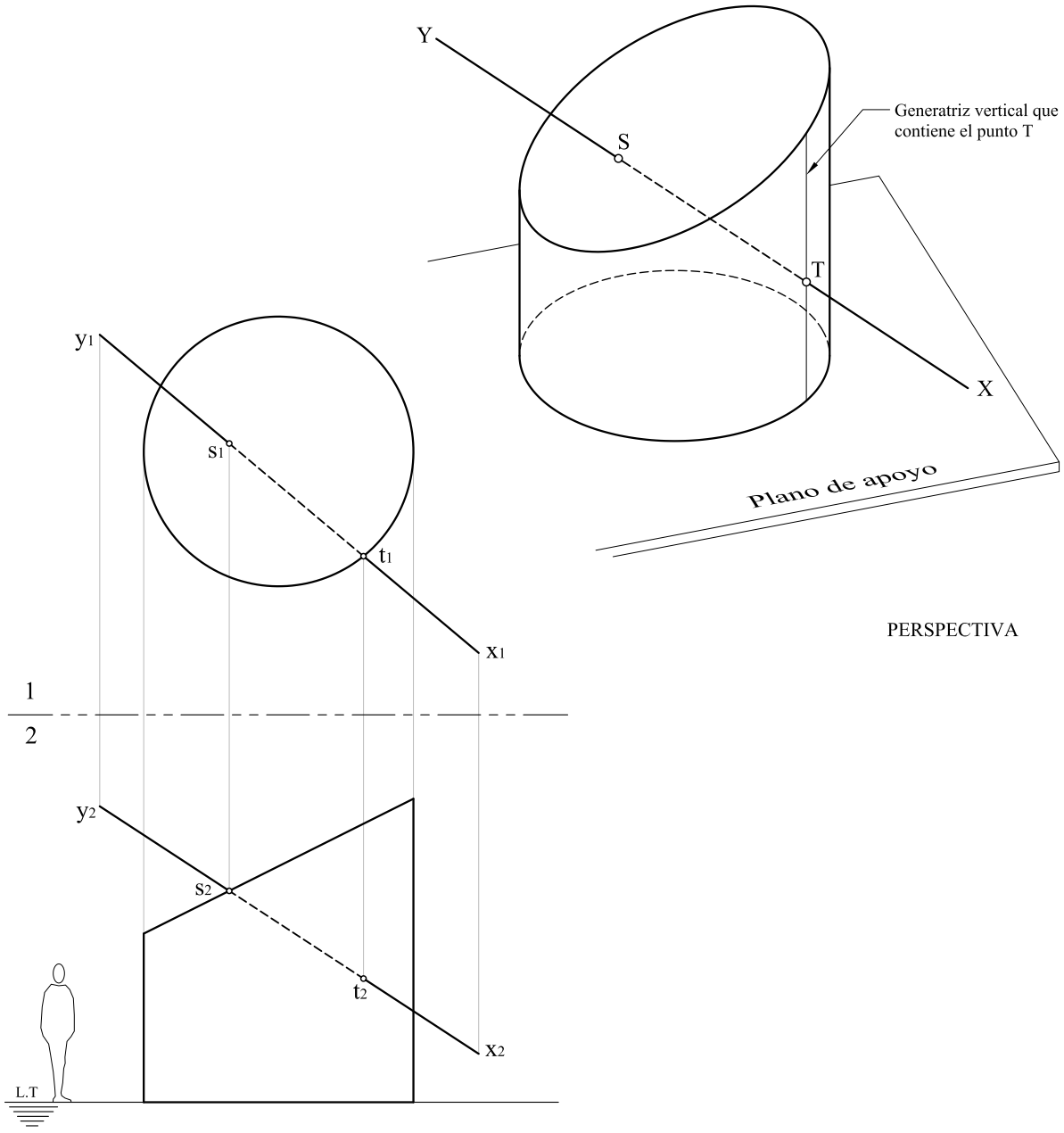
Intersección entre una recta oblicua XY y un cono recto
Figura 8.9



Intersección entre una recta oblicua AB y un cono oblicuo
Figura 8.10

8.3.2 Intersección entre una recta y un cilindro recto

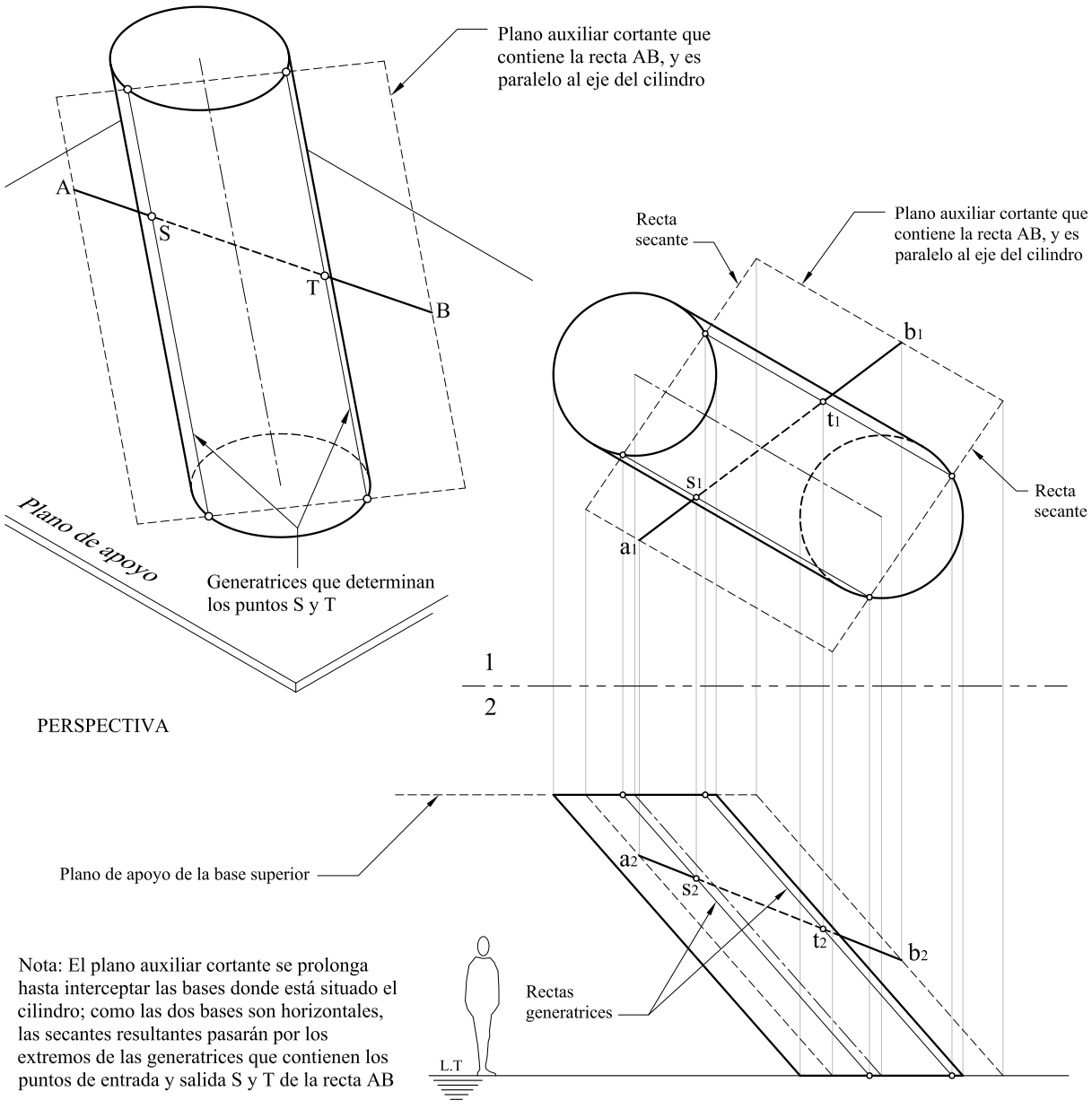
Para determinar la intersección entre una recta y un cilindro recto, se debe tener en cuenta la posición de la recta respecto al cilindro, pues de ello dependerá si la recta entra o sale por las bases del cilindro, o penetra por la superficie generatriz; si la recta entra por alguna base del sólido, se recomienda aplicar el método del plano como filo; y si la recta penetra por la superficie curva, significa que el punto de intersección T estará situado en una recta generatriz vertical; bastará relacionar el punto T desde la vista superior hacia la vista frontal hasta que intercepte la recta XY dada *(figura 8.11).*



Intersección entre una recta oblicua XY y un cilindro recto truncado
Figura 8.11

8.3.3 Intersección entre una recta y un cilindro oblicuo

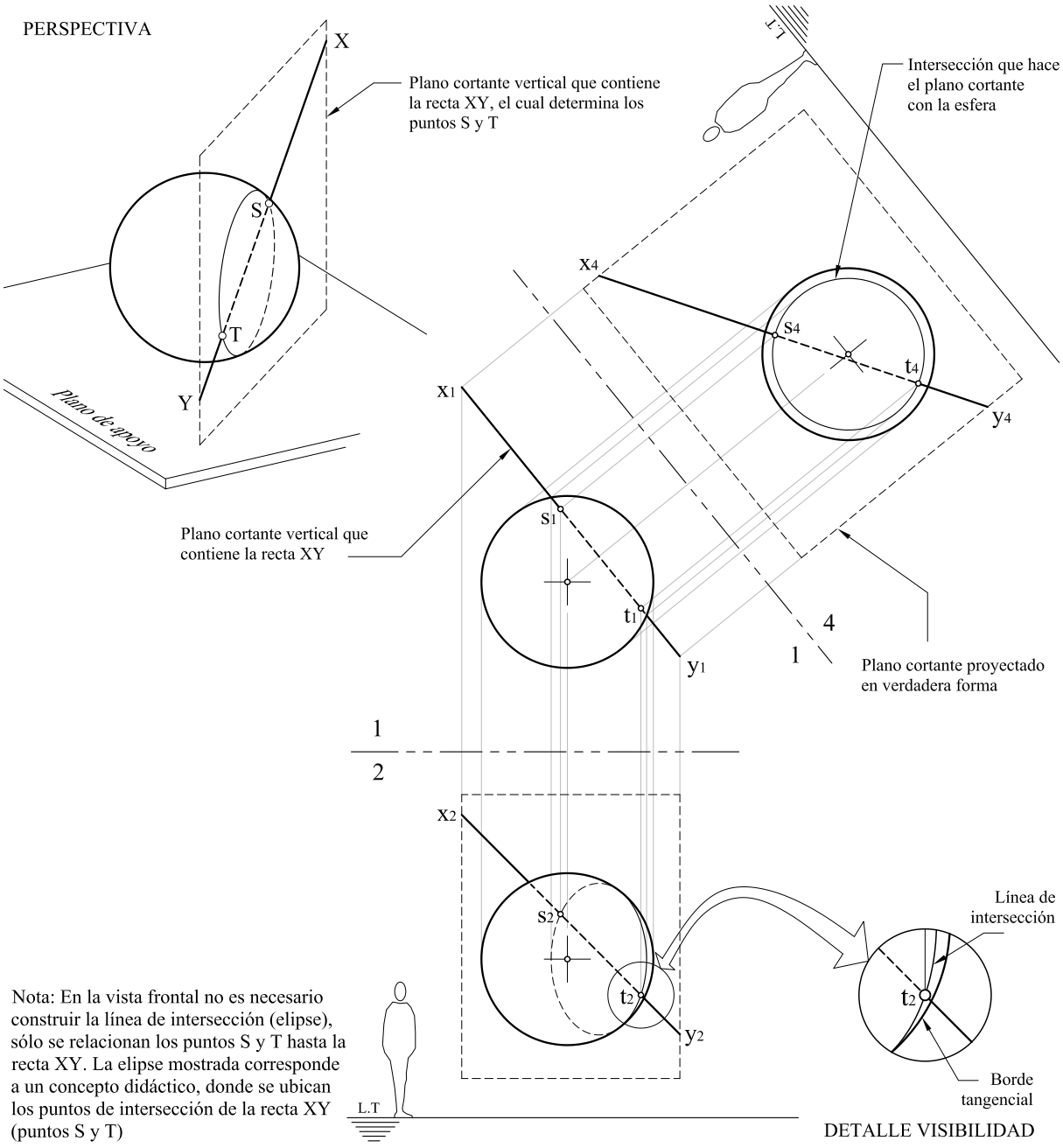
Cuando una recta AB entra y sale por la superficie generatriz de un cilindro oblicuo, significa que cada punto de intersección estará situado en su respectiva generatriz; siendo estas dos generatrices paralelas al eje del cilindro; por lo tanto, el problema se reduce en construir un plano auxiliar cortante que contenga la recta AB, y además, que sea paralelo al eje del cilindro; dicho plano deberá prolongarse hasta interceptar el plano de apoyo donde está situado el cilindro; la línea de intersección resultante deberá ser una recta secante que pase por los puntos iniciales de las generatrices mencionadas; bastará dibujar dichas generatrices hasta interceptar la recta AB en los puntos S y T *(figura 8.12).*



Intersección entre una recta oblicua AB y un cilindro oblicuo
Figura 8.12

8.4 Intersección entre una recta y una esfera

Cuando una esfera es interceptada por cualquier plano secante, se obtiene una sección circular con un diámetro menor o igual al que posee; por lo tanto, para determinar la intersección entre una recta dada y una esfera, se debe construir un plano cortante que contenga la recta, y se procede a visualizar la verdadera magnitud de la recta, en esta última proyección se apreciará la sección circular que contiene los puntos de entrada y de salida de la recta; finalmente se completan las proyecciones *(figura 8.13).*

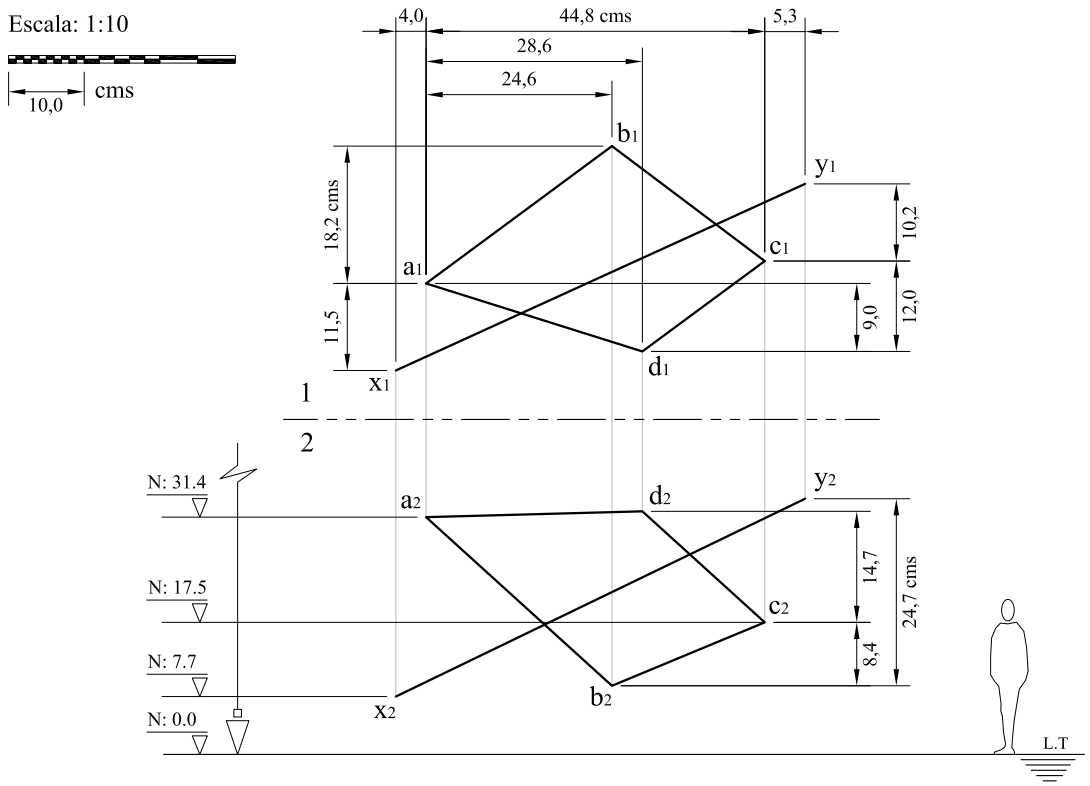


Intersección entre una recta oblicua XY y una esfera
Figura 8.13

8.5 Ejemplos

8.5.1 Ejemplo 1

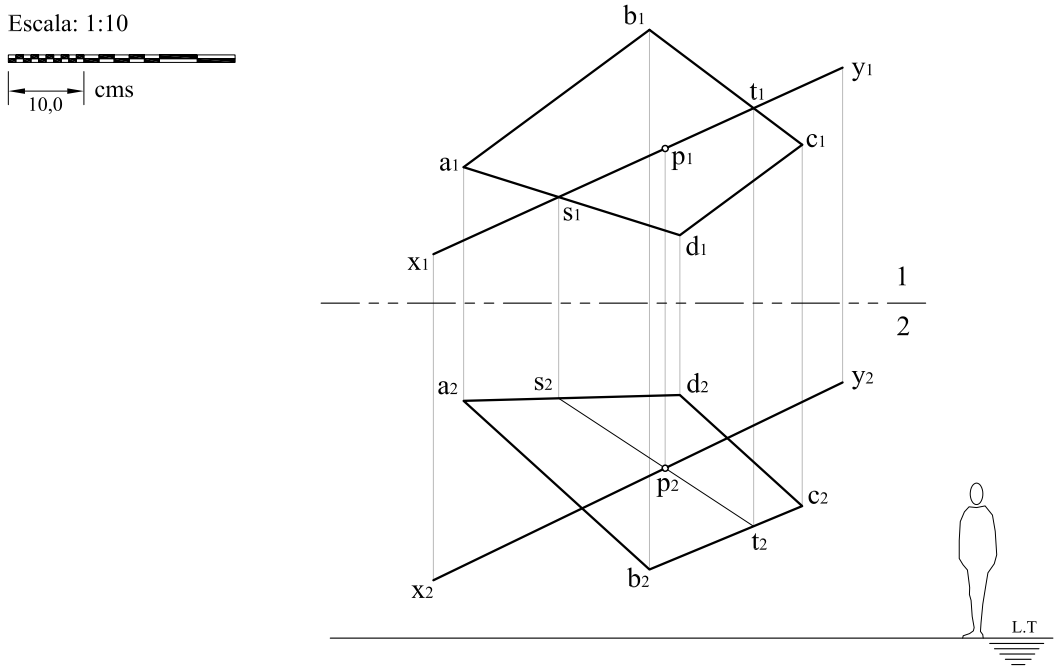
Determinar la intersección entre la recta XY y el plano ABCD, utilizando el método del plano cortante, muestre el procedimiento constructivo, y visualice. ¿Cuál será la cota de elevación del punto de intersección? Trabajar en sistema ASA, a escala: 1: 10 *(figura 8.14).*



Enunciado del ejemplo 1 para resolver
Figura 8.14

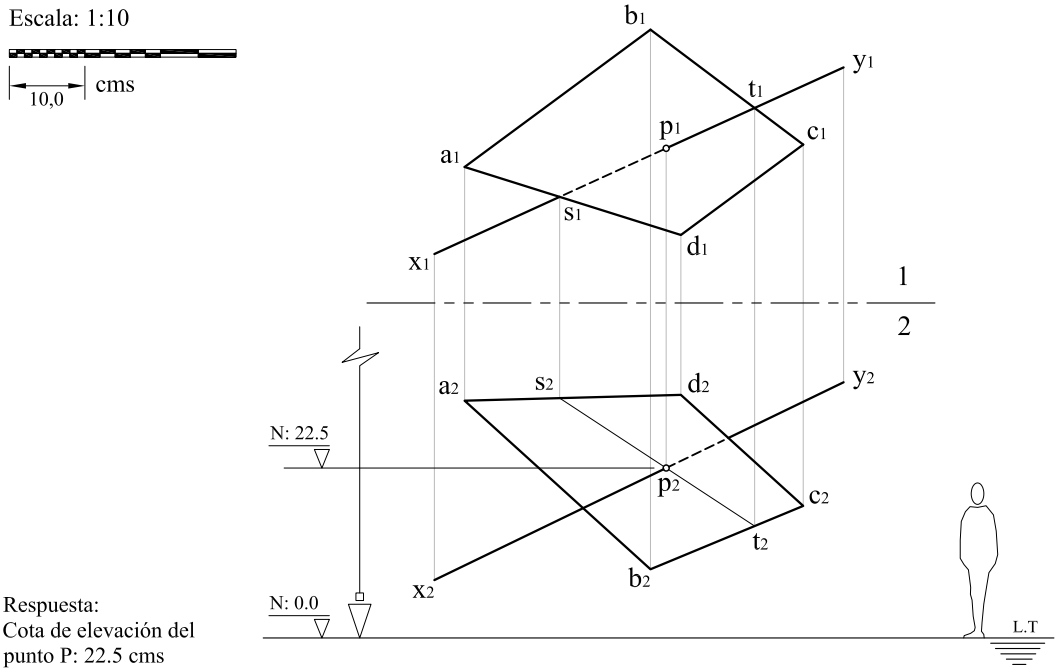
Por conveniencia, se debe comprobar si el cuadrilátero dado en realidad se trata de una figura plana, o una superficie alabeada; para ello el lector puede aplicar los criterios vistos en el numeral 6.1 *(véanse figuras 6.5 y 6.8)*; en este caso, las rectas AB y CD al ser paralelas entre sí, determinan un plano.

Para encontrar la intersección de la recta XY con el plano ABCD, se plantea un plano cortante vertical que contenga la recta x_1y_1, dicho plano deberá interceptar al plano ABCD en dos puntos (s_1 y t_1), donde el punto S pertenece a la recta AD, y el punto T pertenece a la recta BC; luego se relacionan estos puntos hacia la vista frontal y se unen entre sí, se comprueba que la línea s_2t_2 intercepta a la recta x2y2, determinándose de esta manera el punto de intersección p_1; luego, se relaciona este último punto hacia la vista superior hasta interceptar la recta x1y1. Es importante chequear que el punto P esté contenido en la recta XY, y a su vez esté contenido dentro de los límites del plano ABCD; esto garantizará la intersección real que existe entre dichos elementos *(figura 8.15).*



Desarrollo de la intersección entre la recta XY y el plano ABCD (método del plano cortante)
Figura 8.15

Al final, se aplican los criterios de visibilidad, analizando para ello los puntos de cruce de la recta XY con los bordes del plano ABCD en ambas proyecciones *(figura 8.16).*



Respuesta:
Cota de elevación del punto P: 22.5 cms

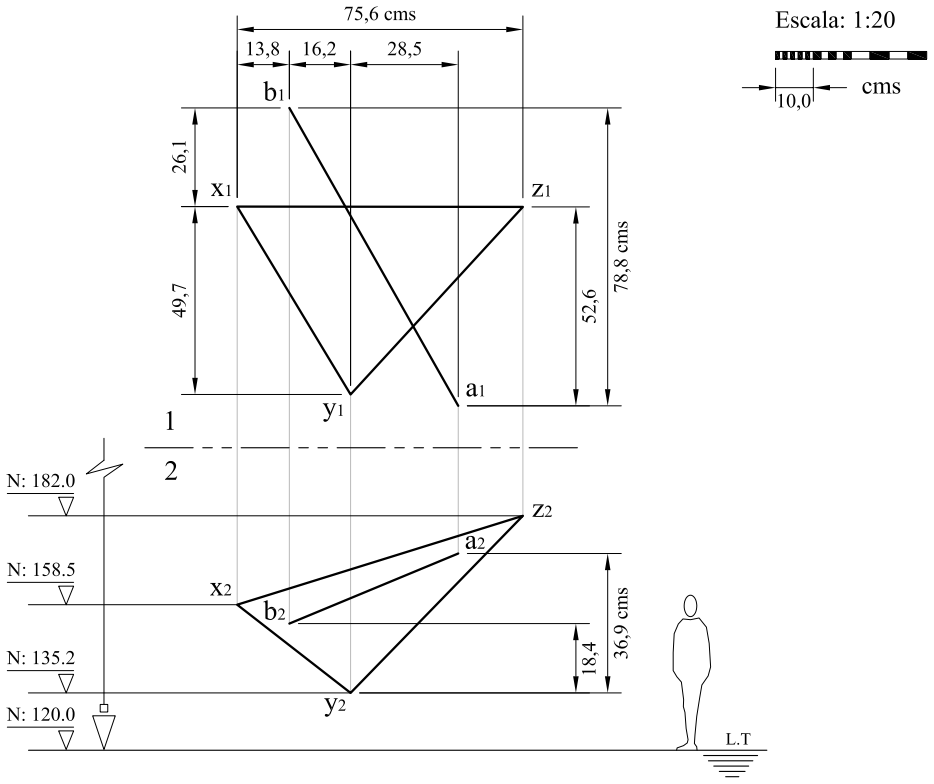
Visibilidad de la intersección entre la recta XY y el plano ABCD (método del plano cortante)
Figura 8.16

8.5.2 Ejemplo 2

Determinar la intersección entre la recta AB y el plano XYZ, utilizando el método del plano como filo, muestre el procedimiento completo, y visualice en todas las vistas.

Si se requiere realizar una perforación en el punto de intersección, ¿Cuál será el ángulo de la broca del taladro respecto al plano?, y ¿Cuál será la referencia de longitud del punto de intersección respecto a dos vértices cualesquiera del plano (triangulación)?

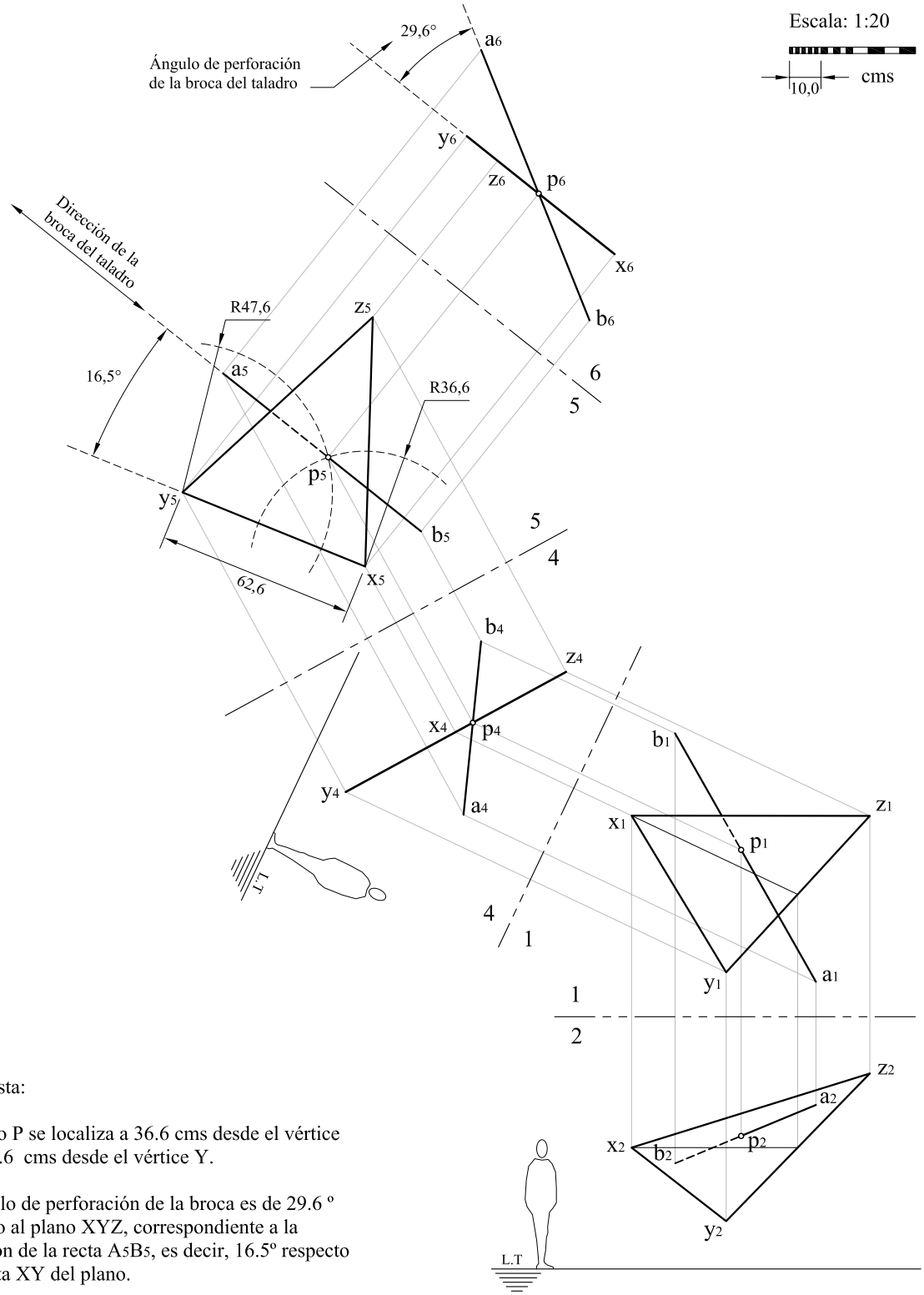
Trabajar en sistema ASA, a escala: 1: 20 *(figura 8.17).*



Enunciado del ejemplo 2 para resolver
Figura 8.17

Para determinar la intersección de la recta AB con el plano XYZ, se procede a visualizar el plano como filo; en dicha vista la recta intercepta al plano dado en el punto p_4, bastará relacionar este punto hacia una vista adyacente hasta que intercepte la recta AB; si el punto P se encuentra situado dentro de los límites del plano, se demostrará la intersección real de la recta AB con el plano XYZ.

Al visualizar la verdadera forma del plano XYZ, se puede realizar el proceso de triangulación, para este propósito se traza un arco desde el vértice x_5 hasta el punto p_5, y otro arco desde el punto y_5 hasta p_5, de esta manera, el punto P quedará localizado y referenciado. Luego, se plantea un eje de pliegue paralelo a la recta a_5b_5, para poder apreciar el ángulo real entre la recta AB y el plano XYZ; al final, se aplican los criterios de visibilidad en las vistas donde la recta esté oculta por el plano *(figura 8.18).*



Respuesta:

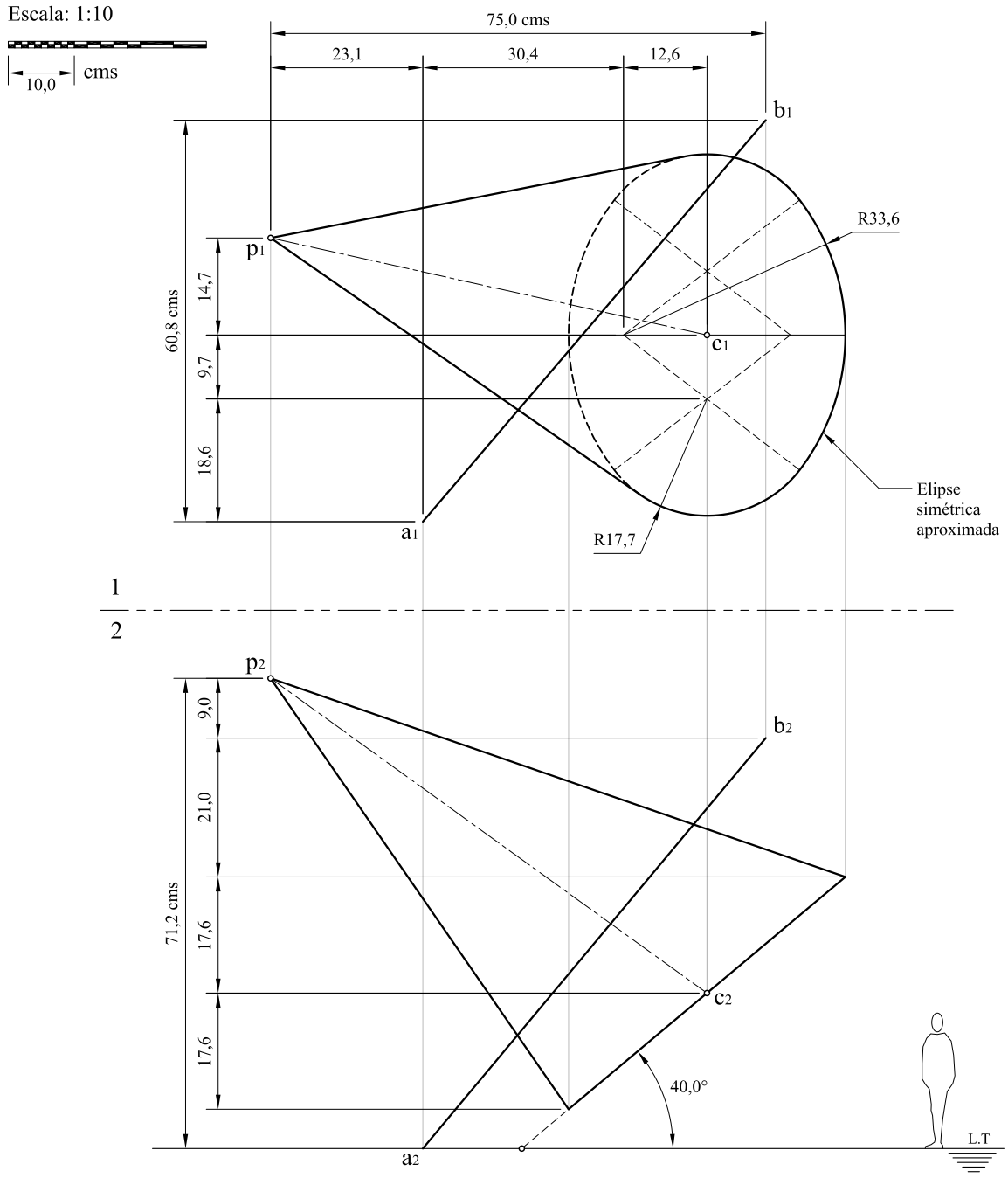
El punto P se localiza a 36.6 cms desde el vértice X, y 47.6 cms desde el vértice Y.

El ángulo de perforación de la broca es de 29.6 º respecto al plano XYZ, correspondiente a la dirección de la recta A_5B_5, es decir, 16.5º respecto a la recta XY del plano.

Desarrollo de la intersección entre la recta AB y el plano XYZ (método del plano como filo)
Figura 8.18

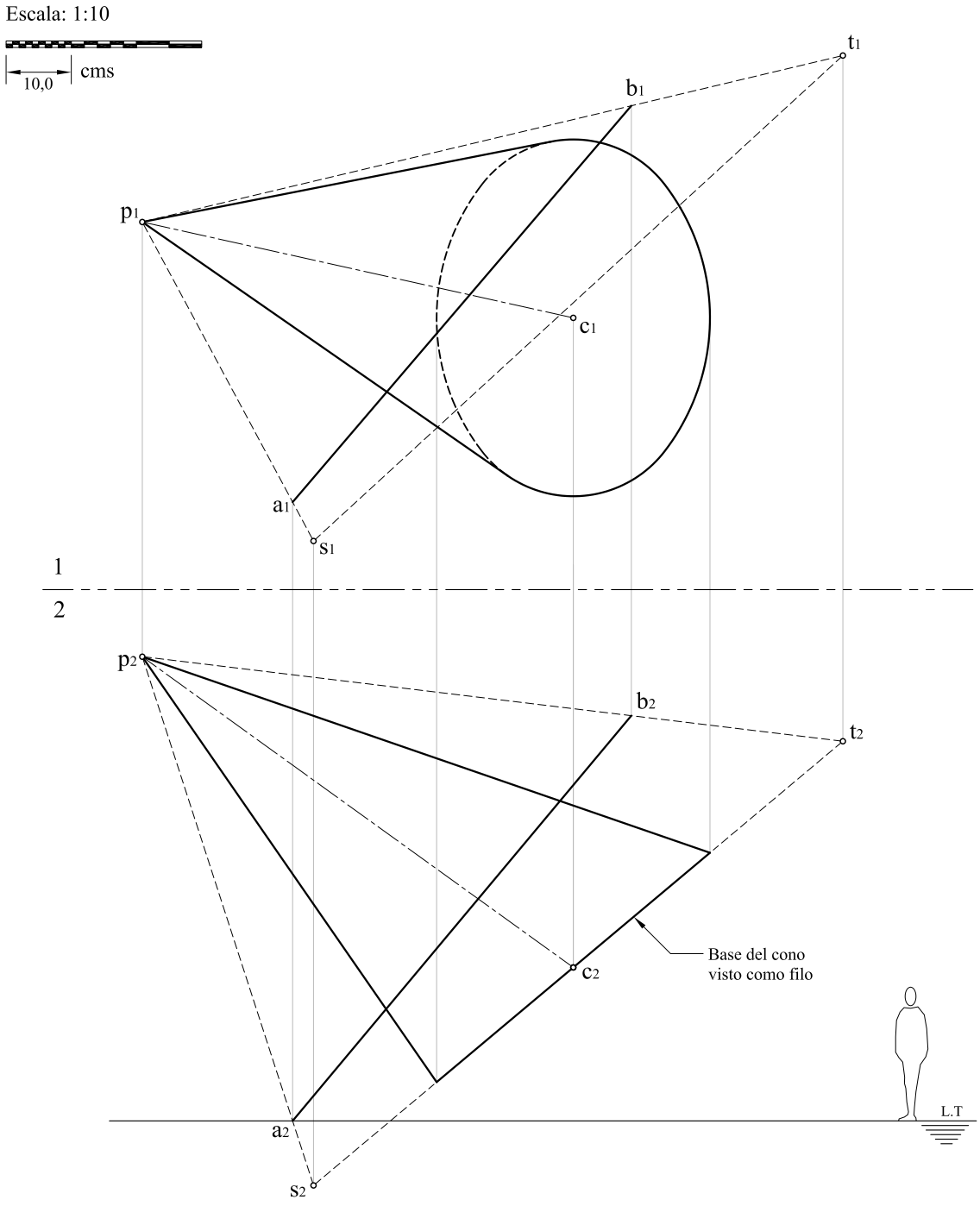
8.5.3 Ejemplo 3

Determinar la intersección entre la recta AB y el cono oblicuo, utilizando el método del plano cortante, muestre el procedimiento completo, y visualice. Trabajar en sistema ASA, a escala: 1:10 *(figura 8.19).*



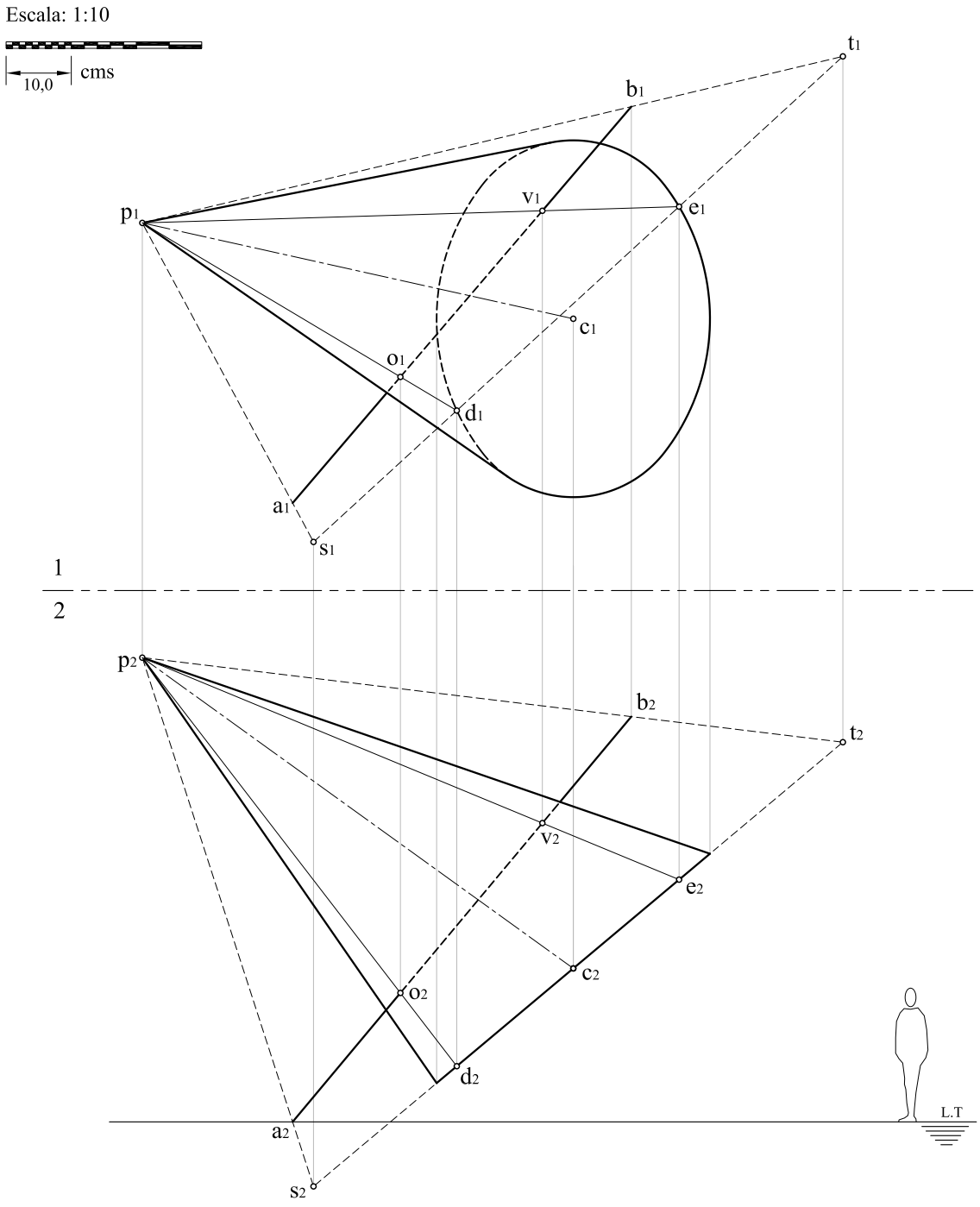
Enunciado del ejemplo 3 para resolver
Figura 8.19

La recta AB, y el vértice P del cono definen un plano auxiliar cortante, el cual debe prolongarse hasta interceptar la base de apoyo del cono visto como filo (puntos S y T) *(figura 8.20).*



Definición y prolongación del plano cortante ABP, ejemplo 3
Figura 8.20

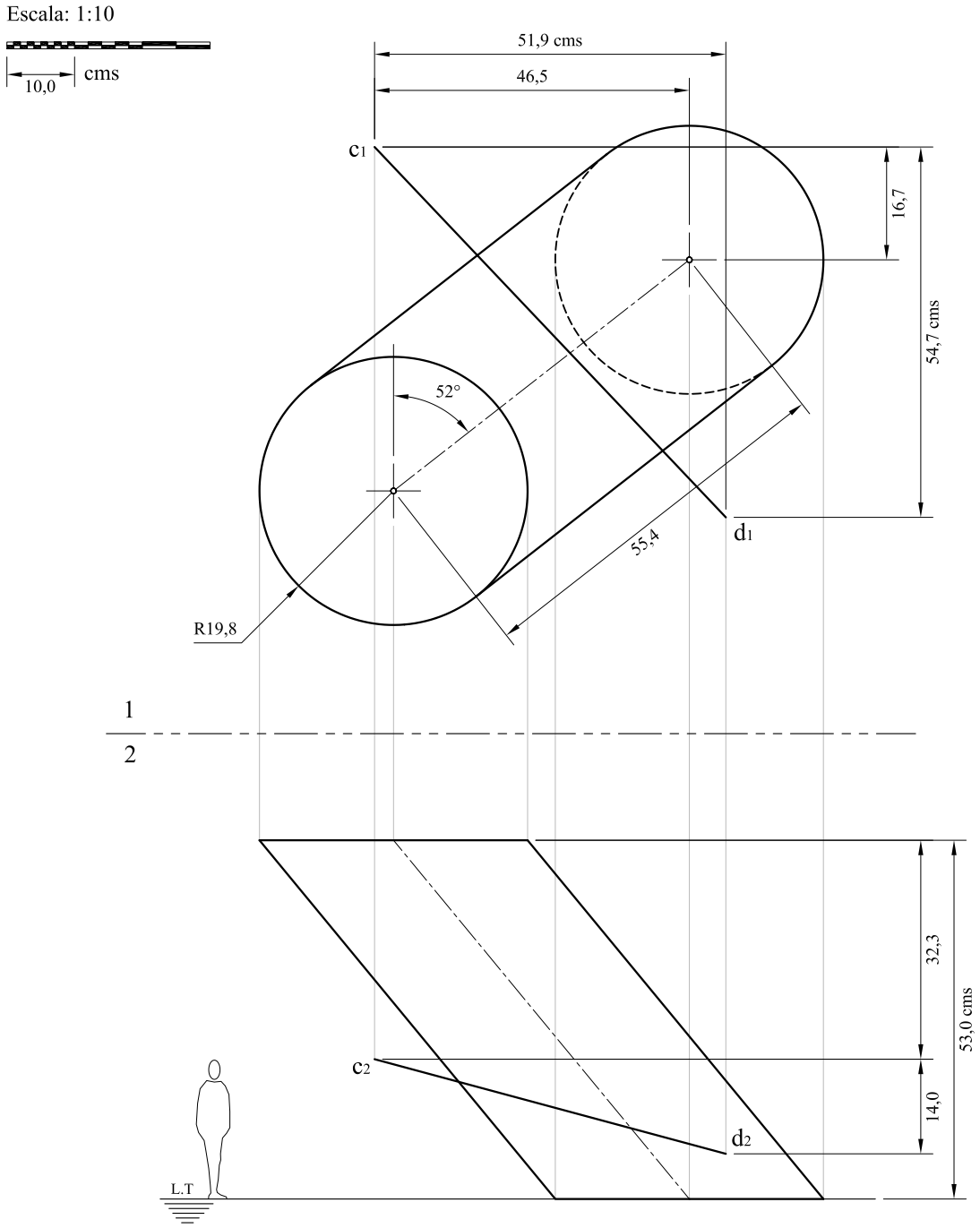
Si la línea s_1t_1 atraviesa el contorno del cono en 2 puntos (puntos d_1 y e_1), quiere decir que la recta AB intercepta con el cono; simplemente se dibujan las generatrices que pasan por los puntos D y E hasta el vértice P del cono; de esta forma, las generatrices DP y EP definen los puntos de entrada y de salida de la recta AB con el cono (puntos O y V); al final, se aplican criterios de visibilidad *(figura 8.21).*



Desarrollo de la intersección entre la recta AB con el cono oblicuo, ejemplo 3
Figura 8.21

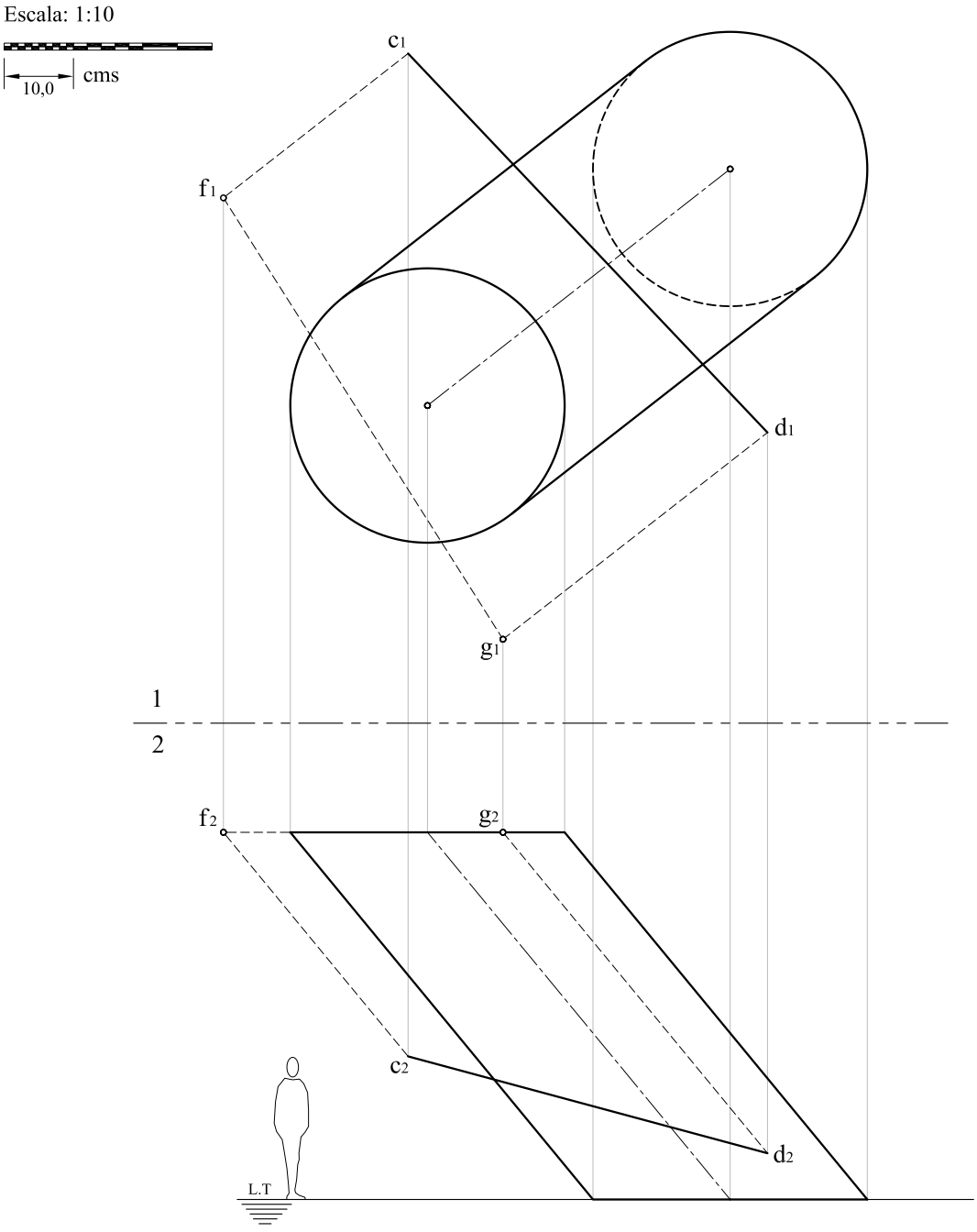
8.5.4 Ejemplo 4

Determinar la intersección entre la recta CD y el cilindro oblicuo; utilice el método del plano cortante, muestre el procedimiento completo, y visualice. Trabajar en sistema ASA, a escala: 1:10 *(figura 8.22).*



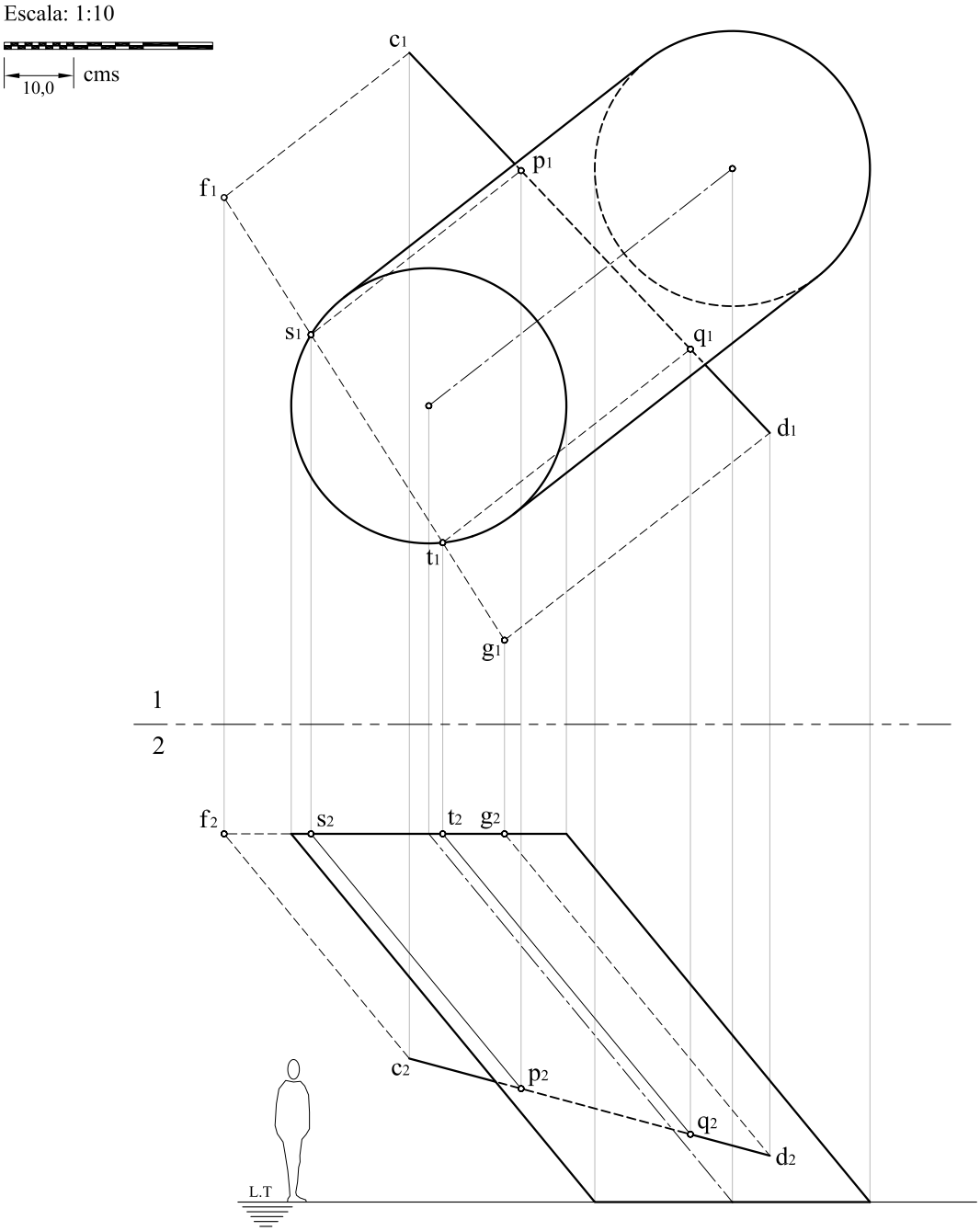
Enunciado del ejemplo 4 para resolver
Figura 8.22

Se procede a construir un plano auxiliar cortante que contenga la recta CD, y a la vez, sea paralelo al eje del cilindro; para este propósito, se dibujan dos rectas paralelas al eje del cilindro que pasen por los extremos C y D en ambas vistas; dichas rectas paralelas deben prolongarse hasta interceptar cualquier base de apoyo del cilindro que se visualice como filo, en este caso, se prolonga hasta la base superior del mismo en la vista frontal, determinándose los puntos F y G *(figura 8.23)*



Definición y prolongación del plano cortante CDFG, ejemplo 4
Figura 8.23

Si la línea f_1g_1 atraviesa el contorno del cono en 2 puntos (puntos s_1 y t_1), quiere decir que la recta CD intercepta con el cilindro; simplemente se dibujan las generatrices paralelas al eje que pasan por los puntos S y T hasta interceptar la recta CD; de esta manera, las generatrices que pasan por los puntos S y T determinan los puntos de entrada y de salida de la recta CD con el cilindro (puntos P y Q); al final, se aplican criterios de visibilidad *(figura 8.24).*



Desarrollo de la intersección entre la recta CD con el cilindro oblicuo, ejemplo 4
Figura 8.24

8.6 Ejercicios

8.6.1 Ejercicio 1

Determinar la intersección entre los elementos representados en cada figura; utilice el método del plano como filo, muestre el procedimiento completo, y visualice al final *(figuras 8.25 y 8.26).*

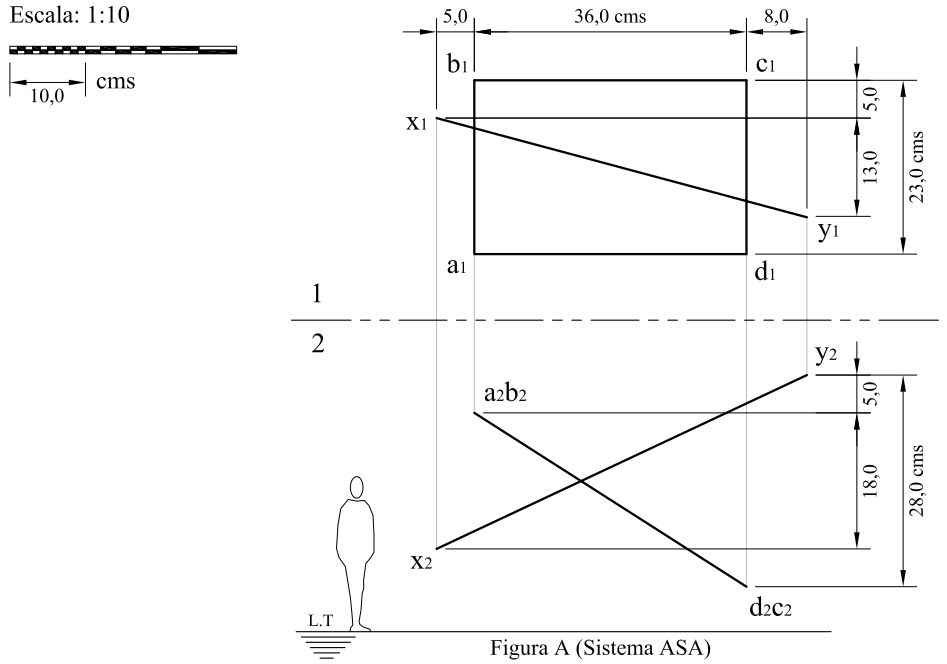


Figura A (Sistema ASA)

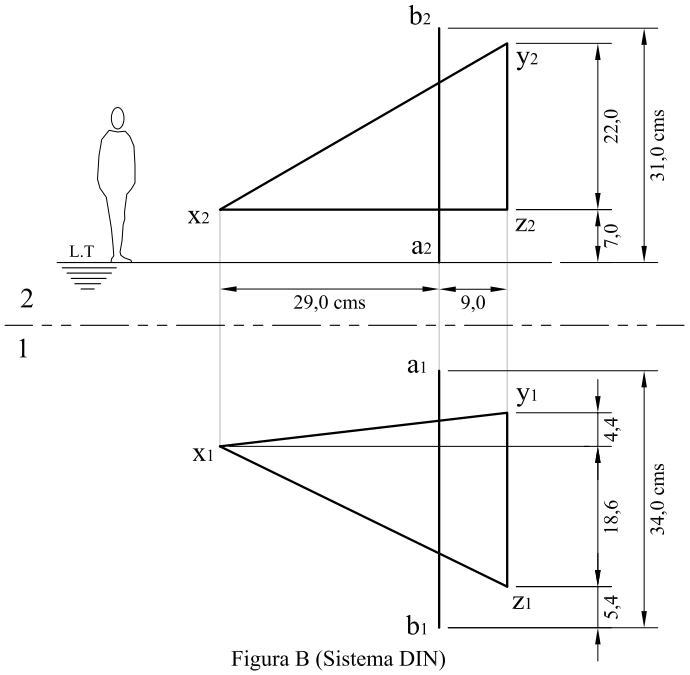


Figura B (Sistema DIN)

Ejercicios propuestos para resolver su respectiva intersección (Método del plano como filo)
Figura 8.25

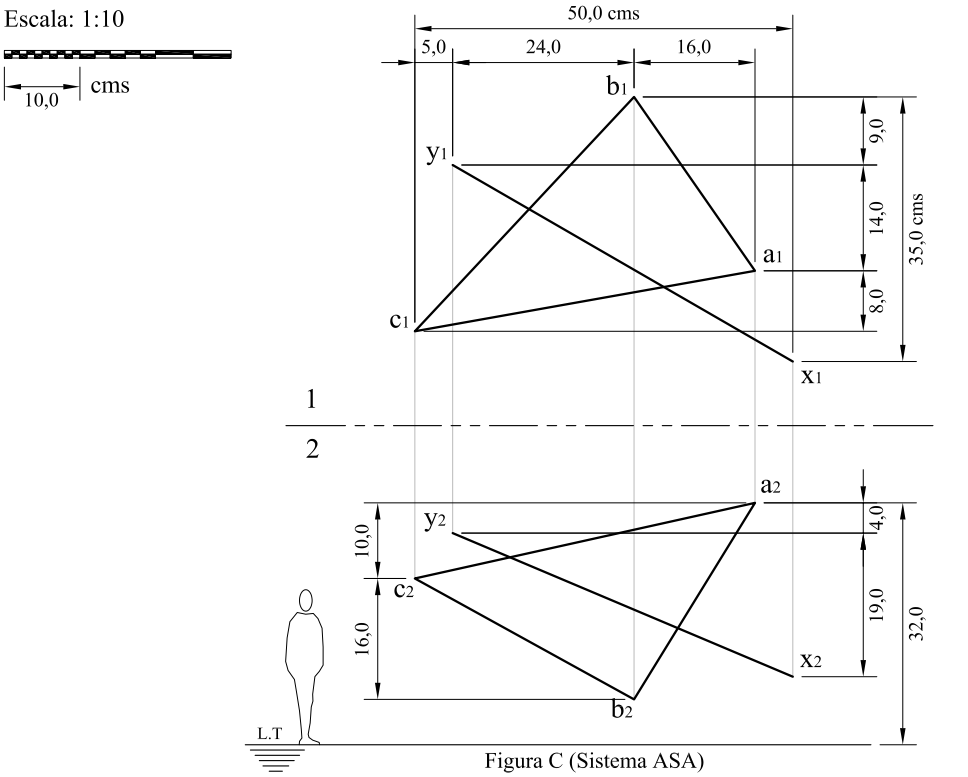


Figura C (Sistema ASA)

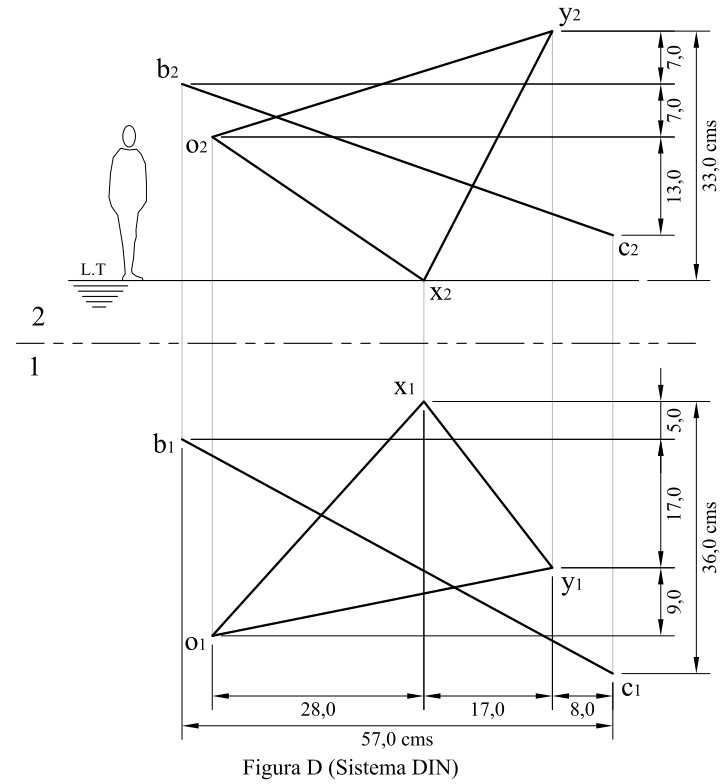


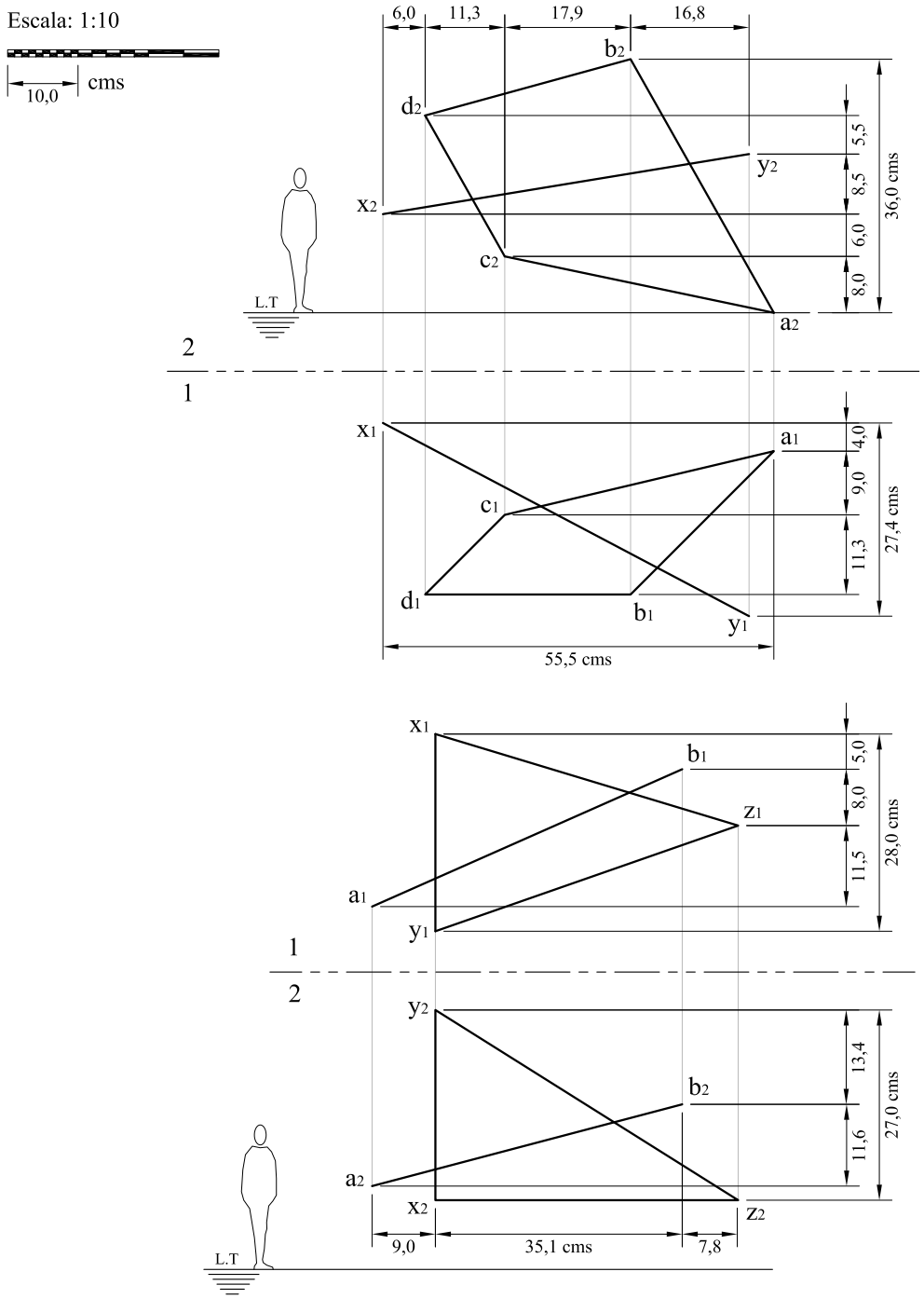
Figura D (Sistema DIN)

Ejercicios propuestos para resolver su respectiva intersección (Método del plano como filo)

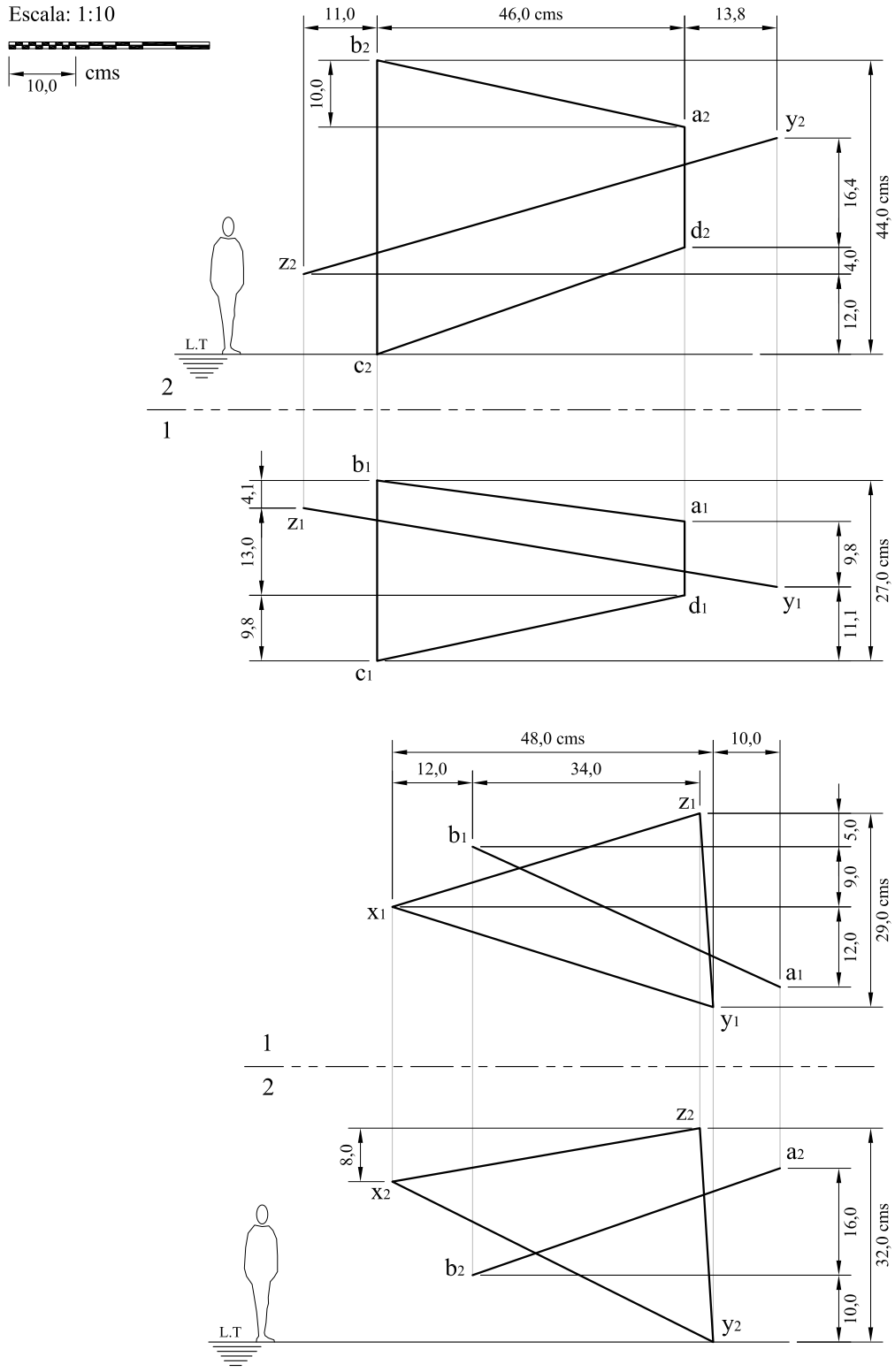
Figura 8.26

8.6.2 Ejercicio 2

Determinar la intersección entre los elementos representados en cada figura; utilice el método del plano cortante, muestre el procedimiento completo, y visualice al final *(figuras 8.27 y 8.28).*



Ejercicios propuestos para resolver su respectiva intersección (Método del plano cortante)
Figura 8.27

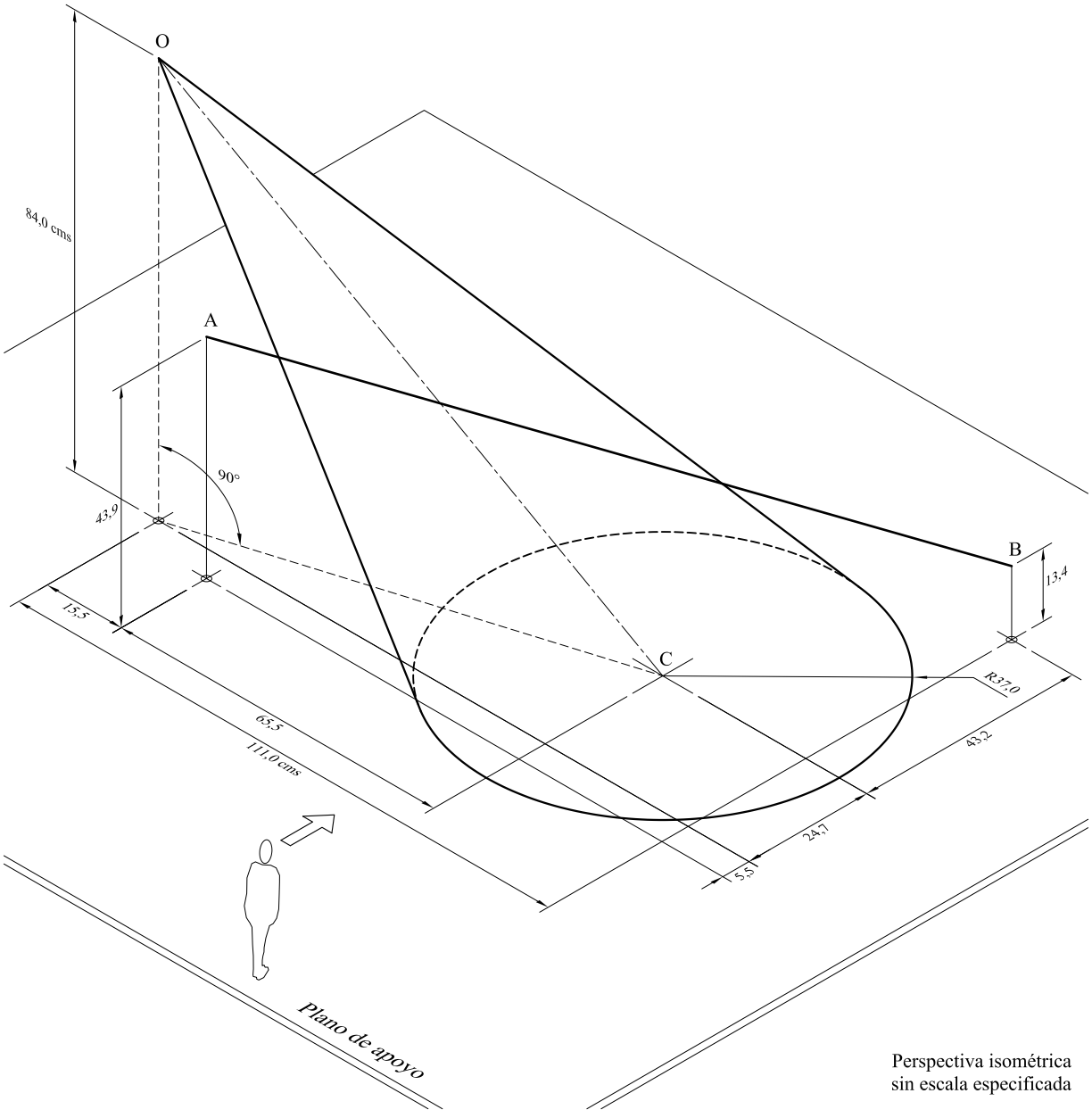


Ejercicios propuestos para resolver su respectiva intersección (Método del plano cortante)
Figura 8.28

8.6.3 Ejercicio 3

Determine la intersección entre el cono oblicuo CO y la recta AB, utilizando el método del plano cortante; construya las dos vistas principales a partir de la información suministrada en la perspectiva, resuelva el ejercicio mostrando el procedimiento completo, y visualice al final *(figura 8.29)*.

Trabajar a escala 1: 7,5; en sistema ASA, en un formato de 1/8 de pliego de papel.

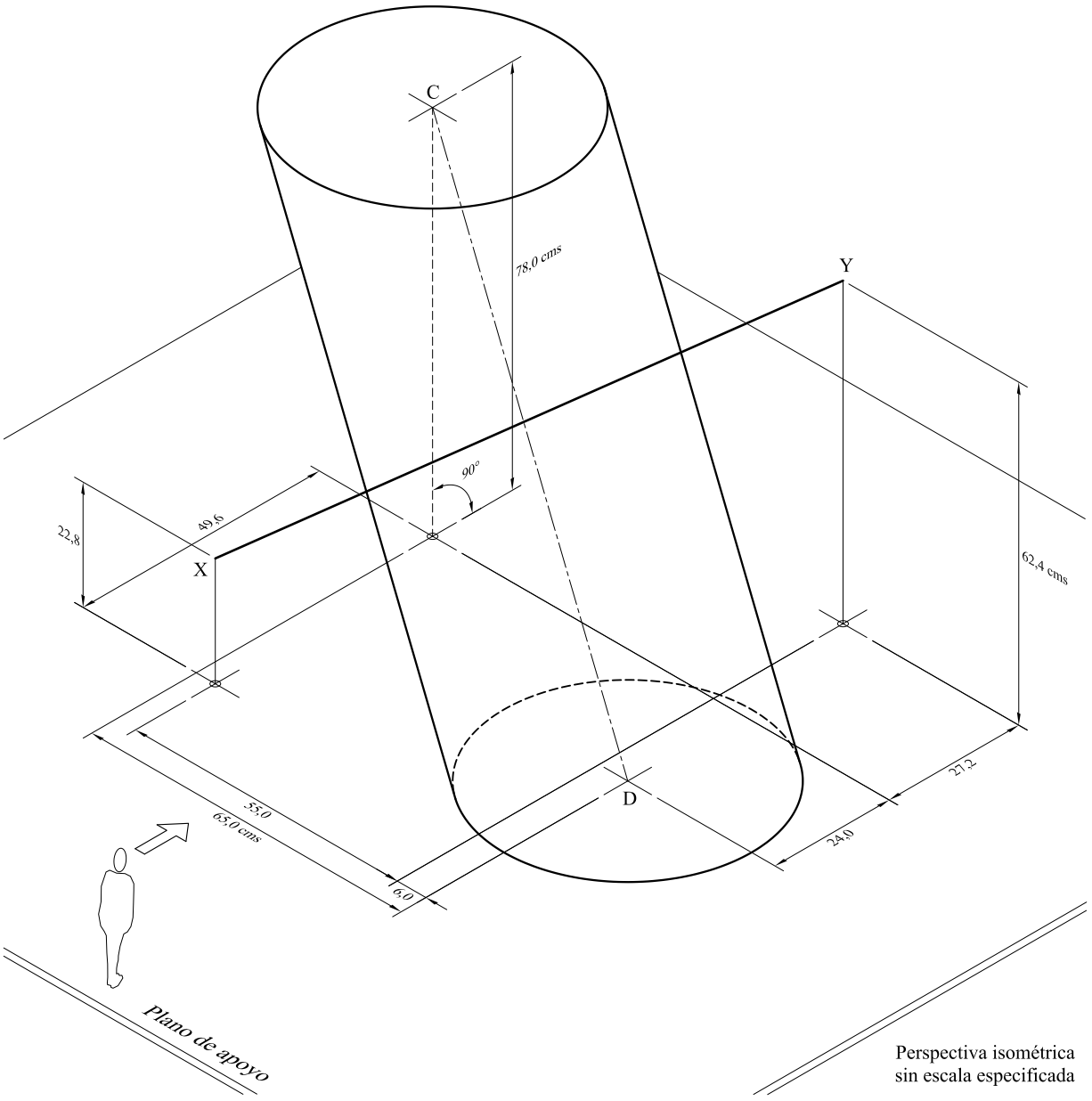


Ejercicio propuesto para resolver su intersección (Método del plano cortante)
Figura 8.29

8.6.4 Ejercicio 4

Determine la intersección entre el cilindro oblicuo CD y la recta XY, utilizando el método del plano cortante; construya las dos vistas principales a partir de la información suministrada en la perspectiva, resuelva el ejercicio mostrando el procedimiento completo, y visualice al final *(figura 8.30)*.

Trabajar a escala 1: 7,5; en sistema ASA, en un formato de 1/8 de pliego de papel.



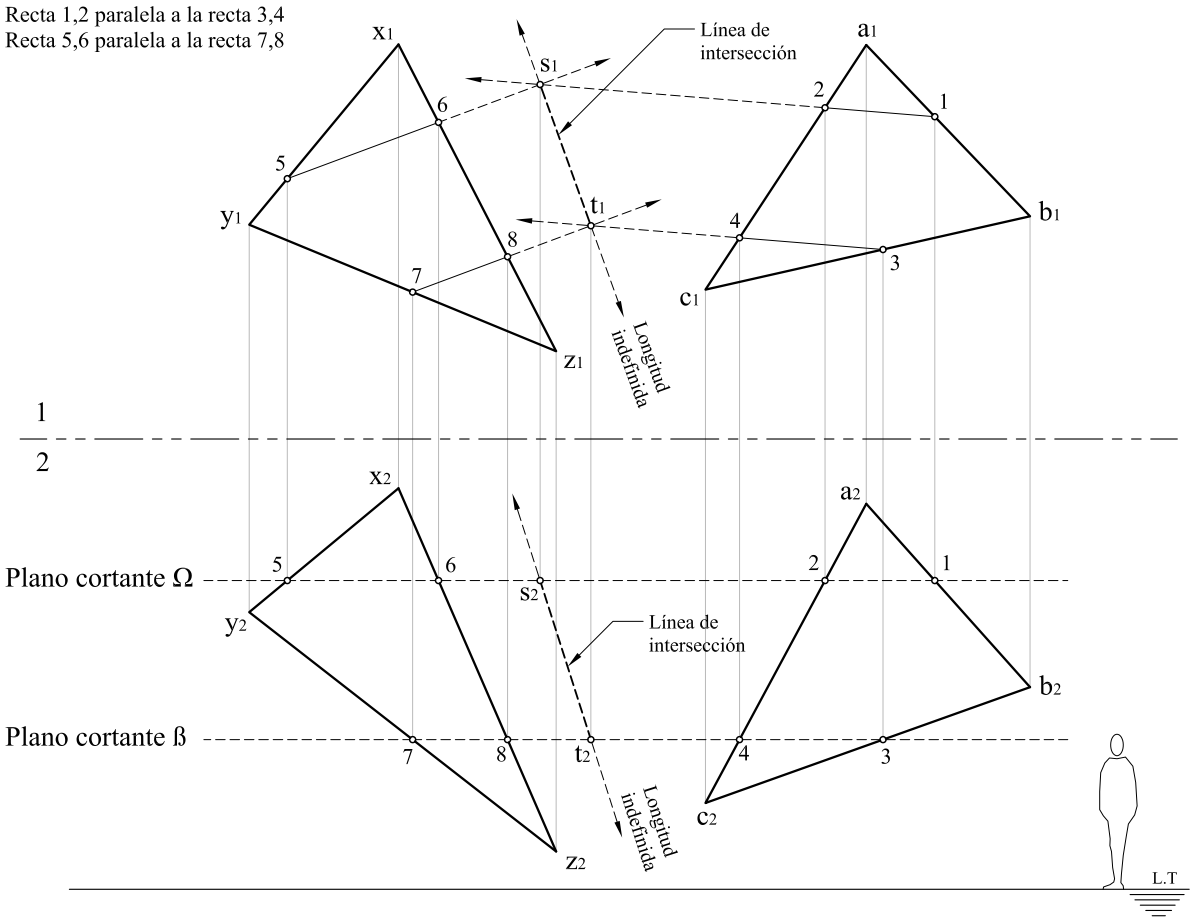
Ejercicio propuesto para resolver su intersección (Método del plano cortante)
Figura 8.30

9.0 Intersecciones entre planos y sólidos

9.0 Intersecciones entre planos

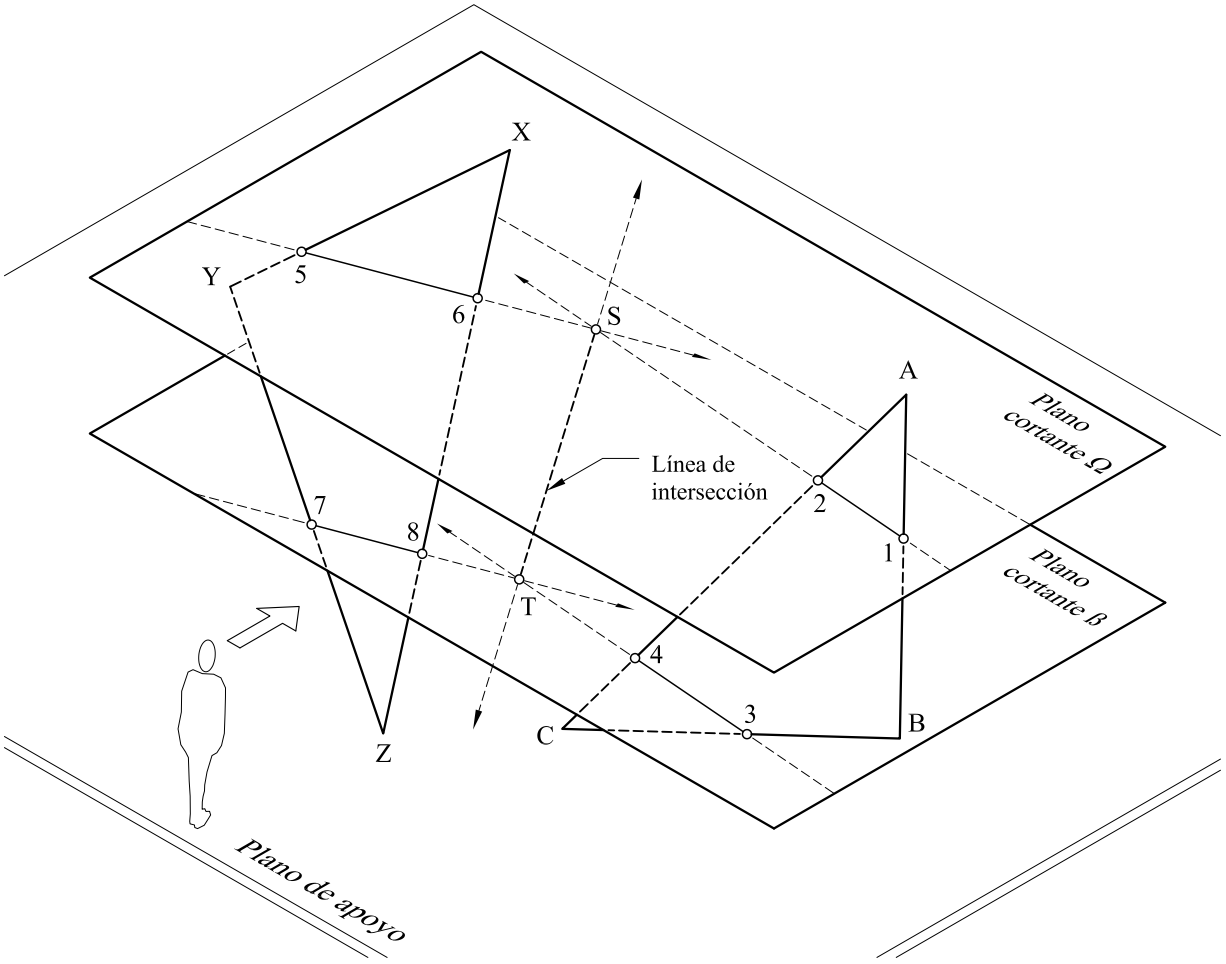
Cuando dos planos no son paralelos entre sí, significa que estos se interceptan en una línea recta, por lo tanto, el problema se reduce en determinar dos puntos de dicha recta; para esto, se debe tener en cuenta si la intersección es aparente o real.

En el caso de la intersección aparente, los planos representados se encuentran separados al menos en una vista o en ambas vistas; cuando esta situación se presenta, se recomienda aplicar el método de los planos cortantes paralelos *(figura 9.1).*



Intersección aparente entre los planos ABC y XYZ (Método de los planos cortantes paralelos)
Figura 9.1

El método de los planos cortantes paralelos, consiste en plantear al menos dos planos paralelos entre sí, y que sean cortantes; dichos planos interceptarán a los planos ABC y XYZ dados en cuatro líneas, donde cada par de líneas contenidas en uno de los planos serán paralelas entre sí, y por lo tanto, se cortan con el par de líneas del otro plano dado; de esta manera, se obtienen los dos puntos (S y T), que definen la línea de intersección aparente entre los planos ABC y XYZ *(figura 9.2).*



Intersección aparente entre los planos ABC y XYZ (Método de los planos cortantes paralelos)
Figura 9.2

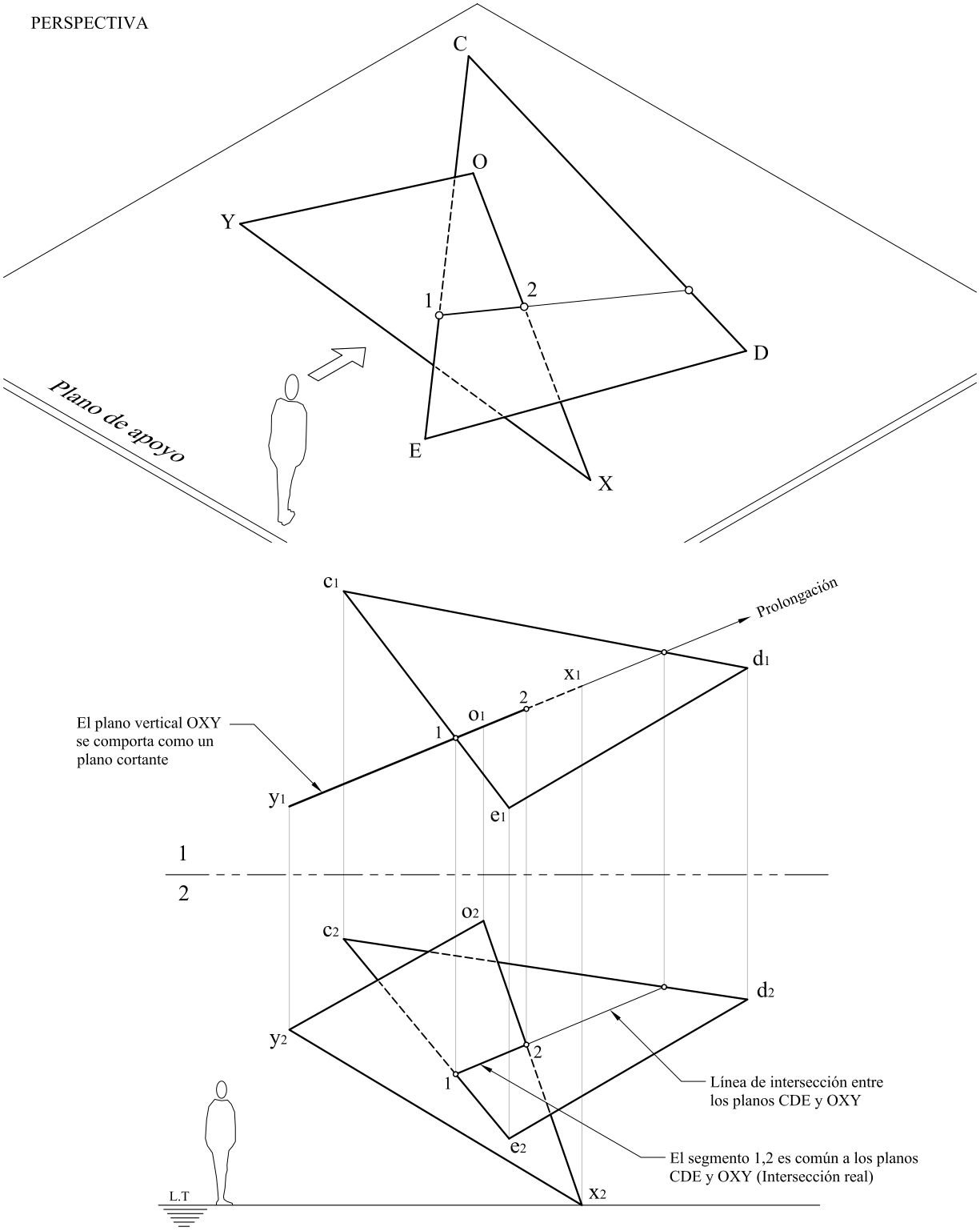
Por conveniencia, se recomienda construir 2 planos cortantes adicionales con el propósito de rectificar la localización exacta de la intersección resultante, incluso se pueden plantear en la otra vista.

De acuerdo al comportamiento geométrico obtenido en la figura 9.2, se deduce el siguiente teorema:

Teorema 22: Si dos o más planos paralelos entre sí son interceptados por un plano secante, las intersecciones obtenidas serán paralelas entre sí.

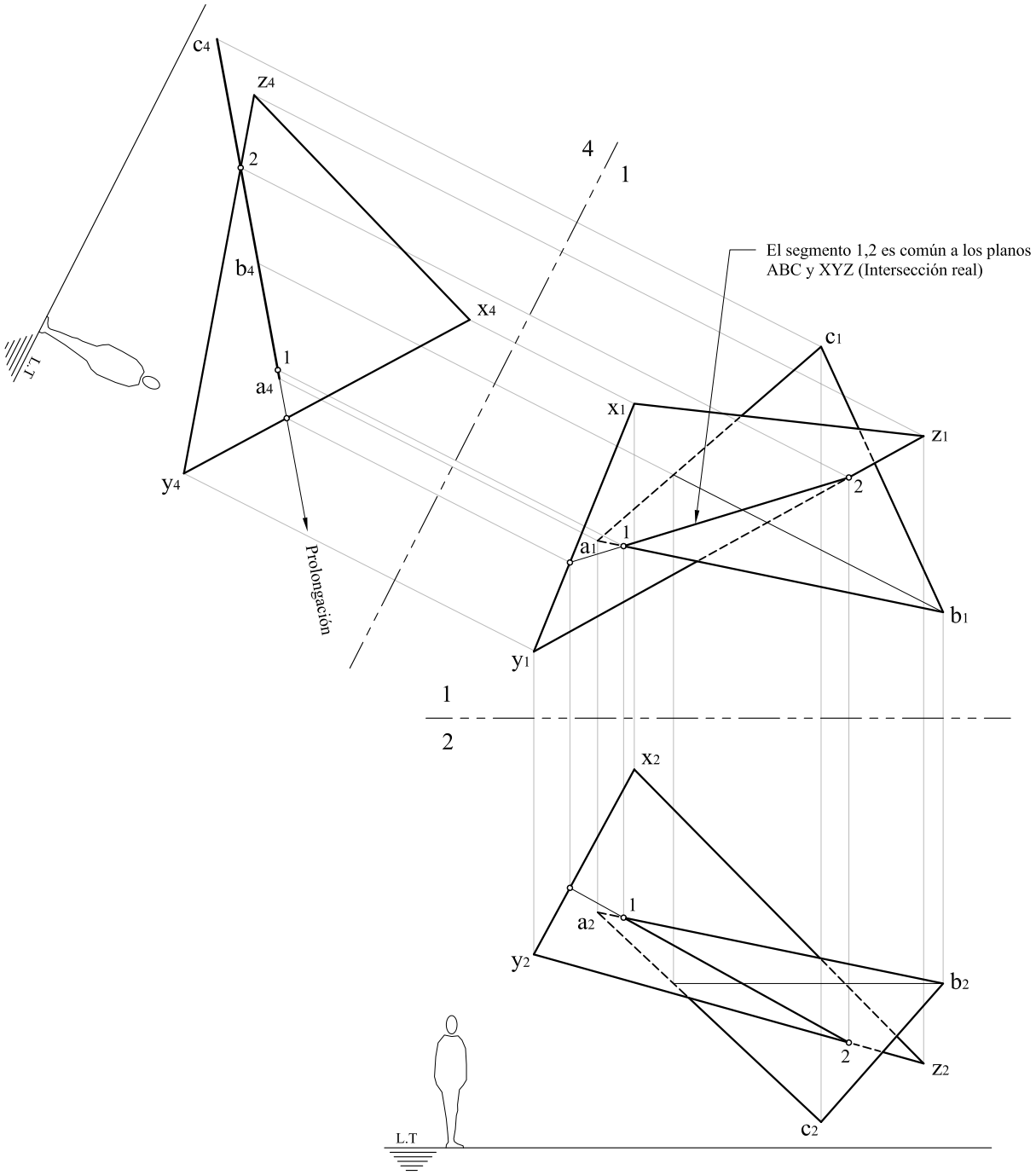
Para el caso de las intersecciones reales, se podría decir que estas suelen presentarse cuando los planos dados se cruzan en ambas vistas; los métodos empleados para resolver intersecciones reales entre dos planos, consisten en el método del plano como filo, y el método del plano cortante individual.

El método del plano como filo consiste en que el plano proyectado como filo se comporta como un plano cortante, el cual, determinará la línea de intersección entre ambos planos; luego, se identifica el segmento de línea que realmente pertenezca a dichos planos; posteriormente, se aplican criterios de visibilidad en todas las vistas*(figura 9.3).*



Intersección real entre los planos CDE y OXY (Método del plano como filo)
Figura 9.3

Cuando se tienen dos planos en posición oblicua, se procede a visualizar uno de los planos como filo, y se realiza de la misma manera anteriormente descrita; lo más importante es definir el segmento real de intersección que pertenezca a ambos planos, y proyectar en todas las vistas *(figura 9.4).*



Intersección real entre los planos ABC y XYZ (Método del plano como filo)
Figura 9.4

El método del plano cortante individual, consiste en plantear un plano auxiliar cortante en cada línea delimitadora de los planos dados, hasta determinar los dos puntos que definen la línea de intersección real que existe entre dichos planos; este proceso implica un análisis minucioso, debido a que se debe ir tanteando línea por línea; en otras palabras, se debe descomponer un plano en líneas y aplicar el método del plano cortante de estas respecto al otro plano, luego, se invierte el proceso de análisis; este método se utiliza cuando los planos se encuentran en posición oblicua, y por lo tanto, se requieren dos vistas para su solución.

Cuando se tienen dos planos en posición oblicua ABC y XYZ, y se descomponen en sus respectivas líneas delimitadoras, se obtienen las siguientes posibilidades para aplicar el método del plano cortante:

ALTERNATIVA 1		ALTERNATIVA 2	
Plano ABC	Recta AB vs Plano XYZ	Plano XYZ	Recta XY vs Plano ABC
	Recta BC vs Plano XYZ		Recta YZ vs Plano ABC
	Recta AC vs Plano XYZ		Recta XZ vs Plano ABC

De las seis posibilidades de análisis, se requieren solo dos casos para determinar los extremos de la línea de intersección real; esto implicaría dibujar líneas de proyección para cada caso hasta conseguir el resultado solicitado, y por consiguiente, se congestionaría el dibujo en sí; para facilitar esta labor es conveniente utilizar el método visual[4].

El método visual permite tantear las posibilidades de intersección de cada recta respecto a un plano sin necesidad de dibujar, simplemente se utiliza una línea guía a escuadra, teniendo en cuenta la aplicación de unas reglas básicas; este método ayuda a economizar tiempo en el análisis, evitando el exceso de líneas de proyección en el dibujo. Las reglas para tener en cuenta son:

a) Regla del descarte

Si una recta no se cruza con el plano en una o dos vistas, quiere decir que dicha recta no interceptará al plano; por lo tanto, no hay punto de intersección, es vacío (Ø).

b) Regla de la posibilidad

Una recta tiene posibilidad de interceptarse con un plano, cuando esta se cruza con el mismo en ambas vistas; si hay dudas, entonces se rectifica con la tercera regla.

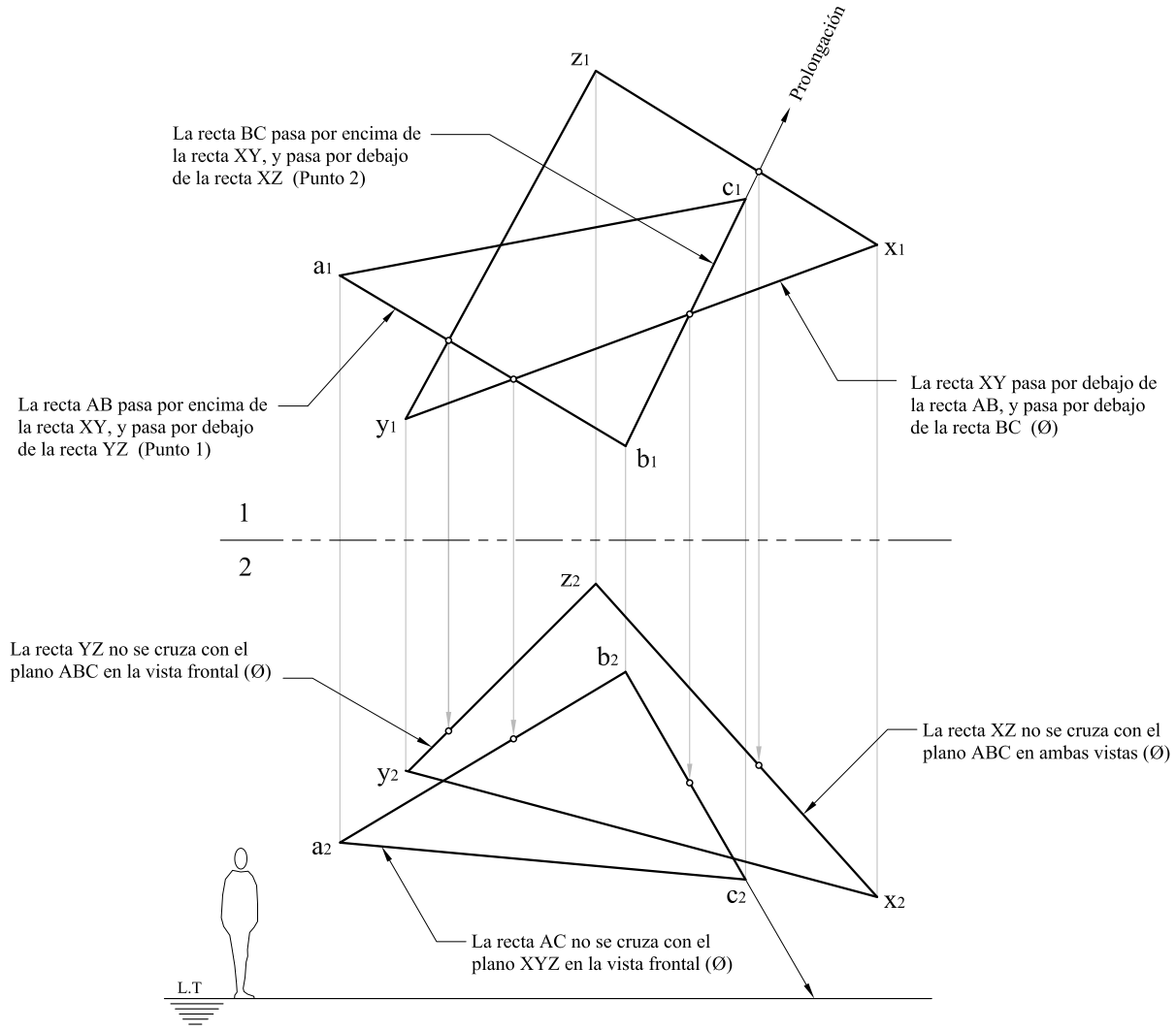
c) Regla del cruce

Cuando una línea se cruza con un plano, quiere decir que existen dos puntos de cruce (prolongar, si es necesario); si en un punto de cruce la recta pasa por encima del plano, y en el otro punto de cruce la recta pasa por debajo del mismo, quiere decir, que existe una intersección real; en cambio, si los dos puntos de cruce de la recta pasan por debajo del plano, o por encima del mismo, significa que la recta no interceptará al plano; por lo tanto, no habría punto de intersección, es vacío (Ø).

[4] Nota del Autor: Este método ha sido creado y desarrollado como una experiencia personal en mis labores de docencia; su cuantificación de efectividad dependerá de la habilidad del estudiante para aplicar las reglas propias.

Después de haber determinado las dos posibilidades contundentes, se procede a aplicar el método del plano cortante en las dos rectas obtenidas, y de esta manera, queda determinada la intersección real entre los planos dados.

A continuación se muestran las proyecciones de dos planos ABC y XYZ en posición oblicua, con las respectivas anotaciones del método visual *(figura 9.5)*



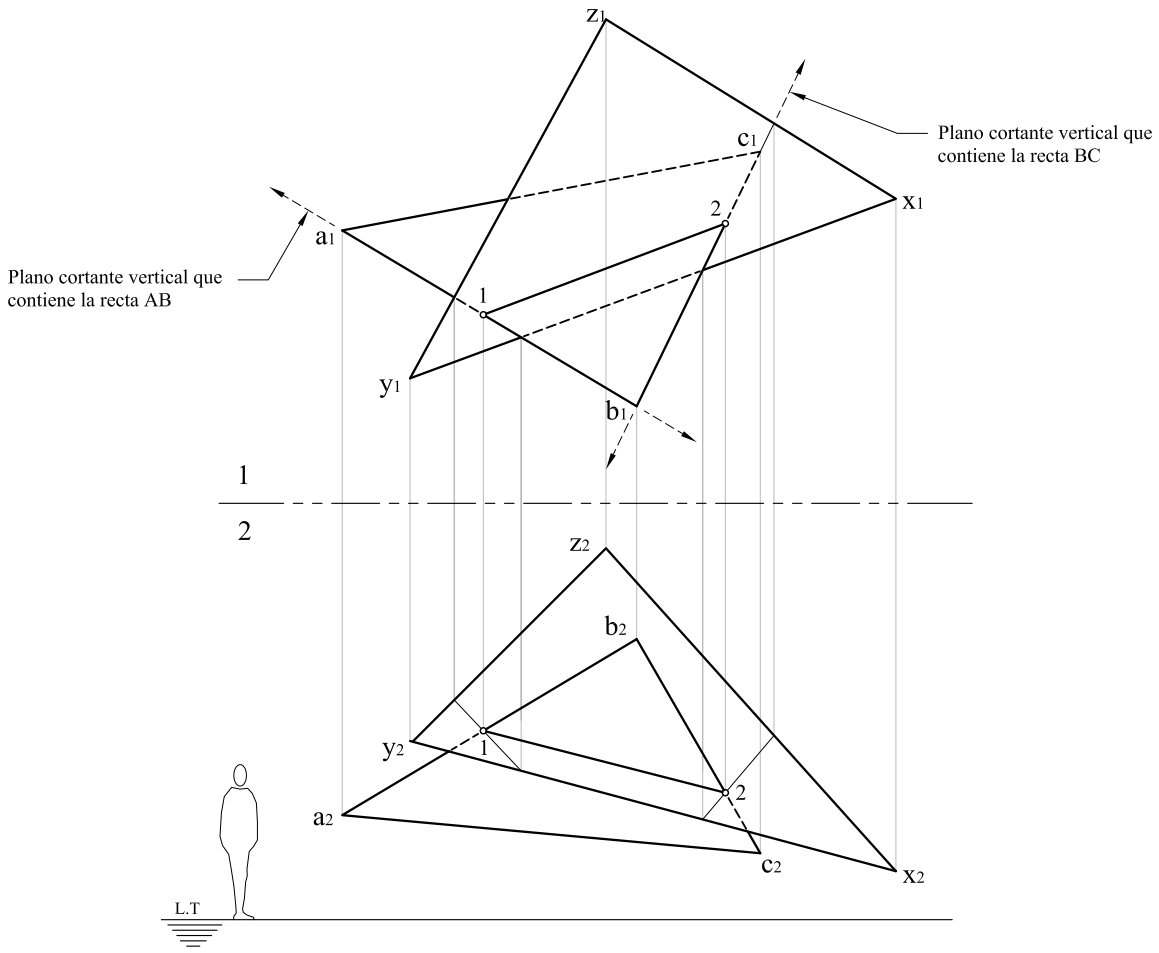
Plano ABC
- Recta AB vs Plano XYZ = Punto 1
- Recta BC vs Plano XYZ = Punto 2
- Recta AC vs Plano XYZ = Ø

Plano XYZ
- Recta XY vs Plano ABC = Ø
- Recta YZ vs Plano ABC = Ø
- Recta XZ vs Plano ABC = Ø

Luego, la intersección entre los planos ABC y XYZ = Línea 1,2

Método visual aplicado en los planos ABC y XYZ
Figura 9.5

De acuerdo al anterior análisis, se concluye que las rectas AB y BC son las rectas que comprometen la intersección respecto al plano XYZ; por lo tanto, para determinar los puntos de intersección 1 y 2, se aplica el método del plano cortante tanto en la recta AB como en la recta BC respectivamente, al final, se emplean criterios de visibilidad en ambas vistas *(figura 9.6).*

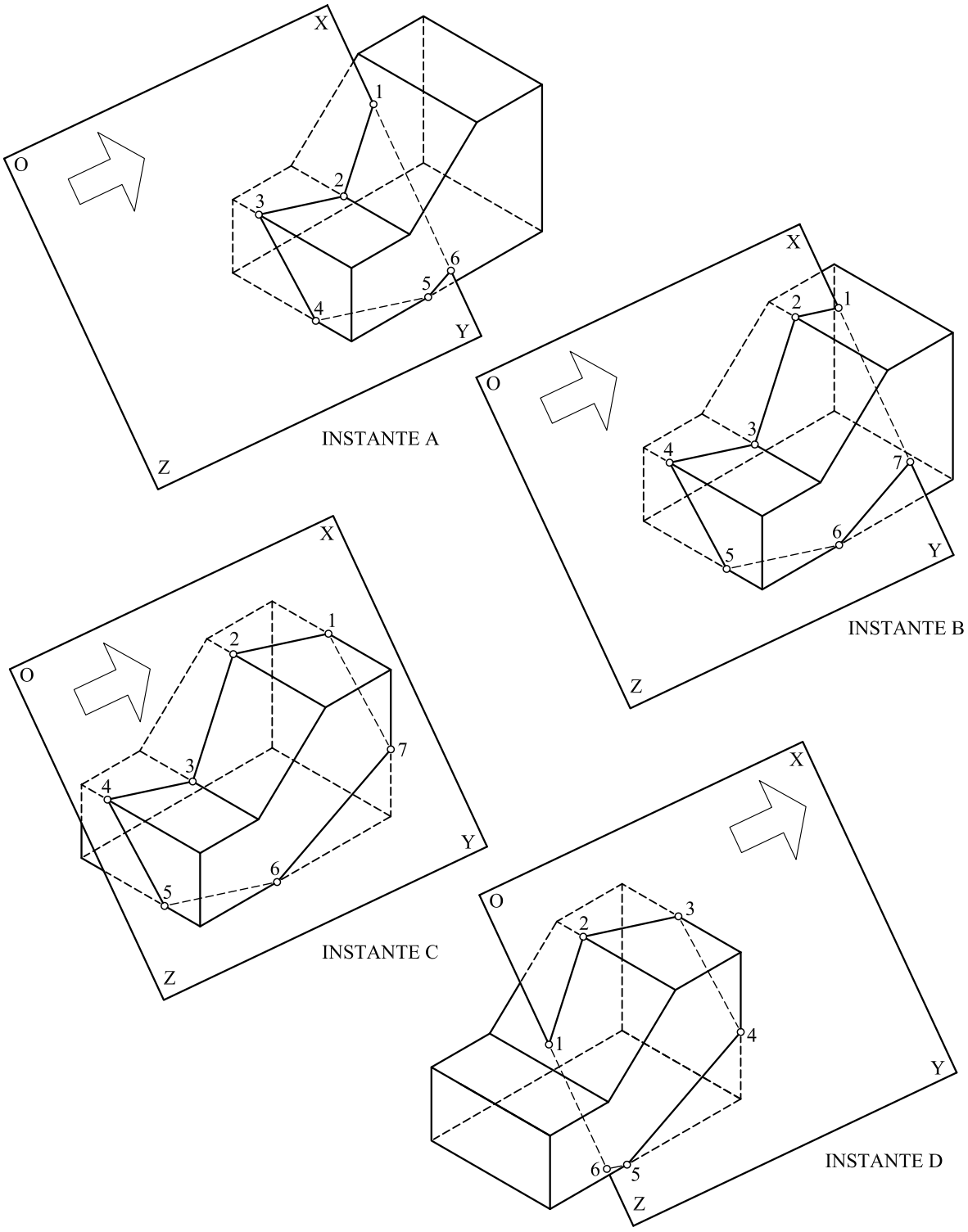


Intersección real entre los planos ABC y XYZ (Método del plano cortante)
Figura 9.6

9.1 Intersecciones entre planos y sólidos

Cuando un plano β intercepta a un objeto sólido, se determina una secuencia de líneas de intersección, las cuales pertenecerán al sólido, y a su vez, estarán contenidas en dicho plano β, si este plano atraviesa totalmente al sólido se obtendrá una figura plana regular o irregular según su geometría; lo más interesante, es la precisión que se presenta en la secuencia de líneas de intersección, debido a que los puntos extremos se van conectando entre sí, dando como resultado, una plasticidad de gran impacto visual en sus proyecciones.

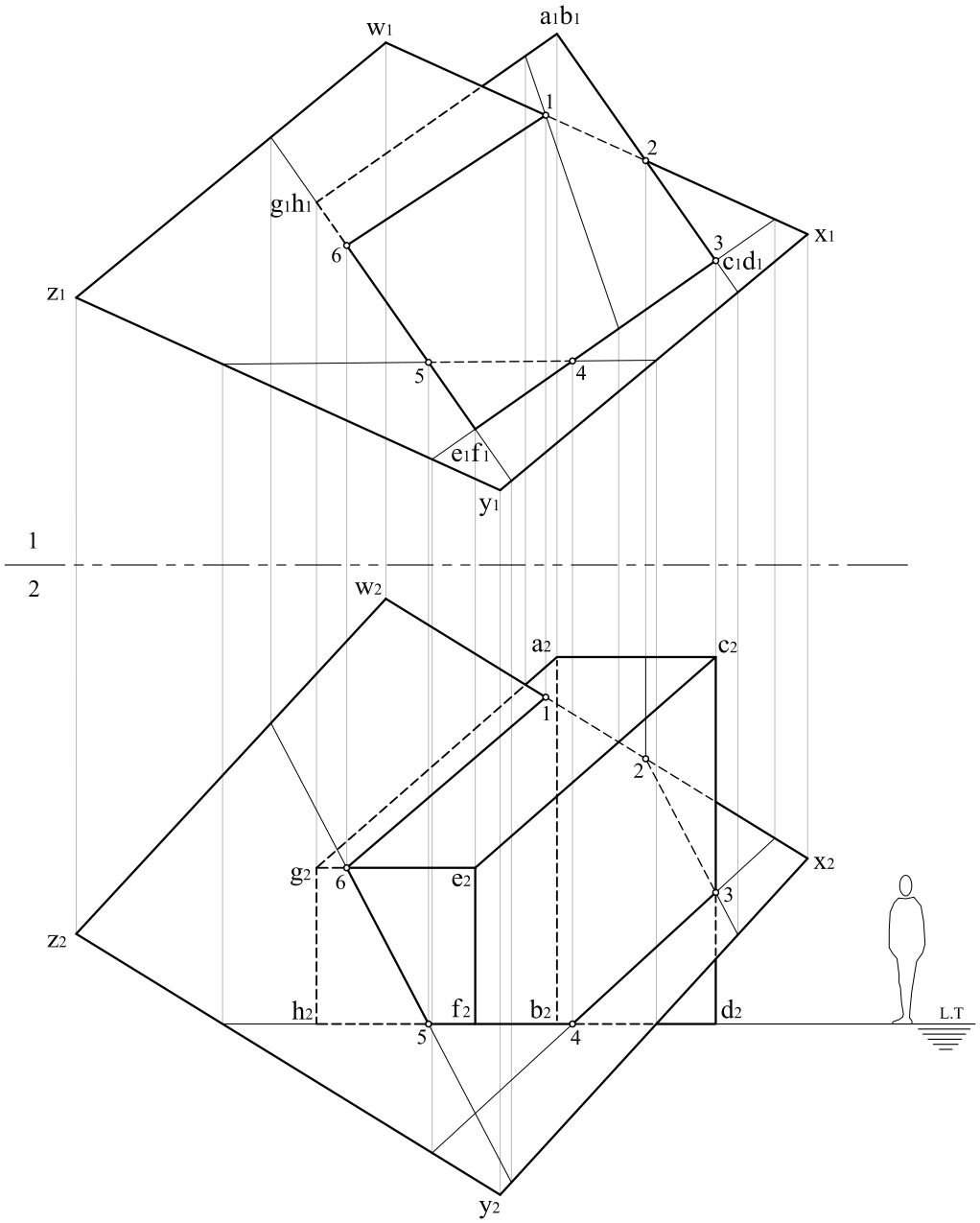
A manera de introducción, se plantea un plano oblicuo OXYZ y un sólido; supóngase que el plano se desplaza en su misma dirección. En la medida que se va moviendo dicho plano, se obtiene la secuencia de las líneas de intersección conectadas por sus extremos *(figura 9.7).*



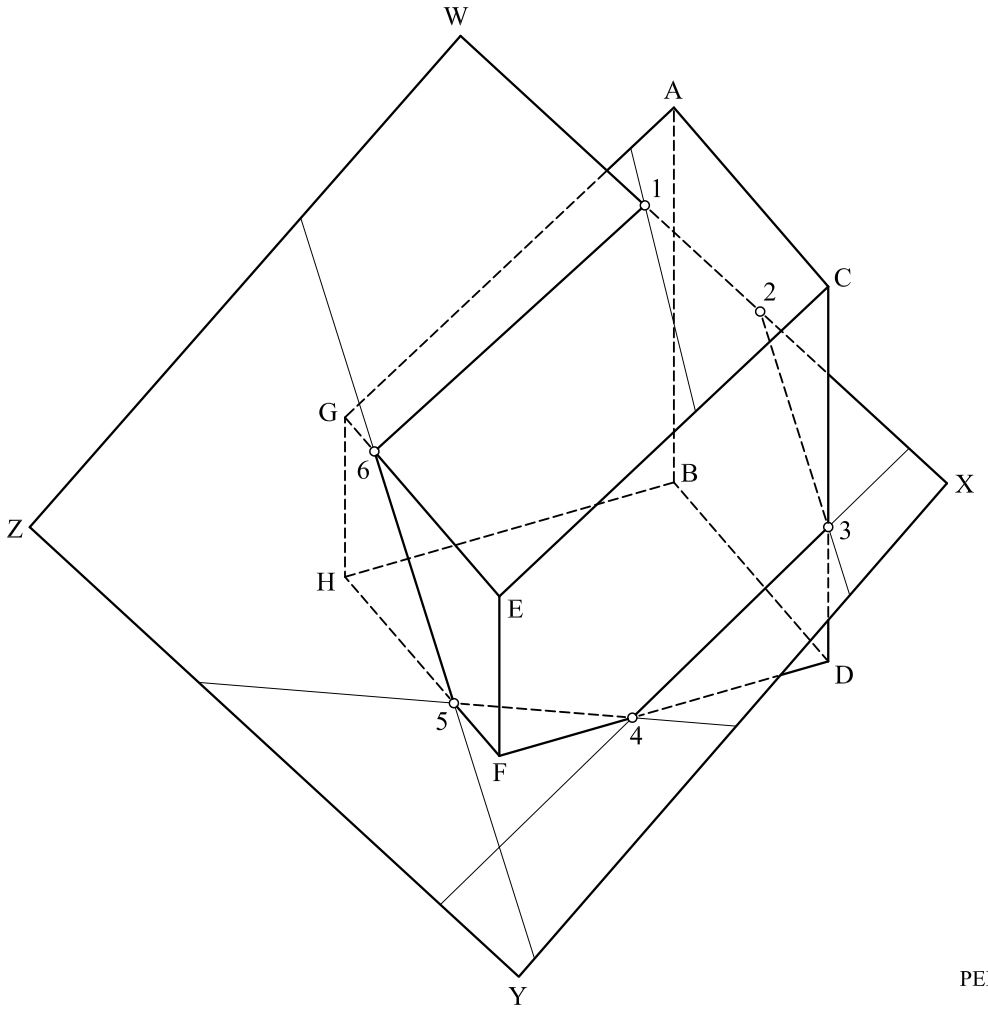
Desplazamiento secuencial de un plano oblicuo OXYZ a través de un sólido (Perspectiva)
Figura 9.7

9.1.1 Intersección entre un plano y un prisma recto truncado

Para encontrar la intersección entre un plano oblicuo y un prisma recto truncado, se recomienda aplicar los métodos anteriormente descritos; incluso, se puede llevar un registro de las intersecciones en forma individual para facilitar el análisis, es decir, se descompone el plano en líneas rectas para determinar los puntos de entrada y de salida en el prisma; luego, se determina la intersección del plano oblicuo respecto a los planos del prisma, y al final se aplican criterios de visibilidad *(figuras 9.8 y 9.9).*



Intersección entre un plano oblicuo WXYZ y un prisma recto truncado
Figura 9.8



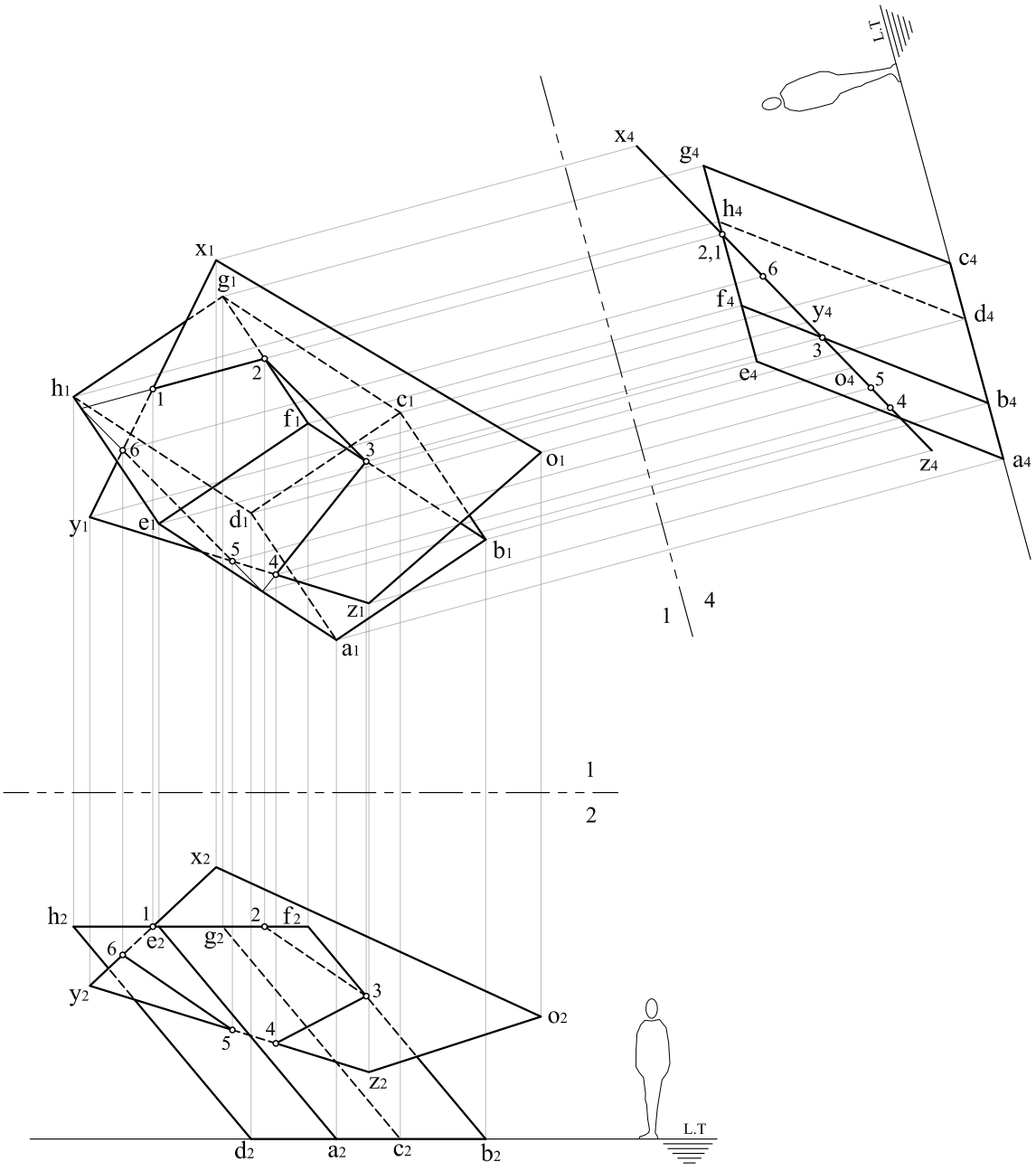
PERSPECTIVA

	DESCOMPOSICIÓN Y POSIBILIDADES	INTERSECCIÓN ENTRE RECTAS Y PLANOS	INTERSECCION ENTRE PLANOS
PLANO WXYZ	Recta WX = Puntos 1 y 2 Recta XY = Ø Recta YZ = Ø Recta WZ = Ø	WX vs ACEG = Punto 1 WX vs ABCD = Punto 2	WXYZ vs ABCD = Línea 2,3 WXYZ vs CDEF = Línea 3,4 WXYZ vs BDFH = Línea 4,5 WXYZ vs EFGH = Línea 5,6 WXYZ vs ACEG = Línea 6,1

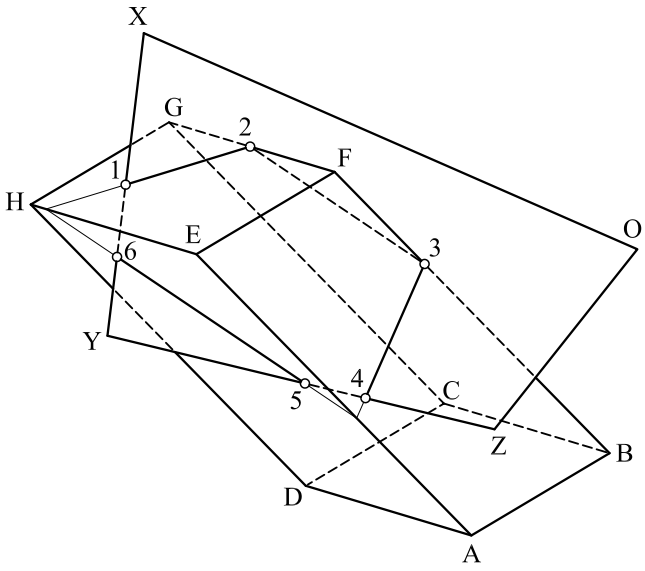
Análisis de intersección entre un plano oblicuo WXYZ y un prisma recto truncado (Perspectiva)
Figura 9.9

9.1.2 Intersección entre un plano y un prisma oblicuo

Dependiendo de la posición del prisma oblicuo dentro del cubo de proyección, los planos laterales de este se podrán proyectar como filo o deformados; si la mayoría de dichos planos son planos oblicuos, entonces, se recomienda visualizar el plano que intercepta al prisma como filo, y en esta vista se podrá apreciar la solución al problema; bastará relacionar los puntos y líneas de intersección hacia las demás proyecciones, y al final se aplican criterios de visibilidad *(figura 9.10 y 9.11).*



Intersección entre un plano oblicuo OXYZ y un prisma oblicuo (Método del plano como filo)
Figura 9.10



PERSPECTIVA

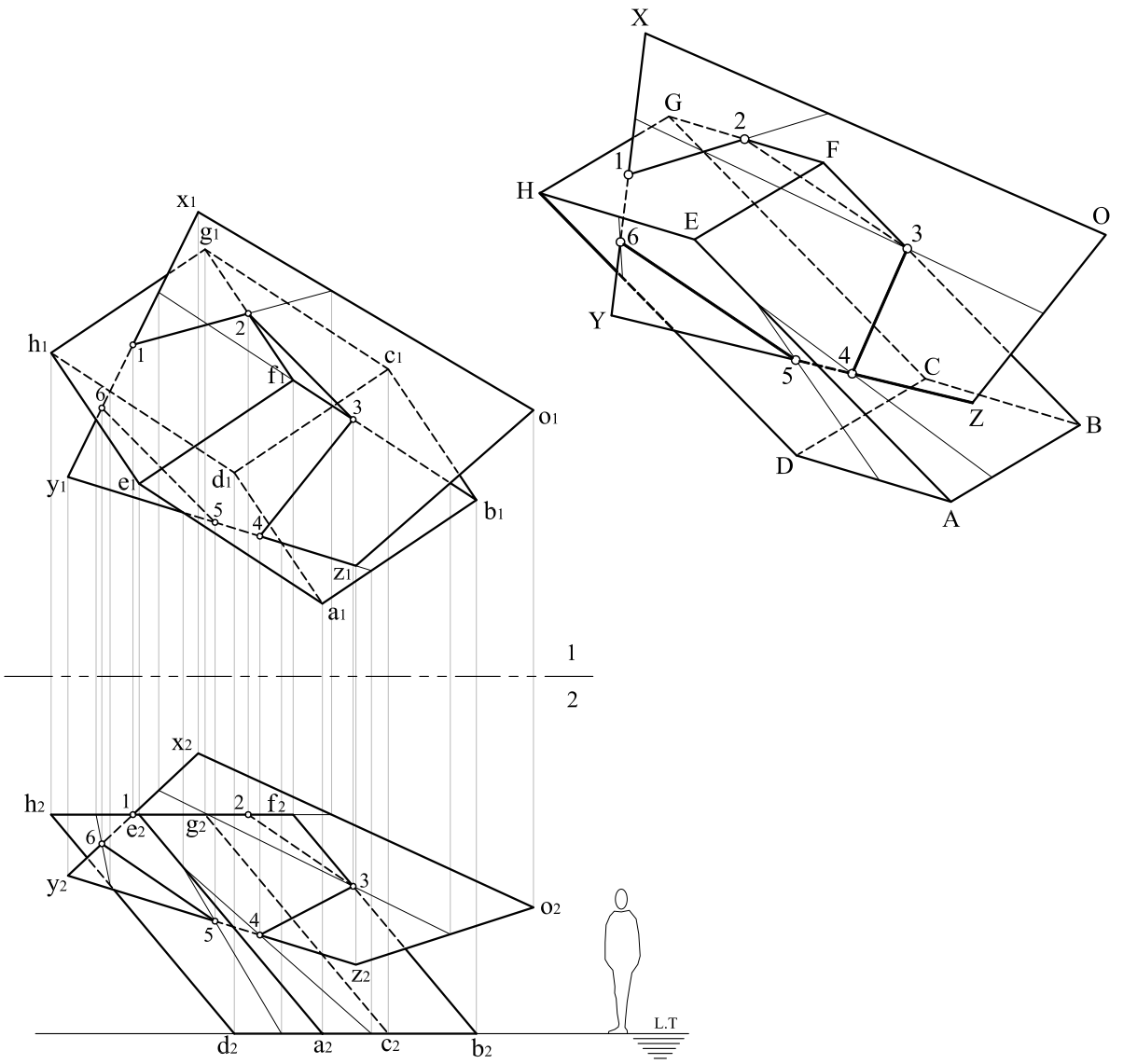
	DESCOMPOSICIÓN Y POSIBILIDADES	INTERSECCIÓN ENTRE RECTAS Y PLANOS	INTERSECCION ENTRE PLANOS
PLANO OXYZ	Recta OX = Ø Recta XY = Puntos 1 y 6 Recta YZ = Puntos 4 y 5 Recta OZ = Ø	XY vs EFGH = Punto 1 XY vs ADEH = Punto 6 XY vs ABEF = Punto 4 XY vs ADEH = Punto 5	OXYZ vs EFGH = Línea 1,2 OXYZ vs BCFG = Línea 2,3 OXYZ vs ABEF = Línea 3,4 OXYZ vs ADEH = Línea 5,6

Análisis de intersección entre un plano oblicuo OXYZ y un prisma oblicuo (Perspectiva)
Figura 9.11

Este mismo ejercicio puede resolverse aplicando el método del plano cortante, lo cual quiere decir, que se emplean sólo dos vistas; aunque se economiza una proyección auxiliar, se requiere realizar un análisis riguroso, e ir tanteando las intersecciones comprometidas; en este caso, es de gran ayuda la utilización del método visual.

Como el plano EFGH se proyecta como filo, entonces este interceptará al plano OXYZ en la línea 1,2; luego, se analizan las intersecciones entre rectas, tanto del prisma como del plano dado, aplicando el método del plano cortante individual.

Finalmente, se aplican criterios de visibilidad en ambas vistas *(figura 9.12).*

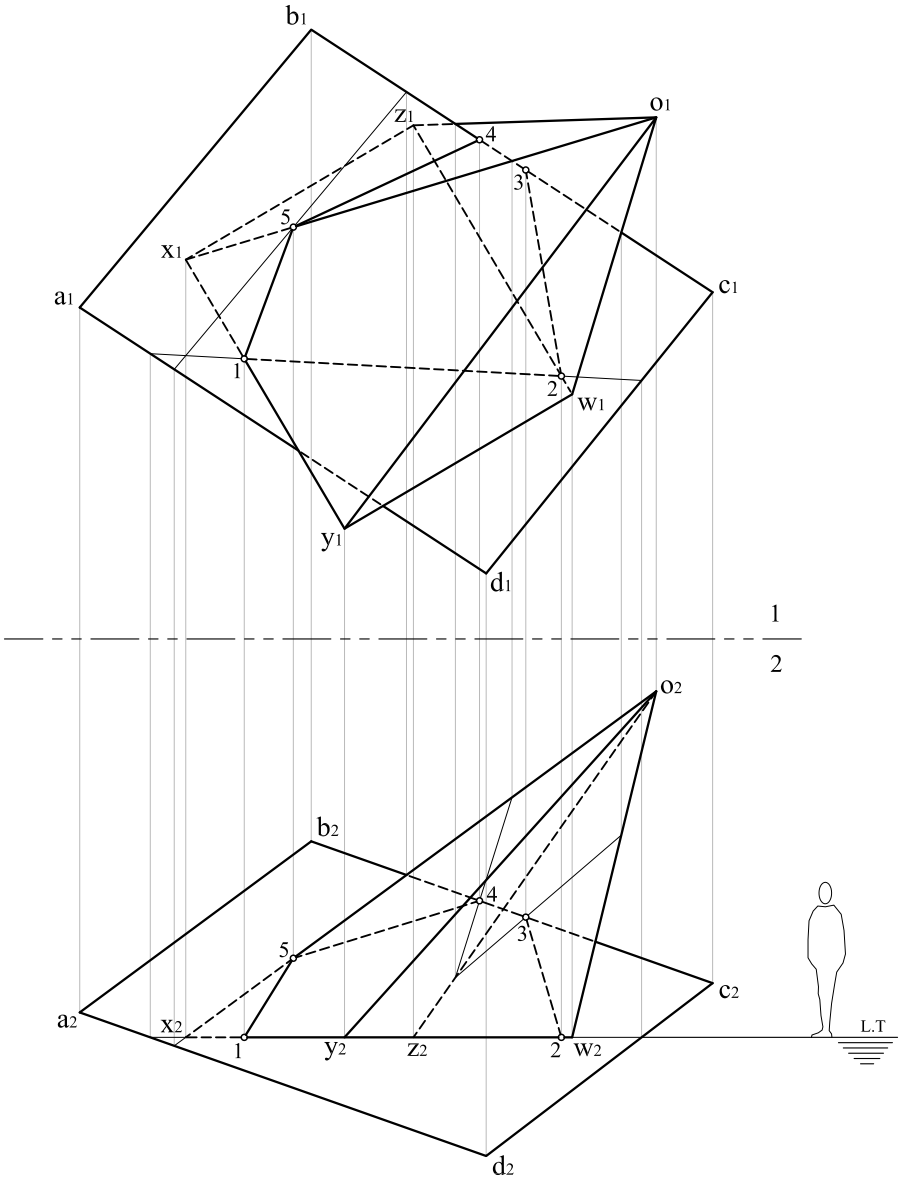


	DESCOMPOSICIÓN Y POSIBILIDADES	INTERSECCIÓN ENTRE RECTAS Y PLANOS	INTERSECCION ENTRE PLANOS
PLANO OXYZ	Recta OX = Ø Recta XY = Puntos 1 y 6 Recta YZ = Puntos 4 y 5 Recta OZ = Ø	BF vs OXYZ = Punto 3 YZ vs ABEF = Punto 4 YZ vs ADEH = Punto 5 XY vs ADEH = Punto 6	OXYZ vs EFGH = Línea 1,2 OXYZ vs BCFG = Línea 2,3 OXYZ vs ABEF = Línea 3,4 OXYZ vs ADEH = Línea 5,6

Análisis de intersección entre un plano oblicuo OXYZ y un prisma oblicuo (Método del plano cortante)
Figura 9.12

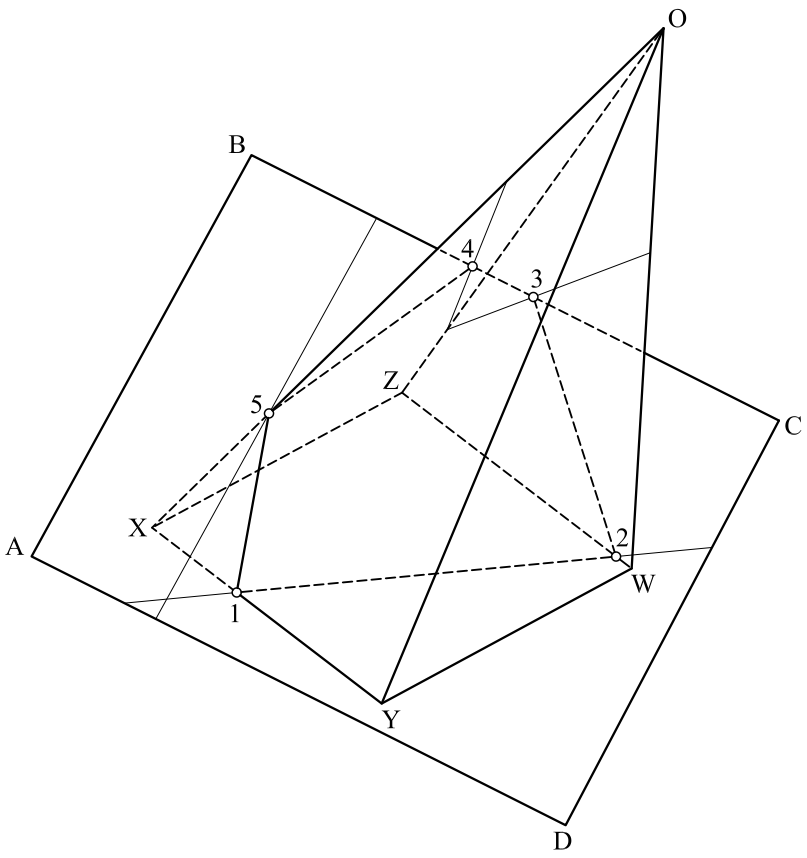
9.1.3 Intersección entre un plano y una pirámide oblicua

Al igual que en los anteriores casos, el lector podrá adoptar cualquiera de los dos métodos vistos para solucionar la intersección entre un plano dado y una pirámide oblicua; en este caso, conviene utilizar las dos vistas solamente. La base de la pirámide WXYZ y el plano oblicuo ABCD se interceptan en la línea 1,2 (método del plano como filo), luego, para determinar los demás puntos de intersección se utiliza el método del plano cortante; al final se visualiza *(figura 9.13).*



Intersección entre un plano oblicuo ABCD y una pirámide oblicua (Método del plano cortante)
Figura 9.13

A continuación se muestra un dibujo en perspectiva, donde se aprecian las líneas de intersección que hacen los planos cortantes empleados en la figura 9.13, las cuales determinan los puntos 3, 4, y 5, además, se muestran las líneas de intersección reales entre los planos involucrados; al final, se elabora un registro de las intersecciones del plano ABCD respecto a los planos de la pirámide *(figura 9.14).*



PERSPECTIVA

	DESCOMPOSICIÓN Y POSIBILIDADES	INTERSECCIÓN ENTRE RECTAS Y PLANOS	INTERSECCION ENTRE PLANOS
PLANO ABCD	Recta AB = Ø Recta BC = Puntos 3 y 4 Recta CD = Ø Recta AD = Ø	BC vs OWZ = Punto 3 BC vs OXZ = Punto 4 OX vs ABCD = Punto 5	ABCD vs WXYZ = Línea 1,2 ABCD vs OWZ = Línea 2,3 ABCD vs OXZ = Línea 4,5 ABCD vs OXY = Línea 1,5

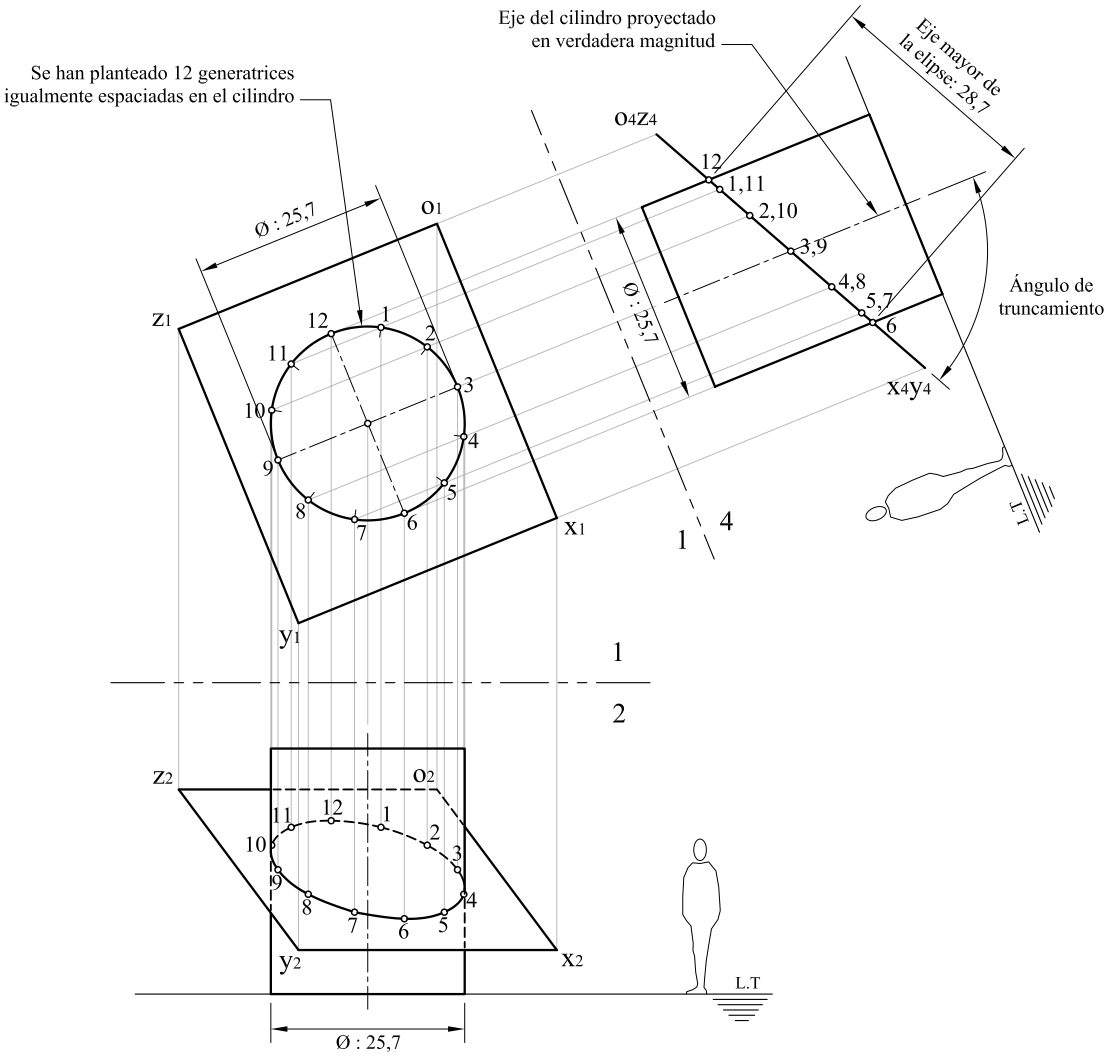
Análisis de intersección entre un plano oblicuo ABCD y una pirámide oblicua
Figura 9.14

9.1.4 Intersección entre un plano y un cilindro recto

Cuando un plano intercepta a un cilindro recto, se pueden obtener dos posibles secciones dependiendo de la posición del plano respecto al eje del cilindro; si el plano es perpendicular al eje del cilindro se obtendrá una sección circular, en cambio, si el plano no es perpendicular ni paralelo al eje del mismo, se obtendrá una sección elíptica; en este último caso, se cumple la siguiente regla:

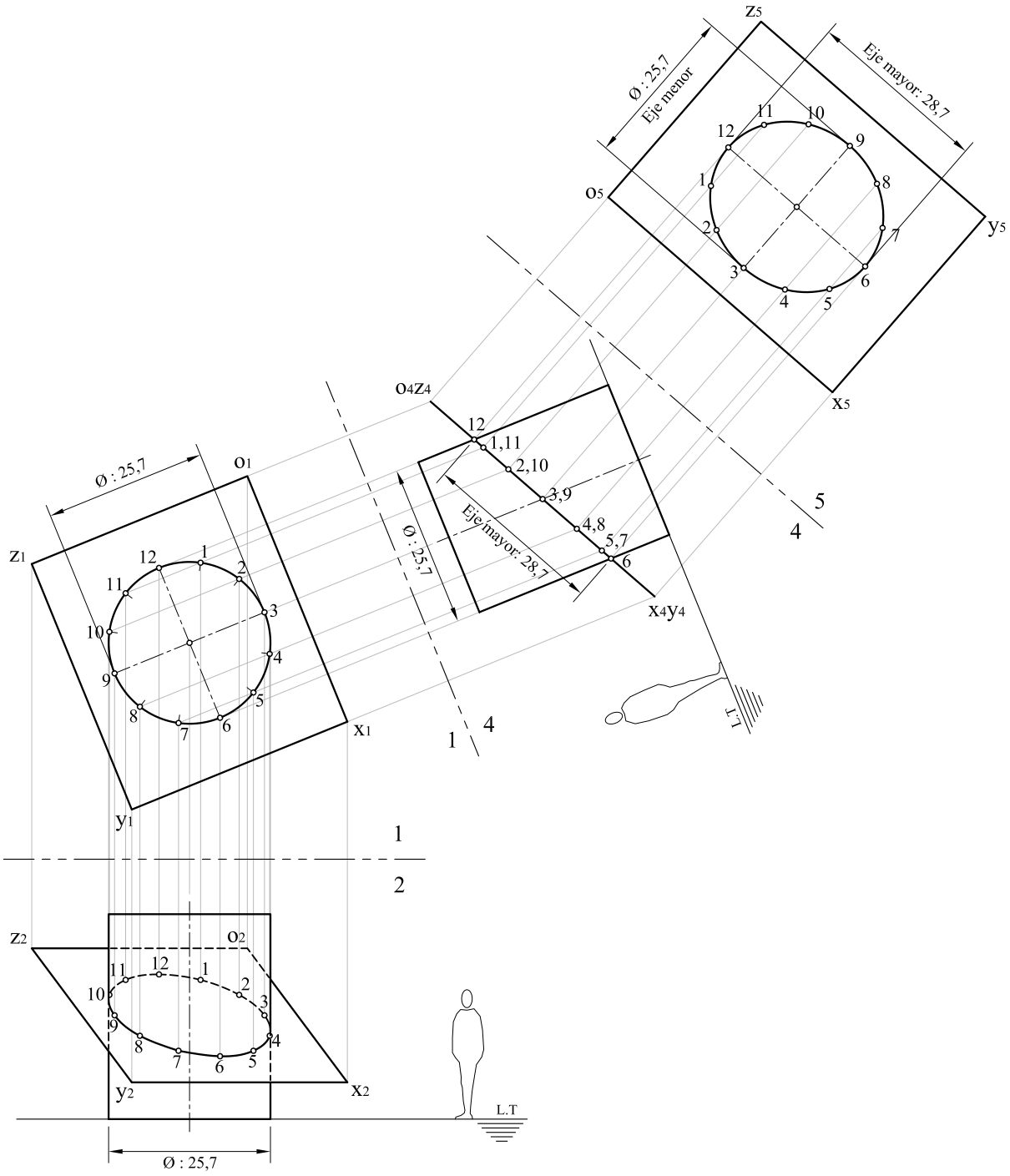
Regla 11: El eje menor de la sección elíptica en verdadera magnitud es igual al diámetro del cilindro, y el eje mayor de la misma sección será mayor al diámetro del cilindro.

Para encontrar la sección elíptica se utiliza el método del plano como filo, donde dicho plano intercepta a cada recta generatriz del cilindro (se plantean 12 generatrices como mínimo); en dicha proyección, se aprecia el ángulo de truncamiento del plano seccionante respecto al eje del cilindro proyectado en verdadera magnitud; al final, se relaciona cada punto obtenido hacia la vista frontal *(figura 9.15).*



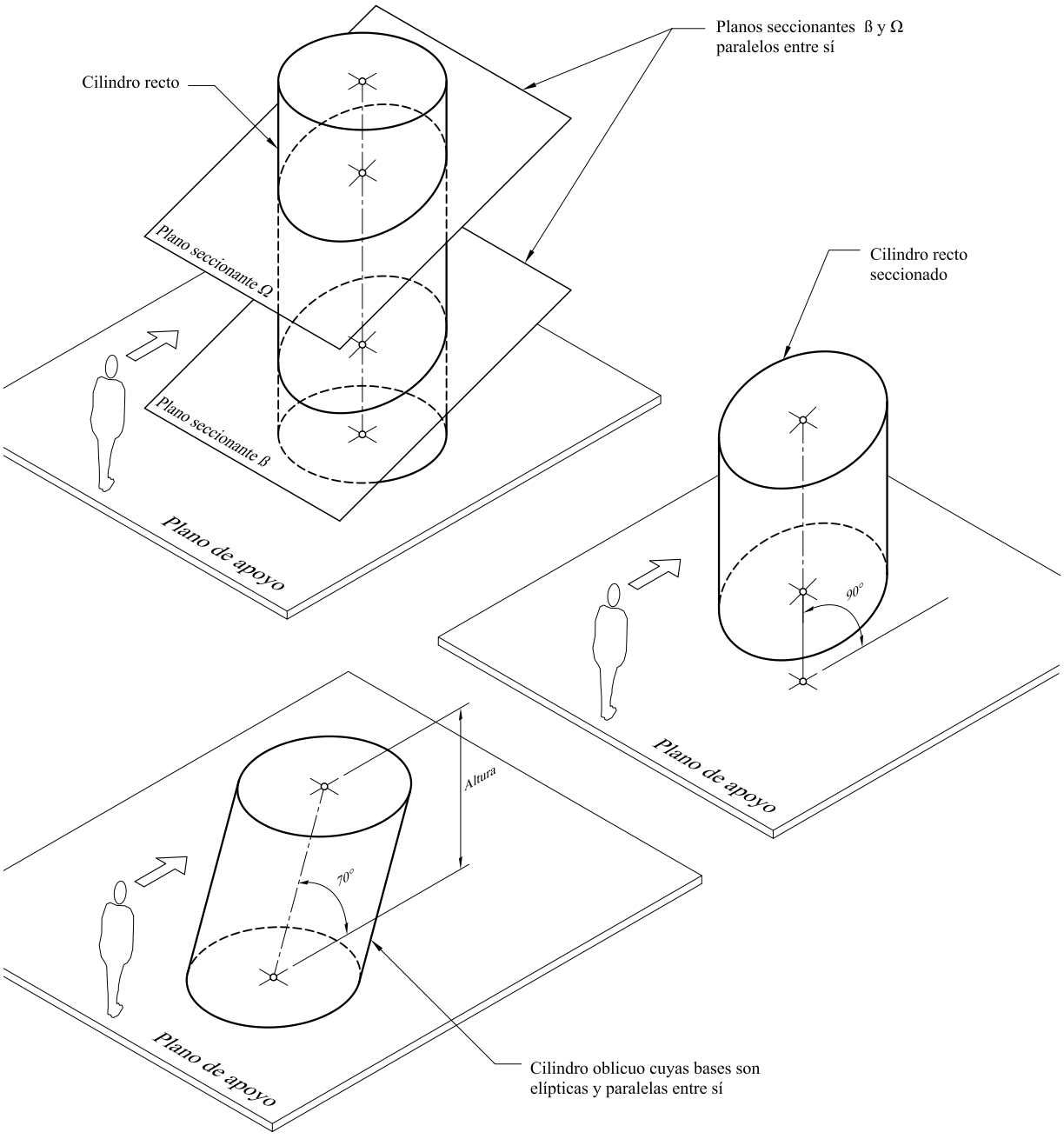
Intersección entre un plano OXYZ y un cilindro recto (Método del plano como filo)
Figura 9.15

Al determinar la verdadera forma de la sección elíptica, se cumple la regla anteriormente descrita; para ello, se plantea un eje de pliegue paralelo al plano OXYZ visto como filo *(figura 9.16).*



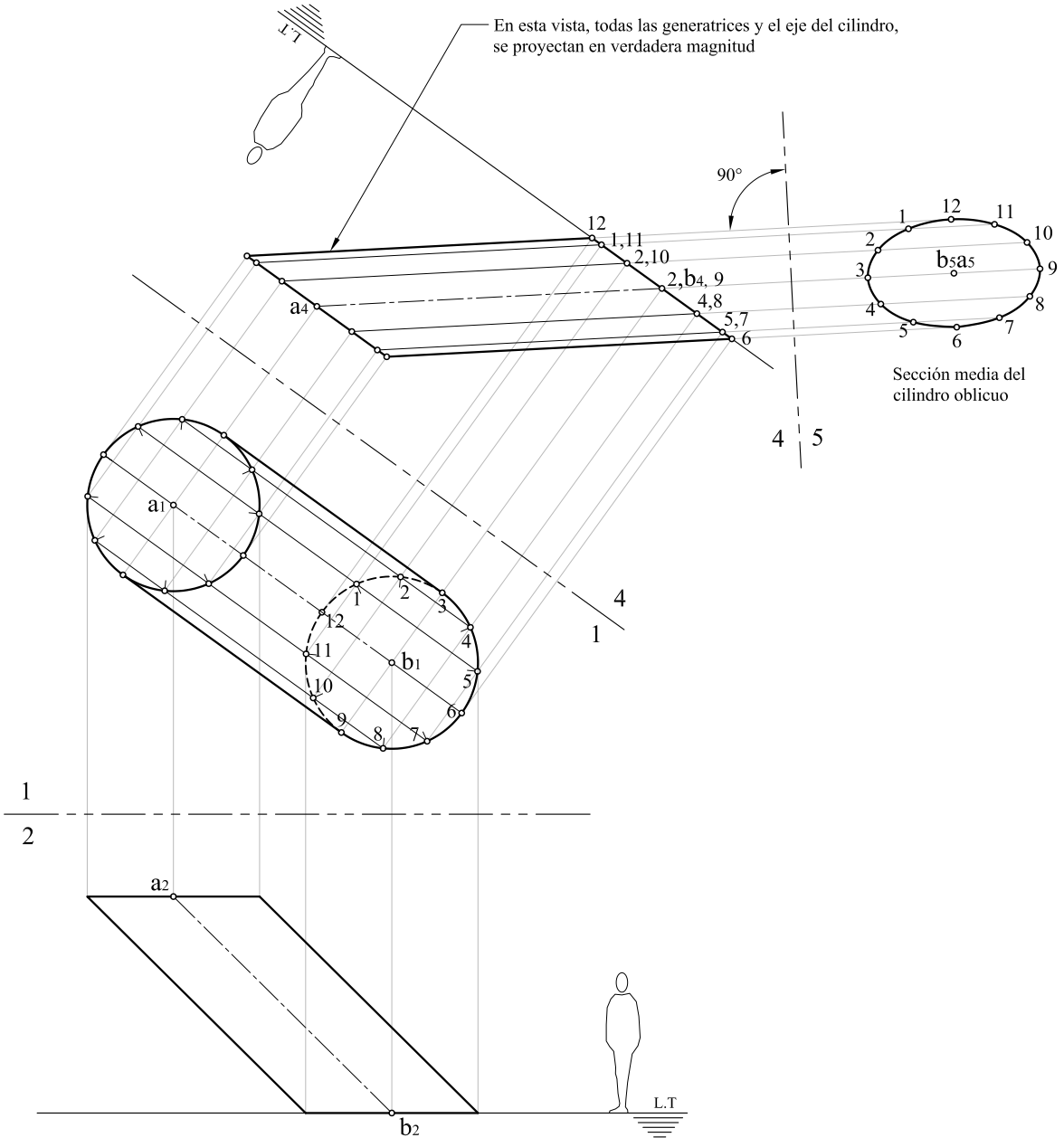
Intersección entre un plano OXYZ y un cilindro recto (Método del plano como filo)
Figura 9.16

Cuando un cilindro circular recto es interceptado por dos planos seccionantes paralelos entre sí, y que no sean perpendiculares, ni paralelos al eje del mismo, se determina un cilindro oblicuo; este se caracteriza porque posee sus bases elípticas y paralelas entre sí. Al situar su base inferior sobre el plano de apoyo, el cilindro se visualizará en forma oblicua, es decir, que su propio eje forma un ángulo menor que 90º y mayor que 0º, respecto a la base de apoyo; y la altura de este cilindro será la línea perpendicular entre sus bases *(figura 9.17)*.



Definición y representación de un cilindro oblicuo
Figura 9.17

Otro aspecto importante para tener en cuenta, consiste en la *"sección media"*, es decir, la sección que se obtiene cuando un cilindro recto u oblicuo, es interceptado por un plano perpendicular al eje del mismo. Para conseguir dicha sección, el eje del cilindro debe visualizarse como un punto, ya que las generatrices al ser paralelas al eje, se proyectarán también como un punto cada una, luego, se conectan estos puntos para definir el contorno de la sección media (contorno circular o elíptico); el cual, será constante a lo largo del eje del cilindro. Por tal razón, la sección media no debe confundirse con las bases que posee el cilindro *(figura 9.18).*



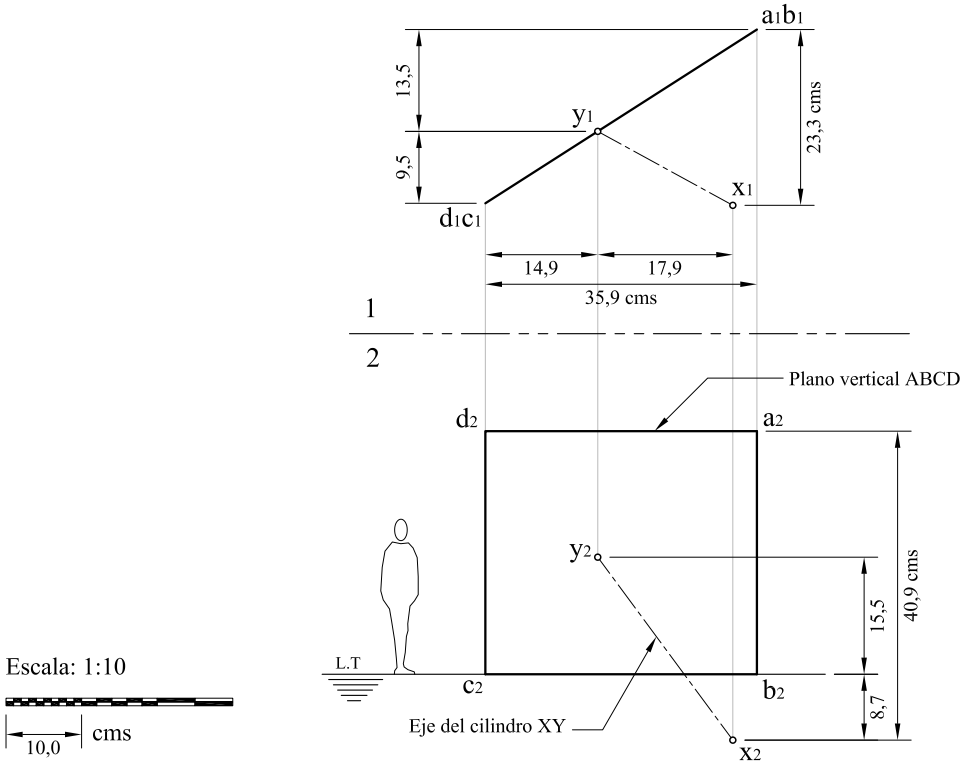
Sección media de tipo elíptico en un cilindro oblicuo de bases circulares
Figura 9.18

En Ingeniería, especialmente en el campo de la Calderería, suelen emplearse cilindros rectos de sección circular para el transporte de fluidos gaseosos o líquidos, los cuales, deben atravesar paredes y entrepisos, así como, seccionar los ductos cuando se empalman en ángulos mayores a 0º y menores a 180º; en este caso, los problemas se formulan conociendo, el diámetro del cilindro, la dirección e inclinación del eje del cilindro, y las proyecciones de la pared o plano como filo.

Para obtener una sección elíptica de un cilindro circular recto, respecto a un plano dado, se tienen en cuenta los siguientes pasos:

a) Visualizar el ángulo real entre el eje del cilindro y el plano.
b) Trazar una equidistancia al eje igual al radio en todas las vistas hasta que intercepte el plano.
c) Emplear roturas convencionales cuando se requiera representar un extremo del cilindro innecesario.
d) Dibujar la sección elíptica, de tal manera que el eje menor sea igual al diámetro, y su eje mayor es igual al corte obtenido en el plano visto como filo respecto al eje del cilindro proyectado en verdadera magnitud.
e) Plantear 12 de generatrices de la sección elíptica para completar las vistas que se requieran, o si el lector prefiere, utiliza el método del paralelogramo para dibujar elipses aproximadas[5].

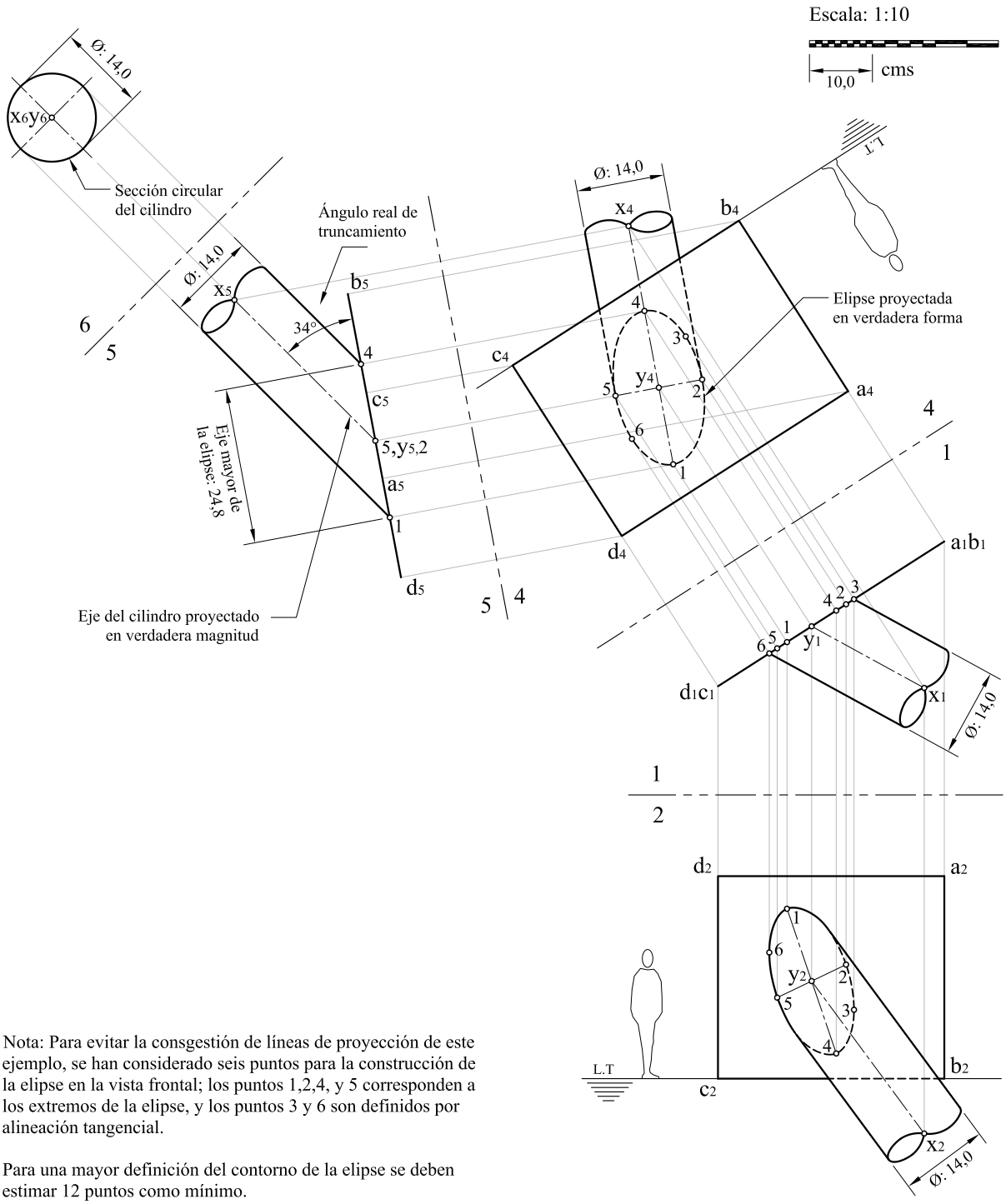
Supóngase un ducto de sección circular cuyo diámetro es de 14 cms, el cual se intercepta con un plano dado (escala: 1:10); y se requiere determinar la intersección entre dichos elementos *(figura 9.19)*.



Intersección entre un cilindro de diámetro conocido y un plano dado (enunciado)
Figura 9.19

[5] Nota del Autor: Para mayor información, consultar el apéndice A-9 del libro "Geometría descriptiva" del Autor, Leighton Wellman

El principal objetivo es determinar el ángulo real entre el eje del cilindro y el plano dado, para ello, se tiene en cuenta, los conceptos vistos en el numeral 7.4.1, luego, se dibujan las equidistancias al eje en todas las vistas, y se dibuja la sección elíptica en verdadera forma *(figura 9.20).*



Nota: Para evitar la consgestión de líneas de proyección de este ejemplo, se han considerado seis puntos para la construcción de la elipse en la vista frontal; los puntos 1,2,4, y 5 corresponden a los extremos de la elipse, y los puntos 3 y 6 son definidos por alineación tangencial.

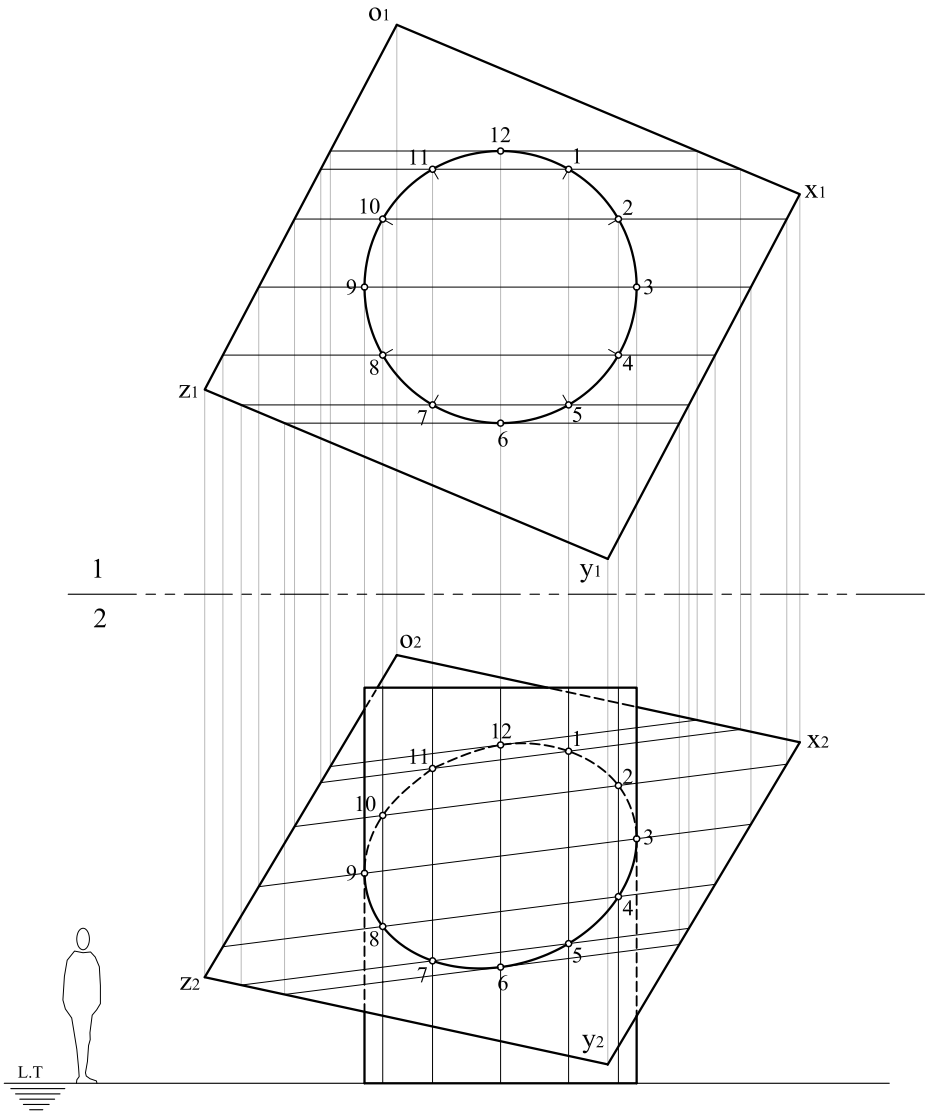
Para una mayor definición del contorno de la elipse se deben estimar 12 puntos como mínimo.

Intersección entre un cilindro de diámetro conocido y un plano dado (desarrollo)
Figura 9.20

La intersección entre un cilindro recto u oblicuo respecto a un plano dado, también puede resolverse con el método del plano cortante, siempre en cuando el cilindro esté proyectando su sección media, es decir, que todas sus generatrices se proyecten como un punto cada una.

Para facilitar esta tarea, se aplican los criterios vistos en el numeral 8.2 *(véase teorema 21, figura 8.8)*; es decir, en la vista de la sección media del cilindro, se trazan planos cortantes arbitrarios que pasen por las generatrices precisadas e intercepten al plano referenciado, posteriormente, se relacionan las intersecciones que hacen dichos planos hacia una vista adyacente, la cual, mostrará los puntos de intersección reales entre los elementos dados.

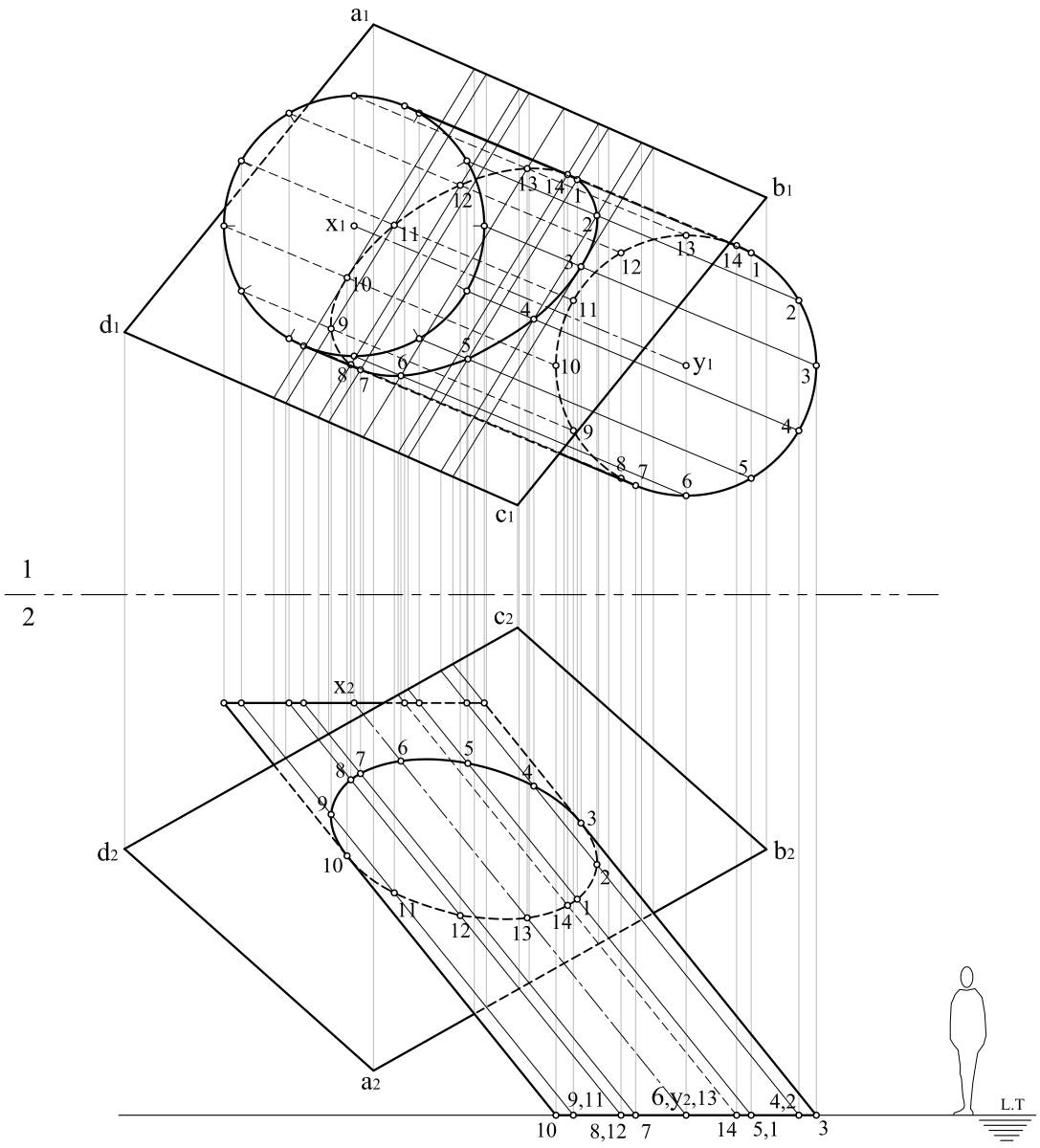
Los planos cortantes pueden pasar por una generatriz o por dos generatrices sin importar la dirección, pues al relacionar dichas líneas cortantes, se definirán los puntos de intersección que pertenecen a la sección elíptica; quedaría pendiente determinar su verdadera forma *(figura 9.21)*.



Intersección entre un cilindro recto y un plano oblicuo (Método del plano cortante)
Figura 9.21

9.1.5 Intersección entre un plano y un cilindro oblicuo

Por lo general se utiliza el método del plano cortante para resolver este caso de intersección, debido a que las generatrices del cilindro al estar inclinadas, facilitan la construcción de planos cortantes que las contengan (una o dos generatrices), y a su vez, dichos planos intercepten al plano dado; bastará relacionar las correspondientes líneas de intersección respecto a las generatrices comprometidas, las cuales determinan la sección elíptica; al final, se procede a visualizar dicha sección en verdadera forma si se requiere *(figura 9.22).*

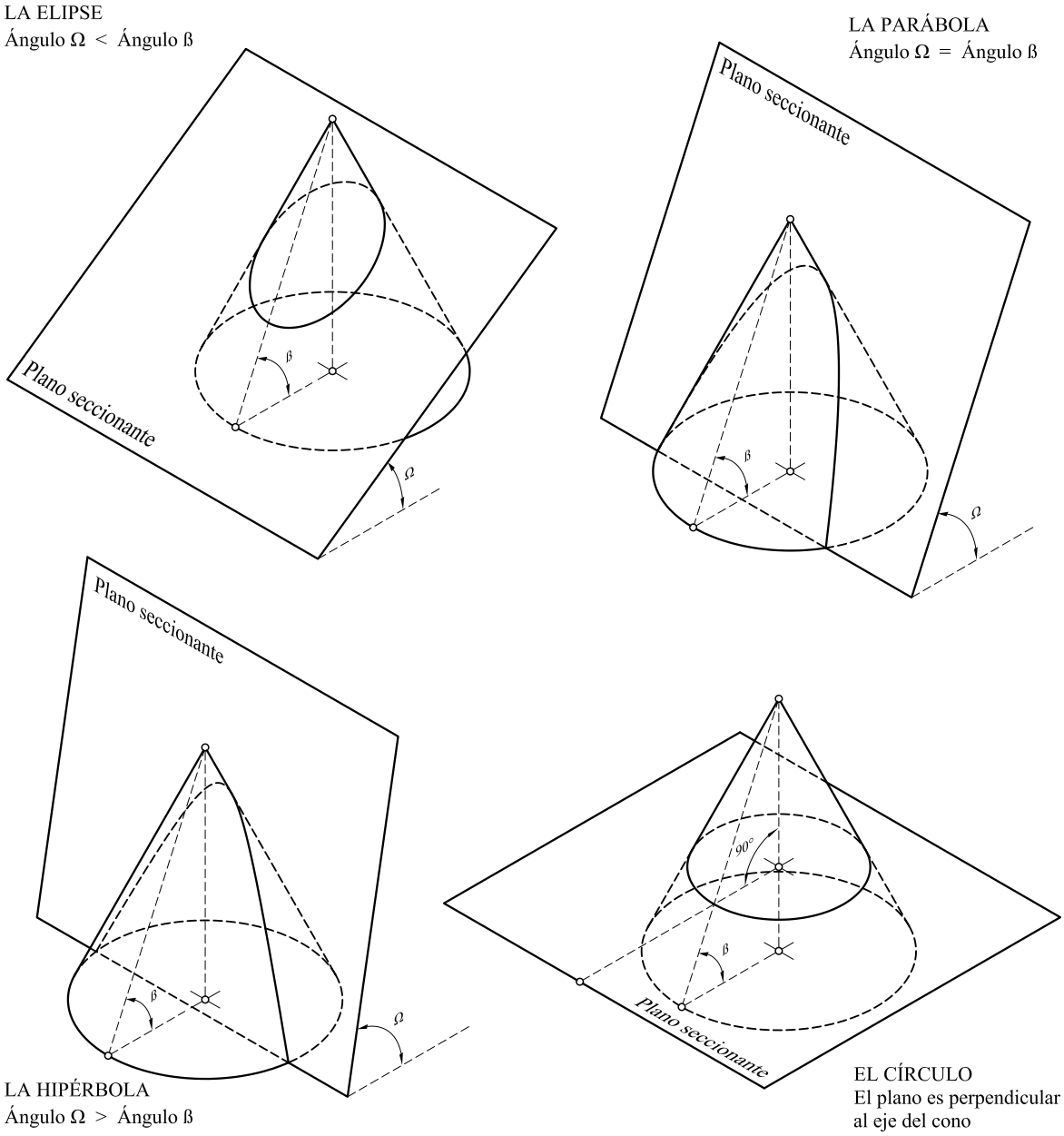


Intersección entre un cilindro oblicuo y un plano (Método del plano cortante)
Figura 9.22

9.1.6 Intersección entre un plano y un cono recto (Secciones cónicas)

Cuando un plano intercepta a un cono recto se obtienen unas intersecciones denominadas *"Secciones cónicas"*, las cuales, dependen del ángulo del plano respecto al ángulo de conicidad del mismo cono.

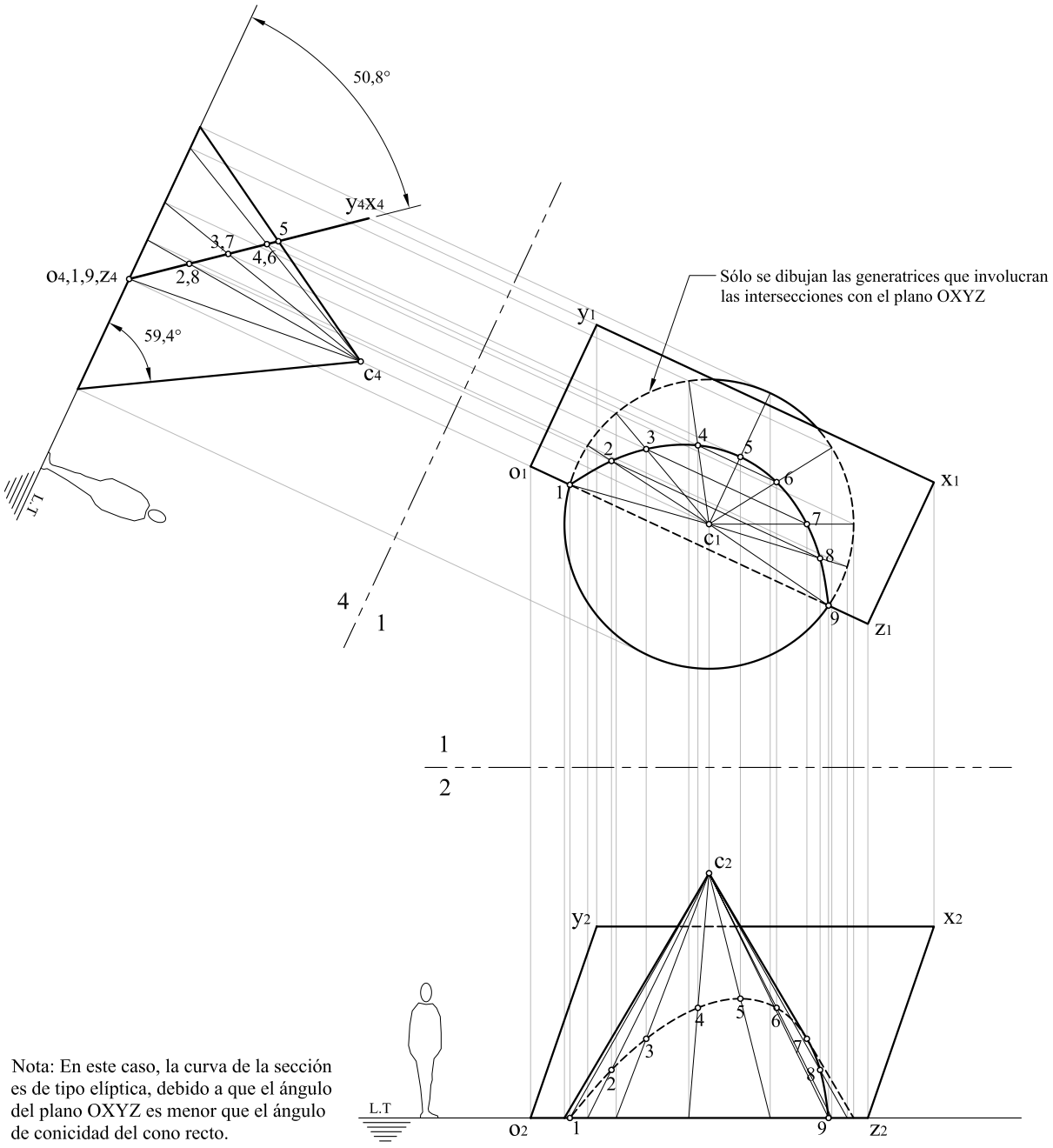
El ángulo de conicidad de un cono recto consiste en el ángulo formado entre una recta generatriz y la base circular del cono; de esta forma, las secciones cónicas más representativas, consisten en, la elipse, la parábola, la hipérbola, y el círculo *(figura 9.23).*



Secciones cónicas representativas de un cono recto respecto a un plano
Figura 9.23

Otro tipo de sección que se puede obtener consiste en el triángulo, el cual resulta cuando el plano es perpendicular a la base del cono, y a su vez, pasa por el vértice. Por eso, se dice también que un cono recto se define como una superficie generada por la revolución de un triángulo isósceles o equilátero sobre su eje de simetría.

Para definir una sección cónica, se puede visualizar el plano seccionante como filo, el cual intercepta las generatrices involucradas; bastará relacionar dichos puntos hacia las demás vistas *(figura 9.24)*.

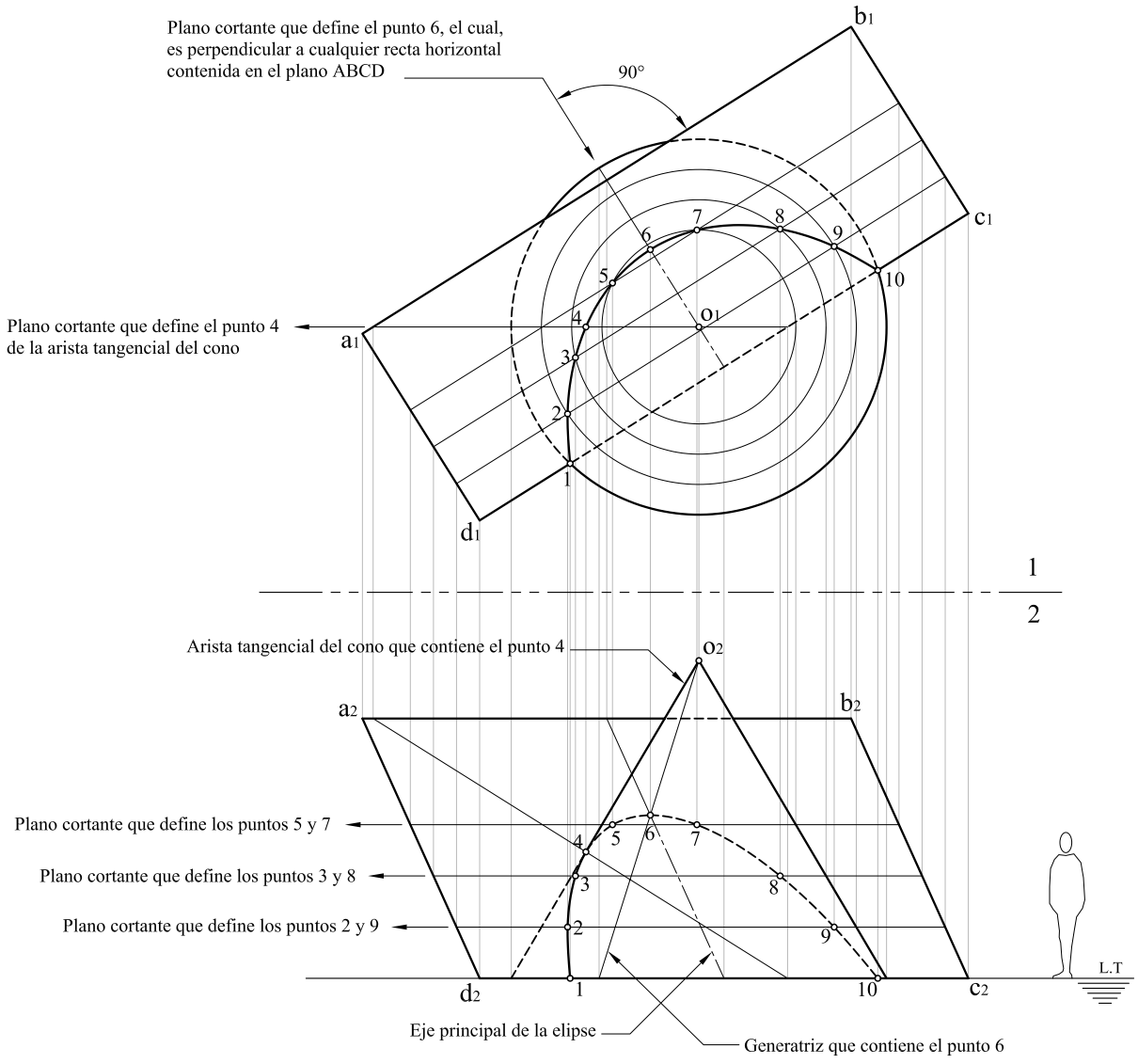


Nota: En este caso, la curva de la sección es de tipo elíptica, debido a que el ángulo del plano OXYZ es menor que el ángulo de conicidad del cono recto.

Intersección entre un plano y un cono recto (Método del plano como filo)
Figura 9.24

Para definir una sección cónica utilizando el método del plano cortante, existen dos posibles formas de plantear dicho método; en el primer caso, se utilizan algunos planos cortantes paralelos a la base de apoyo, que atraviesen al cono y al plano dado; de esta manera, las secciones circulares obtenidas del cono interceptarán las respectivas líneas de intersección contenidas en el plano *(figura 9.25).*

Si la sección obtenida posee una parte visible y otra oculta, debido a la interferencia visual del cono recto (vista frontal), se debe construir un plano auxiliar cortante que pase por la generatriz tangencial, el cual determinará el punto crítico de visibilidad (punto 4); además, se debe definir el punto final del eje de la sección cónica (punto 6), con un plano cortante vertical que pase por el vértice del cono, y sea perpendicular a una recta contenida en el plano ABCD que sea paralela a la base del cono (recta a_1b_1).

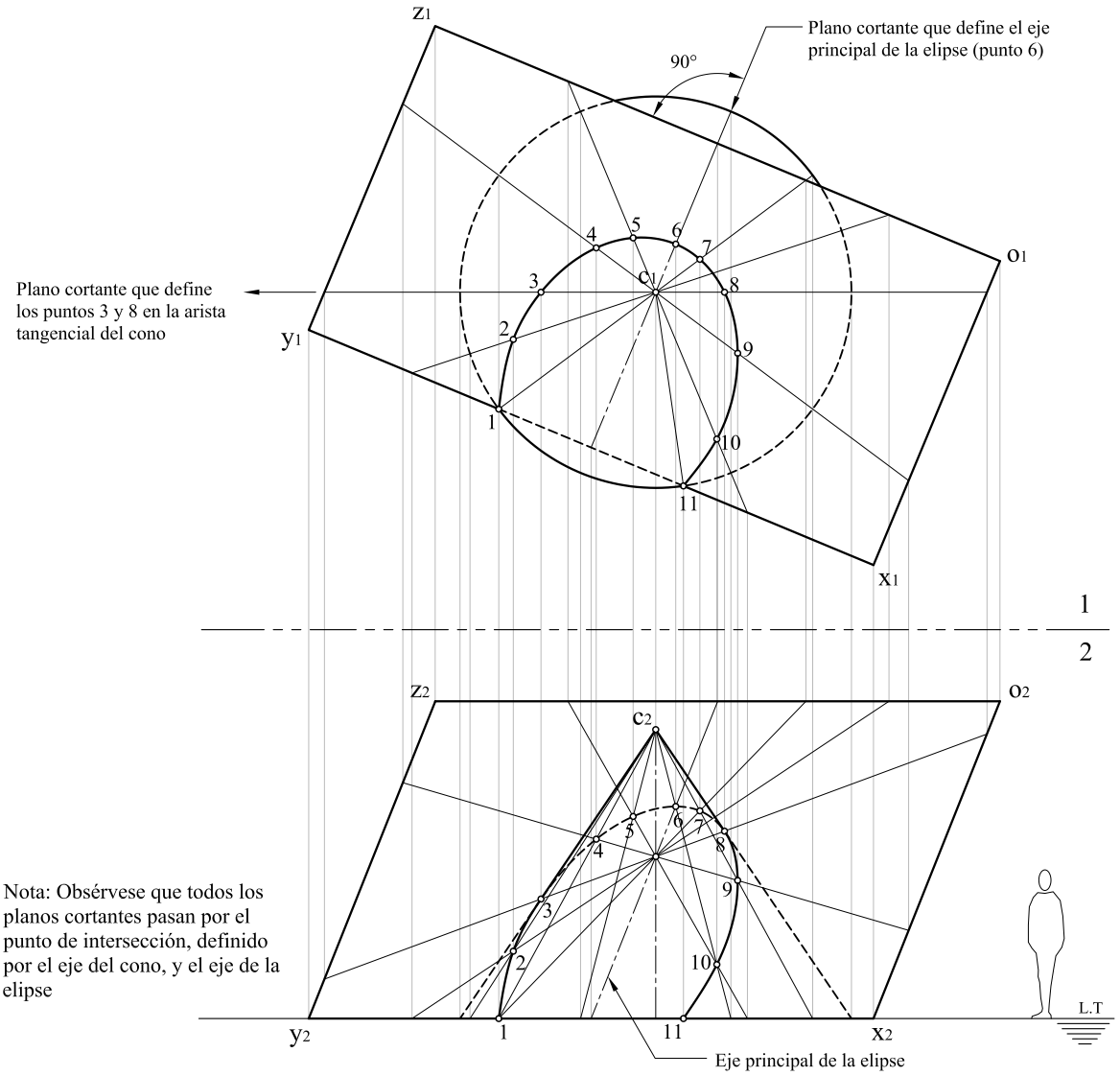


Intersección entre un plano y un cono recto (Método del plano cortante, 1er caso)
Figura 9.25

En el segundo caso, se construyen algunos planos cortantes perpendiculares a la base del cono recto, y que pasen por el vértice, es decir, obtener varias secciones triangulares; las cuales interceptarán las respectivas líneas de intersección contenidas en el plano seccionante; posteriormente, se relacionan los puntos de intersección en ambas vistas *(figura 9.26).*

Al igual que en el anterior caso, se deben definir los puntos críticos de intersección, principalmente el que define el punto final del eje de la sección cónica, y el (los) punto(s) donde cambia(n) de visibilidad en la curva _ si se presentase(n).

Cabe mencionar que las secciones cónicas obtenidas con cualquiera de los dos métodos anteriormente descritos, no se proyectan en verdadera forma; por lo tanto, se debe determinar la verdadera forma de la misma, para analizar diversos aspectos, tales como, el área, el perímetro, y los momentos de inercia.

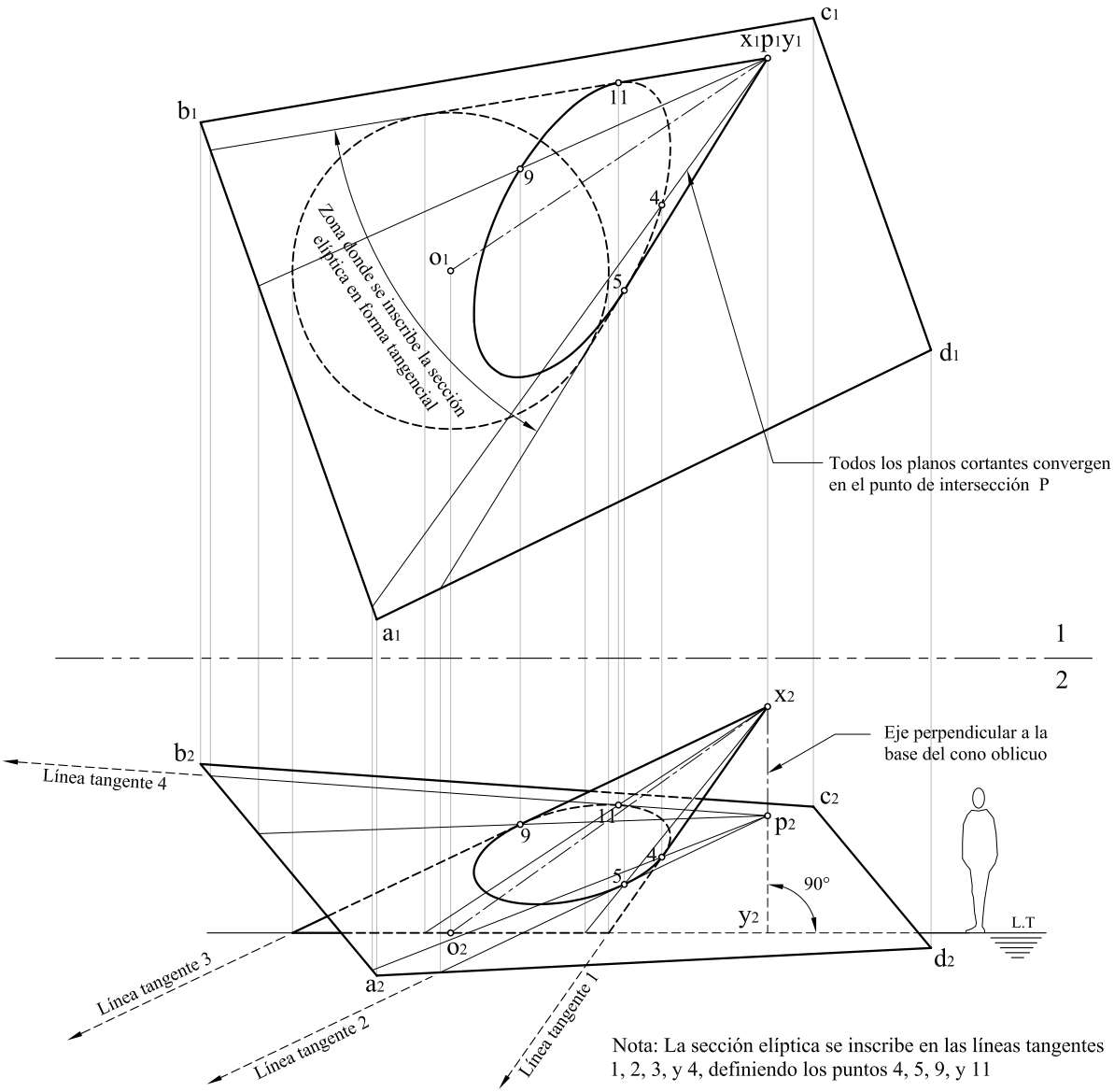


Intersección entre un plano y un cono recto (Método del plano cortante, 2do caso)
Figura 9.26

9.1.7 Intersección entre un plano y un cono oblicuo

Este caso suele resolverse con el método del plano cortante, debido a la geometría de las generatrices del cono, pues al estar inclinadas facilitan la construcción de planos cortantes, los cuales interceptarán al plano ABCD en líneas rectas convergentes.

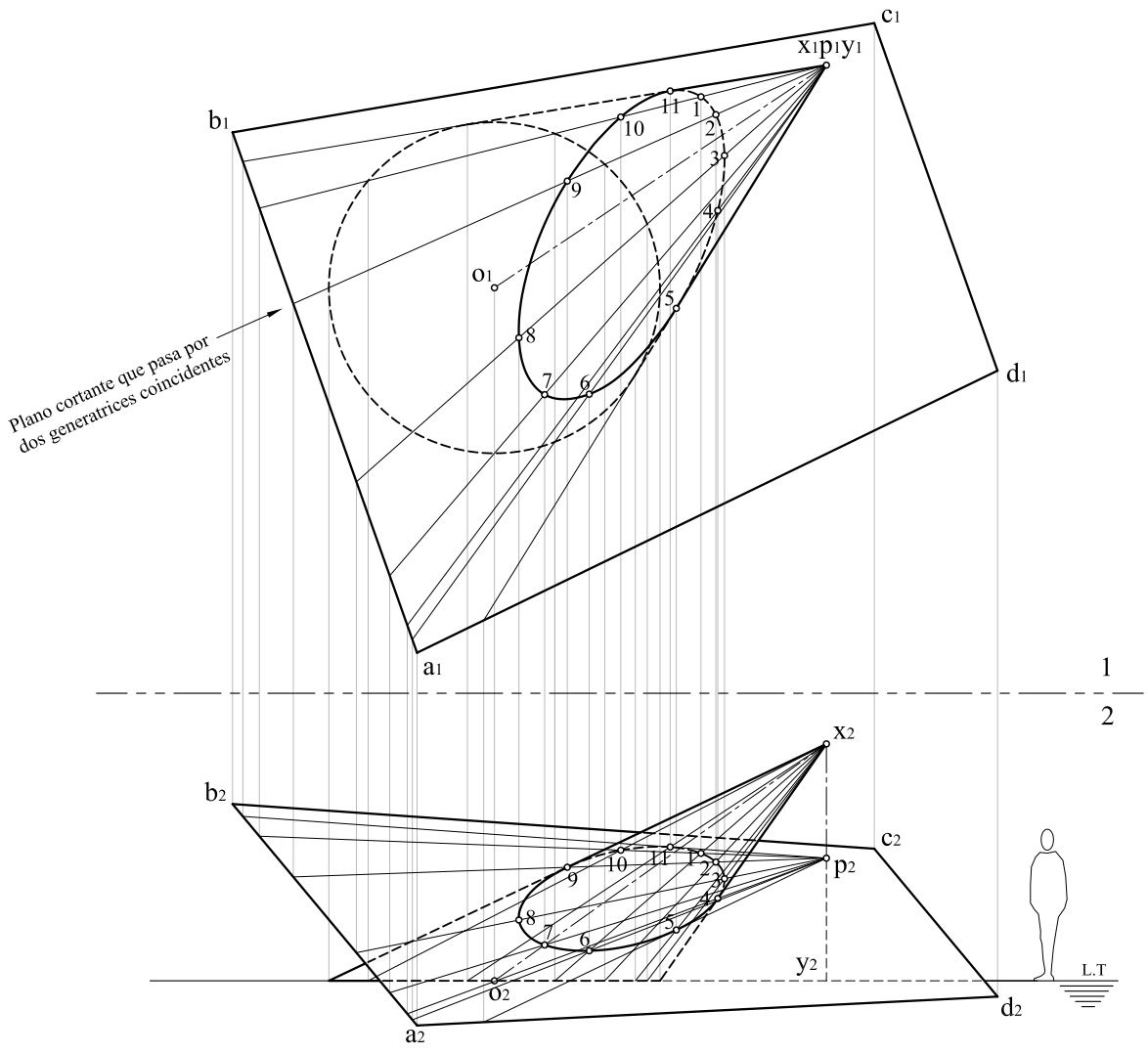
Teniendo en cuenta los criterios vistos en el numeral 8.2 *(véase teorema 21, figura 8.8)*; se define un eje XY que pase por el vértice X del cono oblicuo, y sea perpendicular a la base del mismo; dicho eje contendrá el punto "P" de convergencia de las líneas de intersección que hacen los planos cortantes en el plano ABCD; esto significa que la sección elíptica estará inscrita tanto en las aristas tangenciales del cono, como en las líneas de intersección extremas obtenidas en el plano referenciado *(figura 9.27)*.



Intersección entre un plano y un cono oblicuo (Método del plano cortante)
Figura 9.27

Se pueden construir diversos planos cortantes verticales en la vista superior que contengan hasta dos generatrices del cono oblicuo, con el fin de evitar la congestión de líneas de relación en las vistas; sin embargo, se deben definir entre 16 y 24 generatrices para conseguir una elipse precisa (en la figura 9.28 se muestran once generatrices para brindar mayor claridad).

Las líneas de intersección obtenidas en el plano ABCD convergen en el punto P del eje vertical XY, las cuales al confrontarse con las respectivas generatrices del cono oblicuo, determinan los puntos de intersección que definen la sección elíptica [6]; al final, se aplican criterios de visibilidad *(figura 9.28)*.



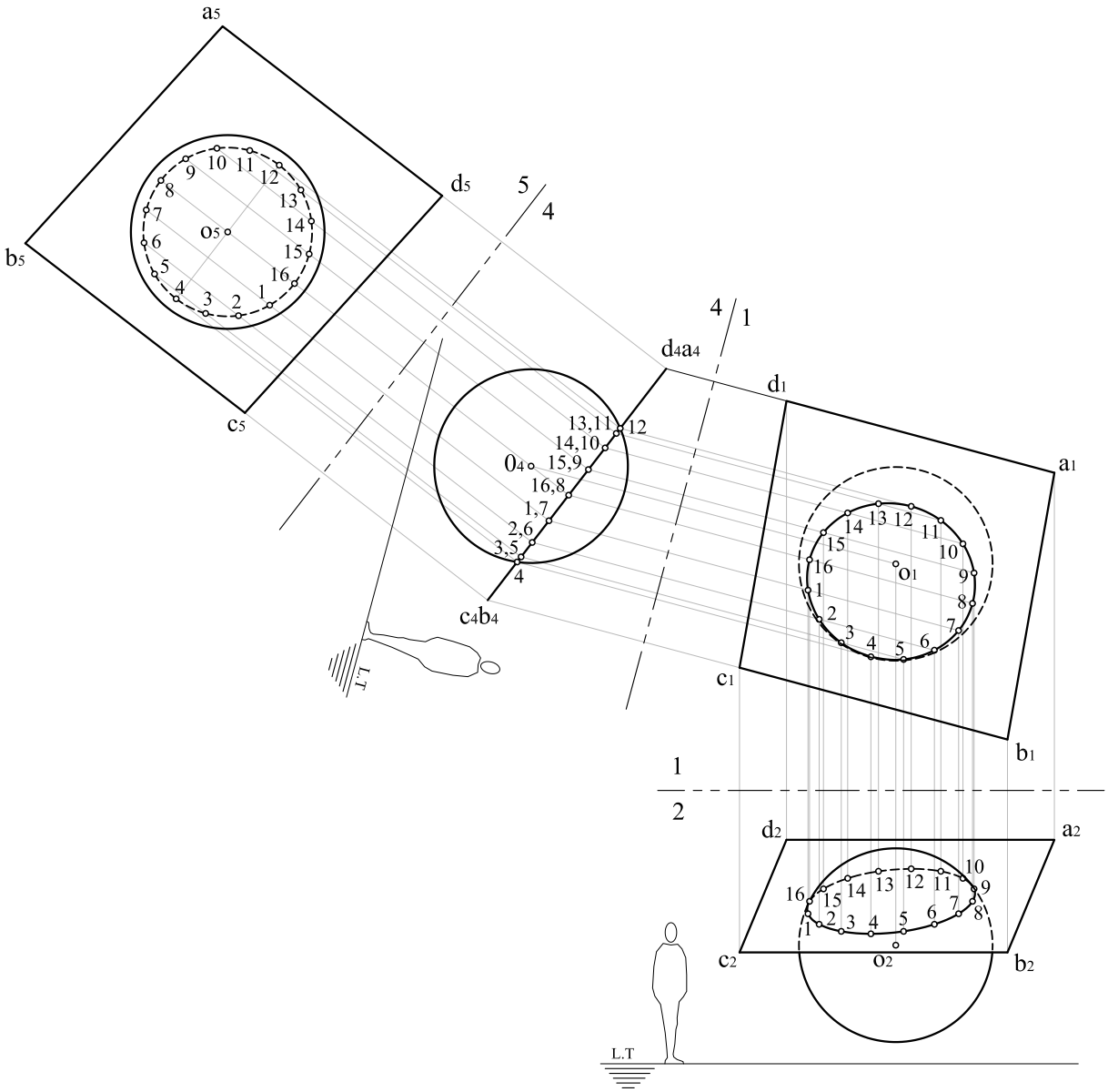
Intersección entre un plano y un cono oblicuo (Método del plano cortante)
Figura 9.28

[6] Nota del Autor: Para la construcción de elipses especiales en verdadera forma con sus tangentes definidoras, se recomienda consultar el teorema de Pascal, y sus posibles variantes.

9.1.8 Intersección entre un plano y una esfera

Todo plano secante que intercepte una esfera determinará una sección circular con igual o menor diámetro al que posee; por lo tanto, este caso se resuelve con el método del plano como filo.

El propósito principal es visualizar el plano secante en verdadera forma, debido a que en esta vista se proyectará la sección circular, cuyo centro coincidirá con el centro de la esfera (círculos concéntricos); bastará subdividir la sección circular en 12 ó 16 segmentos de cuerda que sean iguales; posteriormente, se relacionan dichos puntos hacia la vista del plano como filo, y de ahí hacia las demás proyecciones; al final, se aplican criterios de visibilidad *(figura 9.29).*

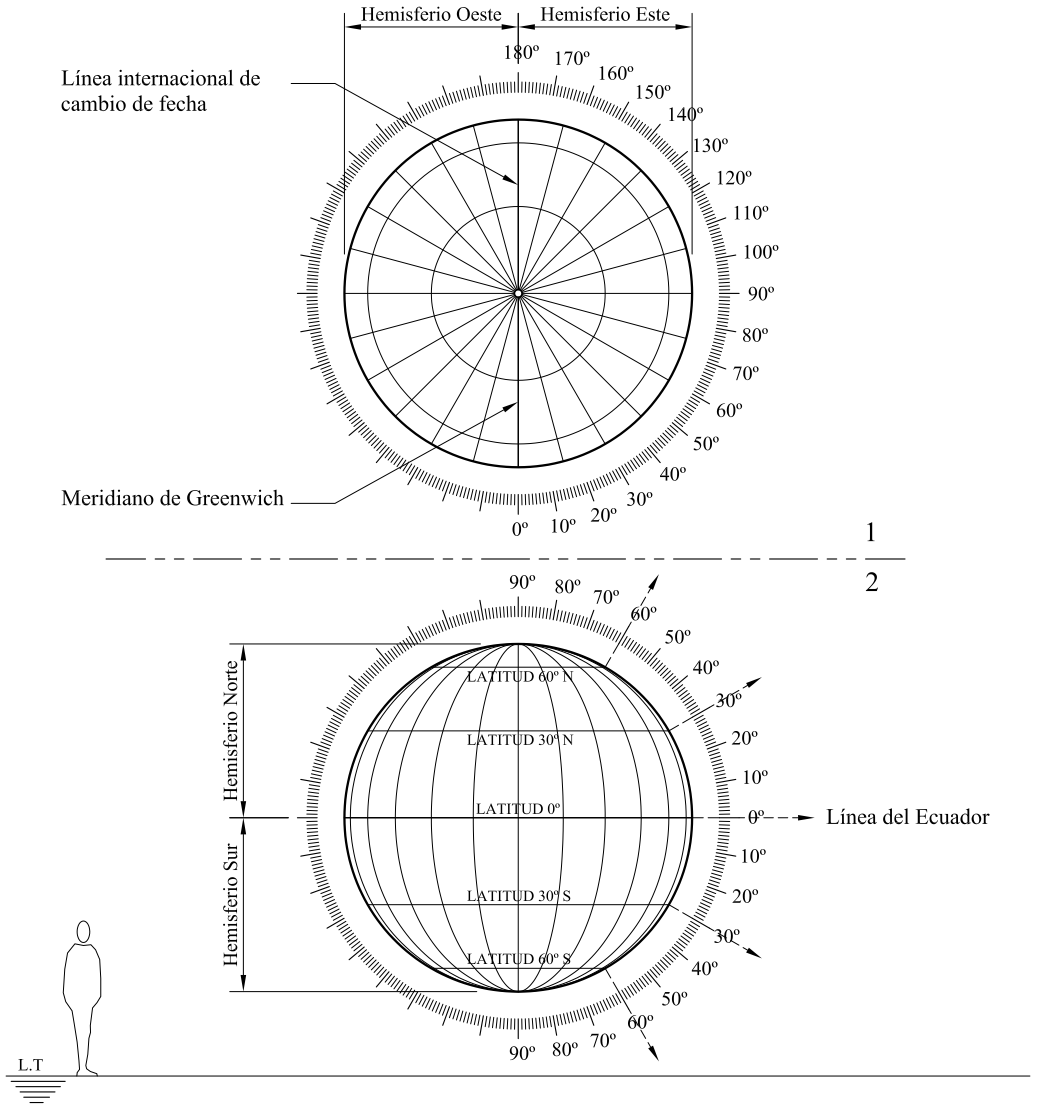


Intersección entre un plano y una esfera (Método del plano como filo)
Figura 9.29

En el área de la Cartografía, la esfera terrestre es subdividida en líneas imaginarias que corresponden a secciones circulares, las cuales representan los paralelos y meridianos; de esta manera, se establece un sistema de coordenadas geográficas que permite localizar un punto sobre la superficie de la tierra, si se conocen la latitud y la longitud del mismo.

La latitud se define como la distancia angular medida desde un punto situado en la esfera hasta la línea del Ecuador; el valor del ángulo es comprendido desde 0º hasta 90º; de esta forma, la línea del Ecuador que corresponde a 0º divide a la esfera en los hemisferios Norte y Sur.

La longitud se define como la distancia angular medida desde un punto situado en la esfera respecto al meridiano de Greenwich; el valor del ángulo es comprendido desde 0º hasta 180º, en sentido Occidente u Oriente; donde el valor de 0º corresponde al meridiano de Greenwich, y el valor de 180º corresponde a la línea internacional de cambio de fecha; la esfera queda dividida en 24 husos horarios *(figura 9.30).*



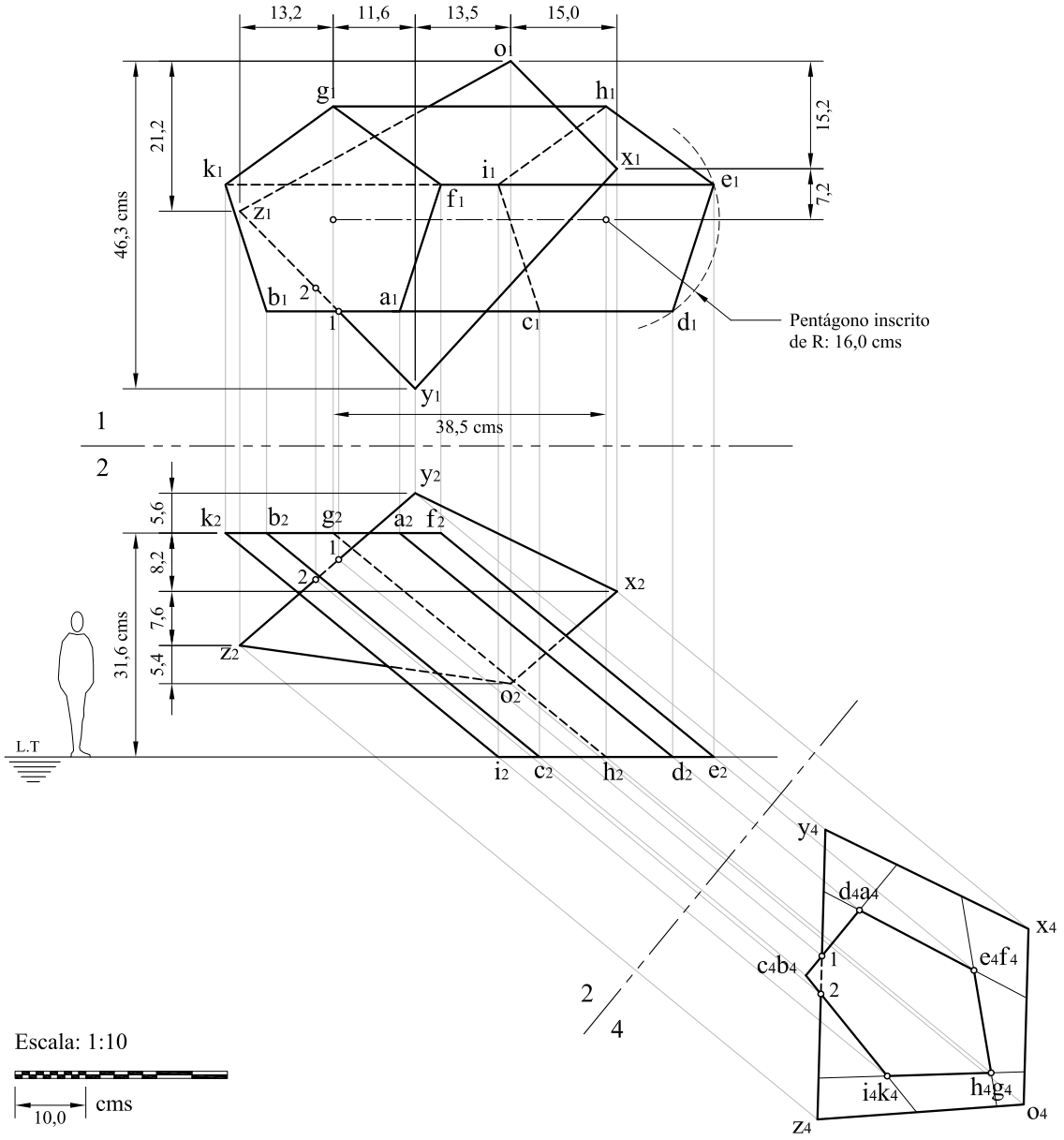
Representación de la esfera terrestre
Figura 9.30

9.2 Ejemplos

9.2.1 Ejemplo 1

Determine la intersección entre el plano OXYZ y el prisma oblicuo dado, utilizando el método del plano como filo; muestre el proceso, y visualice al final. Sistema ASA, a escala: 1: 10 *(figura 9.31).*

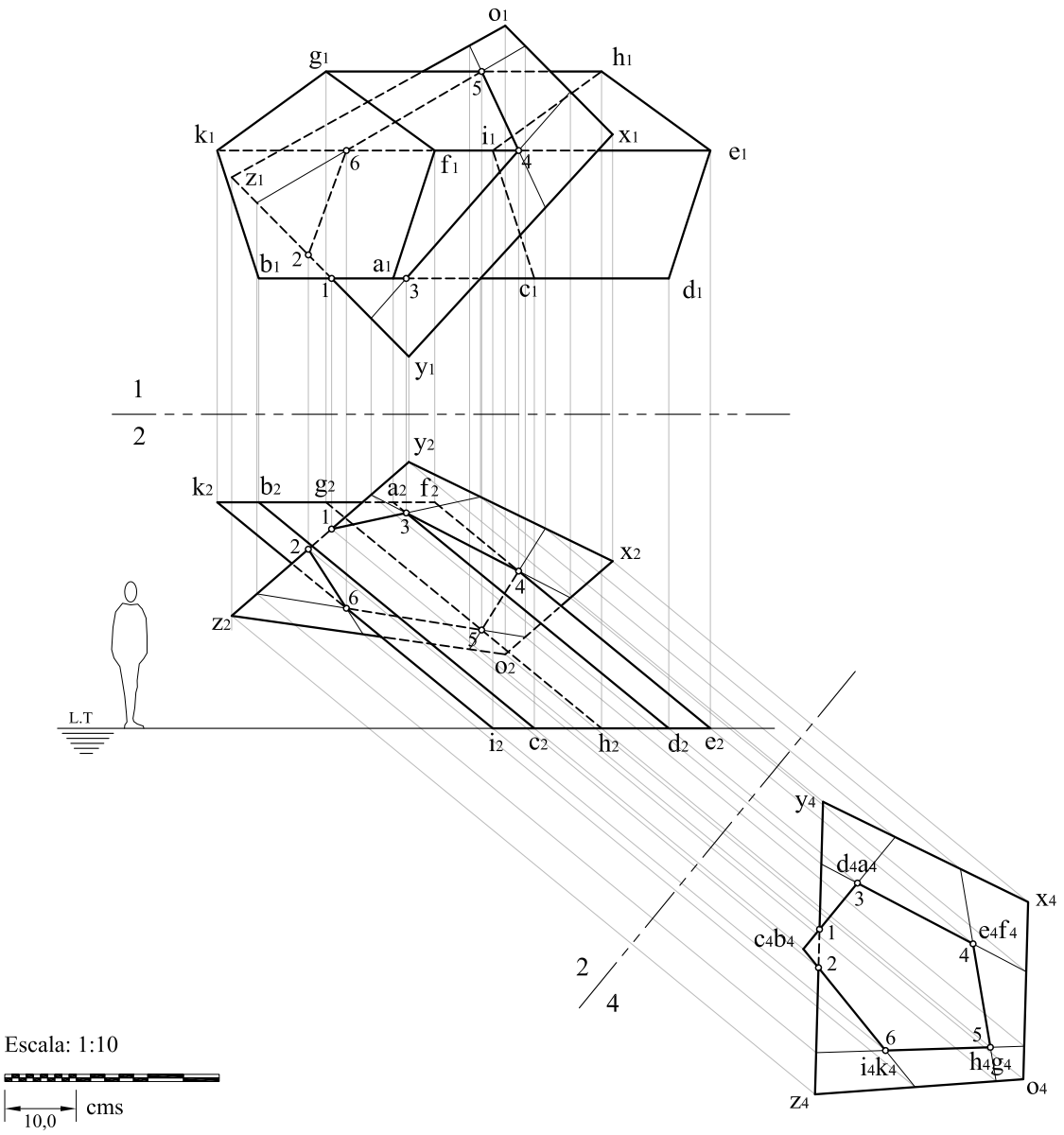
Se procede a visualizar la sección media del prisma en una vista adyacente 2-4 que sea perpendicular al eje del prisma proyectado en verdadera magnitud (vista frontal); de esta forma, los planos laterales del prisma vistos como filo, interceptarán al plano OXYZ.



Enunciado ejemplo 1, intersección entre un plano, y un prisma oblicuo
Figura 9.31

En la vista 4, los planos laterales del prisma se comportan como planos cortantes, los cuales interceptan al plano OXYZ en dos puntos cada uno; la recta YZ es la única que atraviesa al prisma en todas las vistas, por lo tanto, determina los puntos de intersección 1 y 2; luego, se procede a definir y relacionar las líneas de intersección reales que pertenecen tanto al prisma, como al plano OXYZ.

Como los puntos 1 y 2 se encuentran en diferentes planos del prisma, significa que estos se conectarán mediante líneas de intersección reales (líneas 1-3, 3-4, 4-5, 5-6, y 6-2); luego, se relacionan cada punto en sus respectivas aristas en las demás vistas, manejando debidamente el traslado de distancias en las vistas anexas entre sí; finalmente, se aplican criterios de visibilidad *(figura 9.32)*

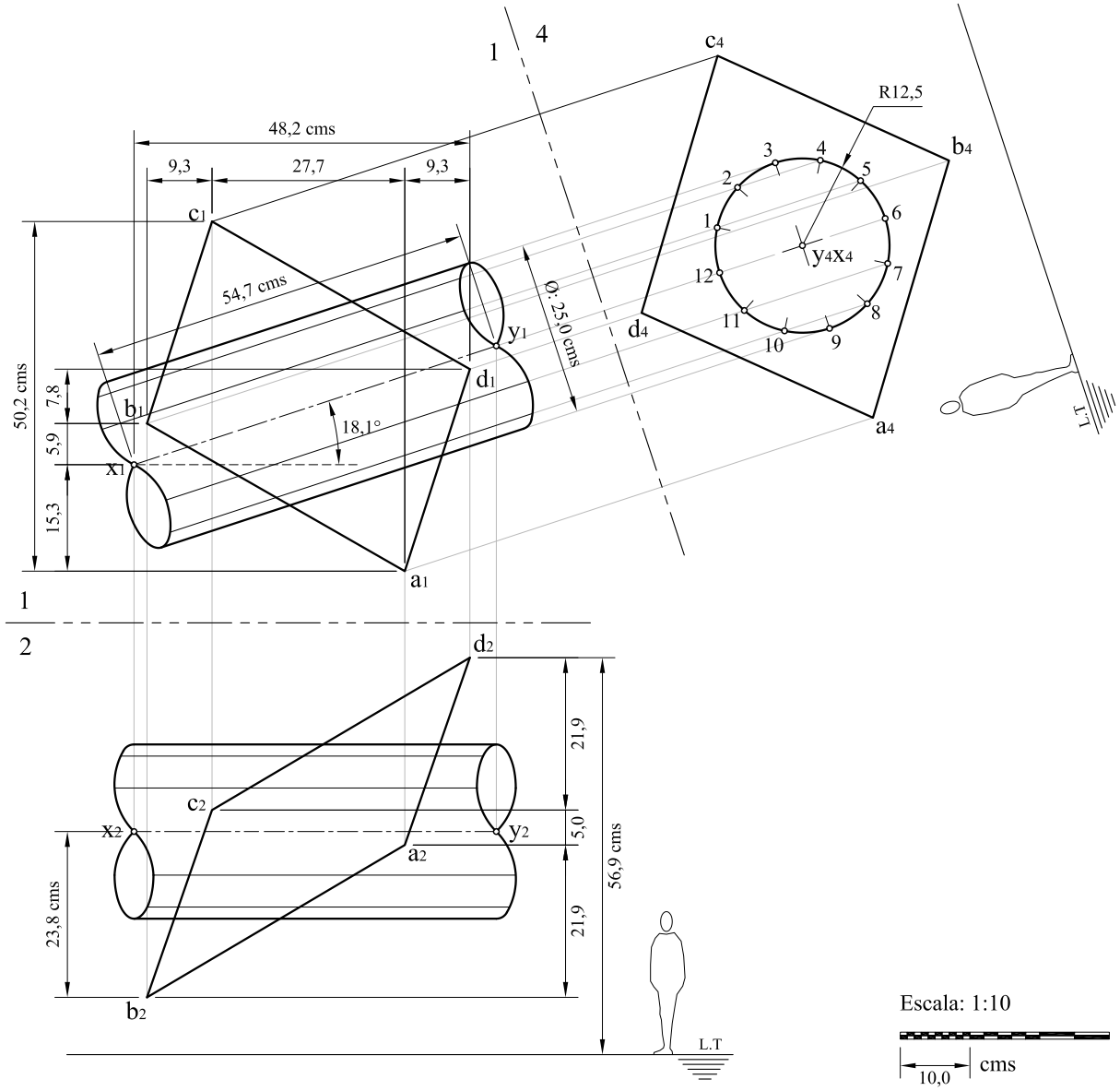


Desarrollo del ejemplo 1, intersección entre un plano y un prisma oblicuo (método del plano como filo)
Figura 9.32

9.2.2 Ejemplo 2

En el gráfico expuesto a continuación se muestran un cilindro XY, y un plano ABCD, los cuales se encuentran referenciados y dimensionados en cms. Se requiere determinar la intersección que existe entre dichos elementos, utilizando el método del plano cortante; muestre el procedimiento, y visualice al final. Trabajar en sistema ASA, a escala: 1:10 *(figura 9.33).*

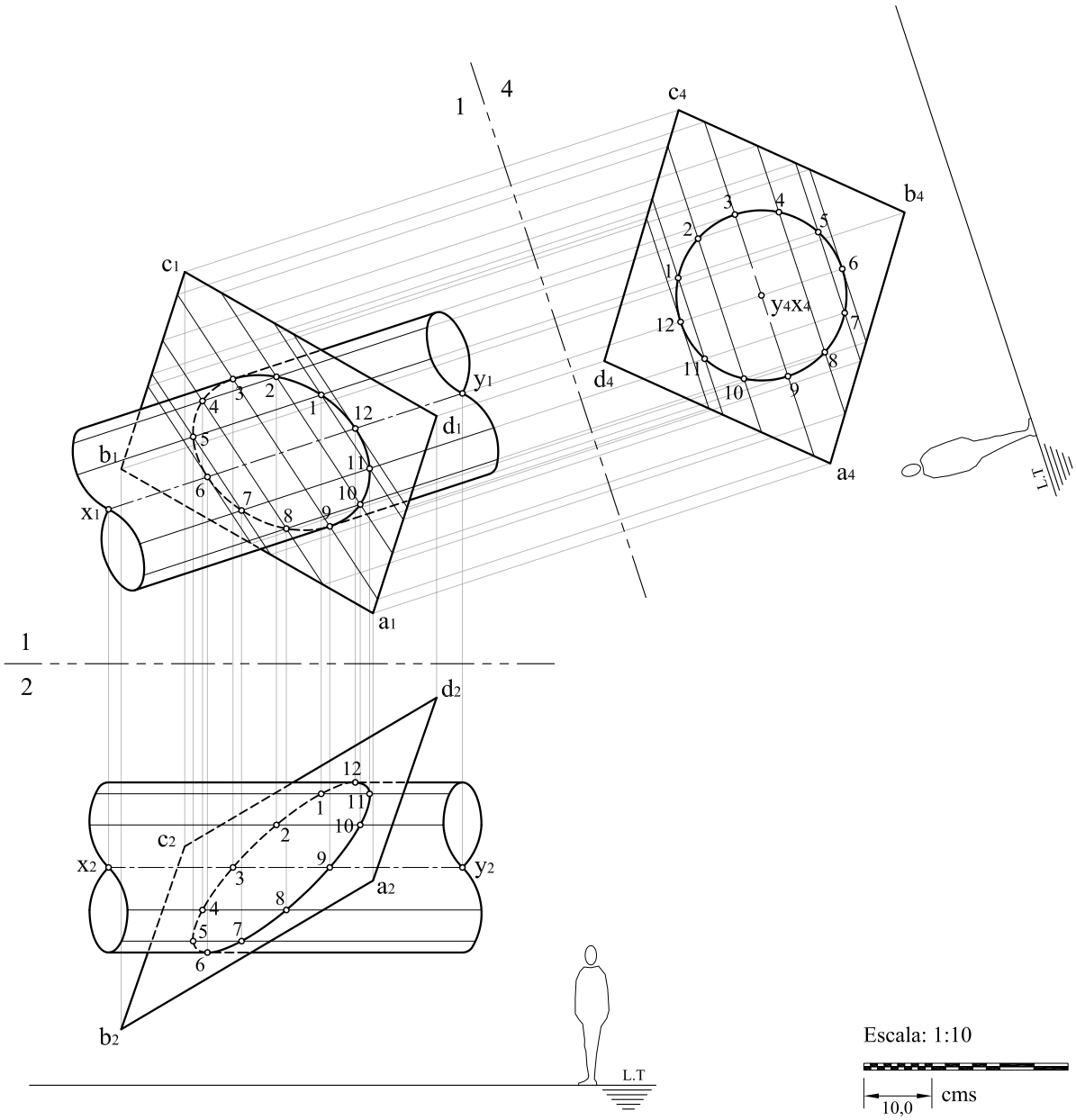
En primer lugar, se procede a visualizar la sección media del cilindro; para este propósito, se plantea un eje de pliegue 1-4 que sea perpendicular al eje x_1y_1, el cual, se proyecta en verdadera magnitud; de esta forma, en la vista 4 todas las generatrices del cilindro se proyectarán como un punto cada una, y por consiguiente, se obtiene la sección media del cilindro; dicha sección se subdivide en 12 generatrices.



Enunciado ejemplo 1, intersección entre un plano, y un prisma oblicuo
Figura 9.33

En la vista 4, se plantean planos cortantes horizontales que pasen por las respectivas generatrices, los cuales interceptan al plano ABCD en dos puntos cada uno; luego, se relacionan las líneas contenidas en el plano hacia la vista superior.

Cada una de las líneas que pertenecen al plano interceptará la respectiva generatriz en un punto real de intersección; luego, se conectan los puntos obtenidos con una línea curva, la cual representa la sección elíptica solicitada; posteriormente, se relacionan dichos puntos hacia la proyección frontal trasladando las medidas desde la vista auxiliar 4; al final, se aplican los criterios de visibilidad *(figura 9.34).*

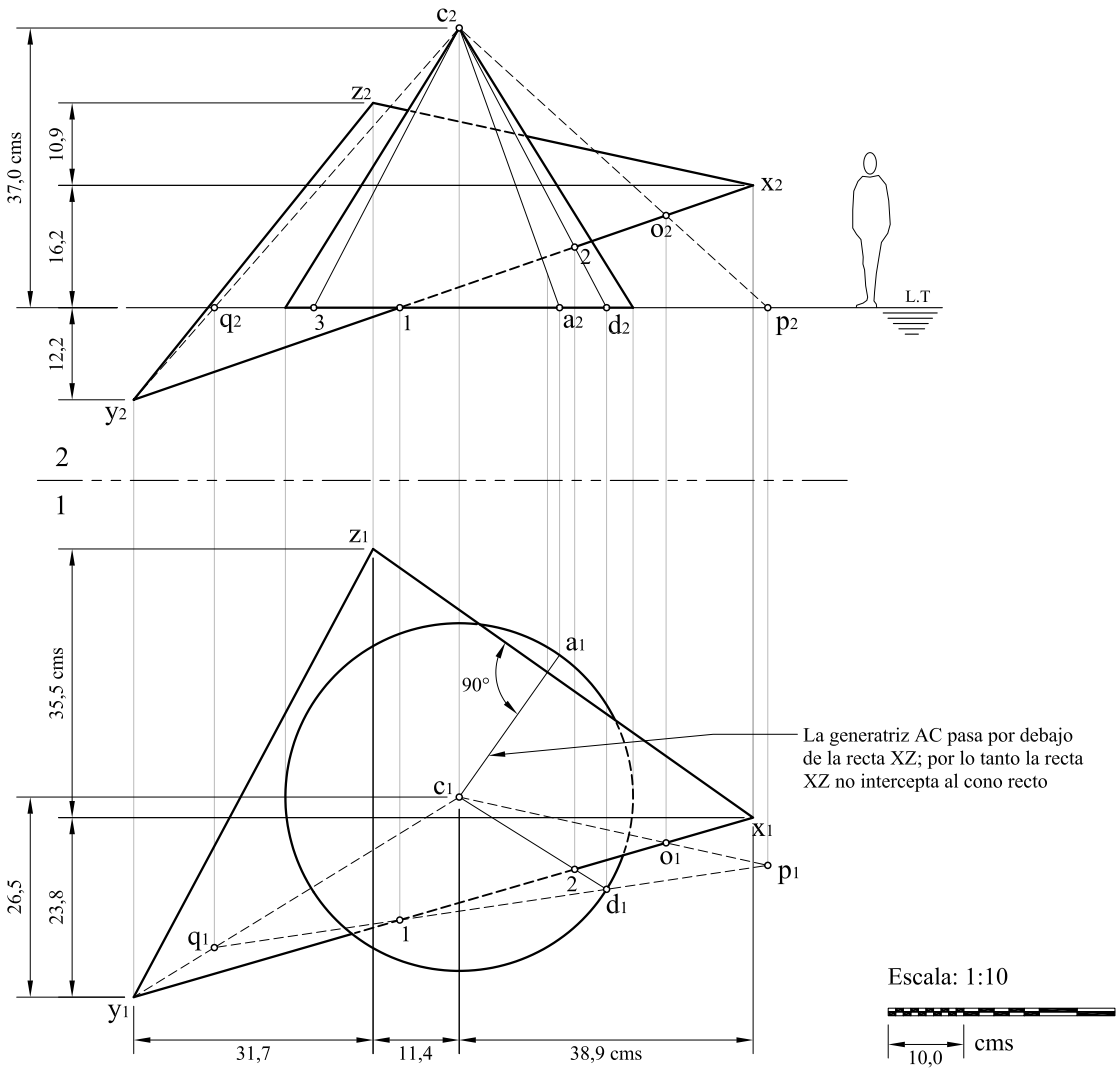


Desarrollo del ejemplo 2, intersección entre un plano y un cilindro recto (método del plano cortante)
Figura 9.34

9.2.3 Ejemplo 3

En el gráfico expuesto a continuación se muestran un cono recto, y un plano XYZ, los cuales se encuentran referenciados y dimensionados en cms. Se requiere determinar la intersección que existe entre dichos elementos, utilizando el método del plano cortante; muestre el procedimiento, y visualice al final. Trabajar en sistema DIN, a escala: 1:10 *(figura 9.35)*.

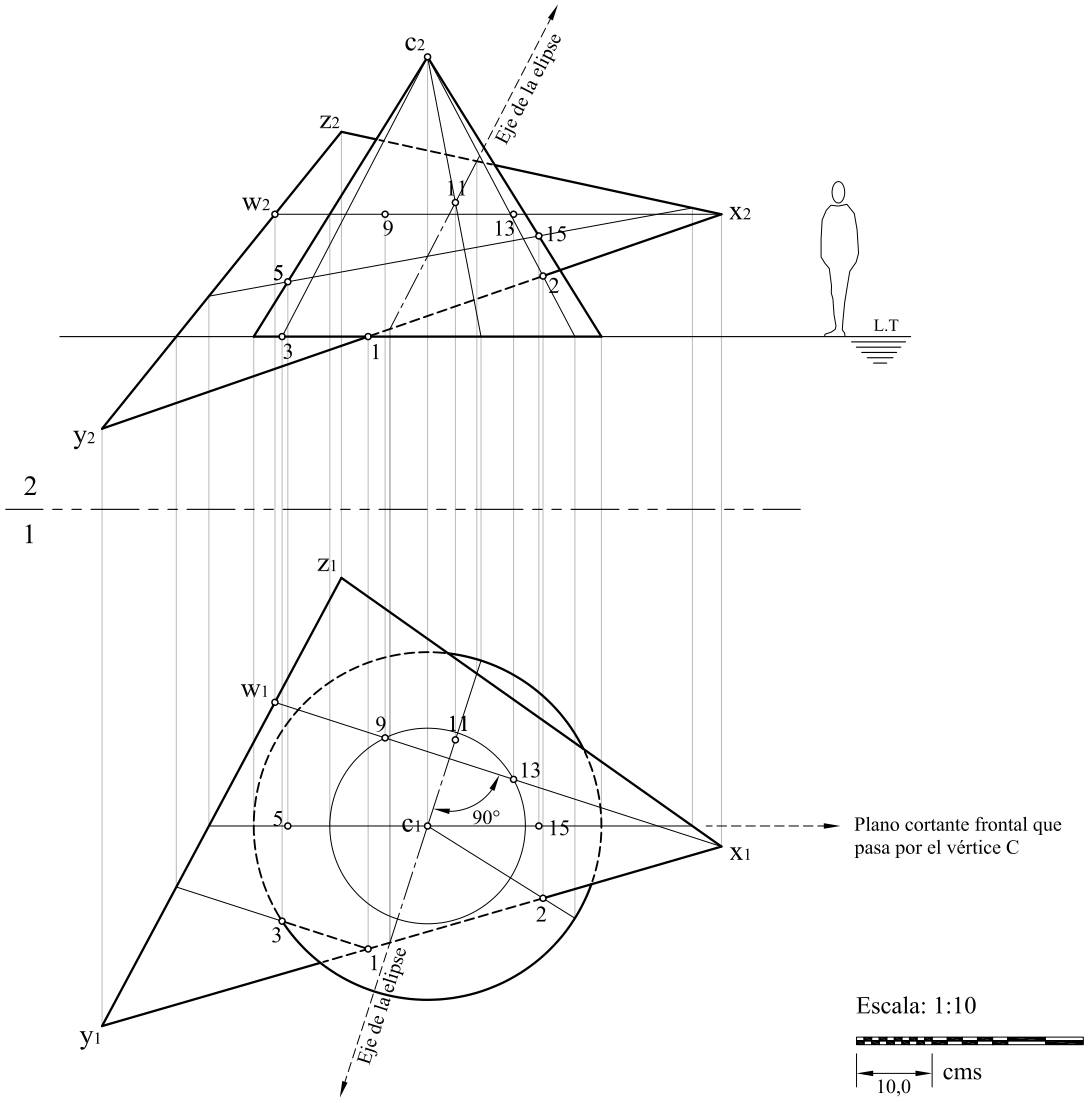
La recta YZ no se cruza con el cono en ambas vistas, por lo tanto, dicha recta no intercepta al cono; se dibuja una recta generatriz a_1c_1 que sea perpendicular a la recta x_1z_1, y se analiza el respectivo punto de cruce entre ambas (mínima distancia); en este caso, se concluye que la generatriz AC pasa por debajo de la recta XZ, por lo tanto, no habría intersección; en el caso, de la recta XY, se construye un plano auxiliar CYO, y se prolonga hasta el plano de apoyo, definiendo los puntos P y Q; la unión de P con Q, determina el punto de entrada 1, así como, la generatriz CD que determina el punto de salida 2.



Enunciado ejemplo 3, intersección entre un plano, y un cono recto (método del plano cortante)
Figura 9.35

Después de haber determinado los puntos de entrada y de salida (puntos 1 y 2), se procede a limpiar el dibujo para brindar mayor claridad; luego, se traza un plano cortante vertical que pase por el vértice c_1 del cono, y sea perpendicular a la recta horizontal x_1w_1, para poder definir el eje de la sección elíptica; dicho plano cortante definirá el punto 11 (punto final del eje).

La base del cono se visualiza como filo en la vista frontal, por lo tanto, intercepta al plano XYZ en la línea 1-3; luego, se plantea un plano cortante frontal que pase por el vértice c_1, el cual define los puntos 5 y 15 de las aristas tangenciales del cono. El plano cortante que pasa por la recta horizontal x_2w_2 define la sección circular, la cual determina los puntos 9 y 13 de la sección elíptica; después, se aplican criterios de visibilidad por sectores que sean evidentes *(figura 9.36)*.

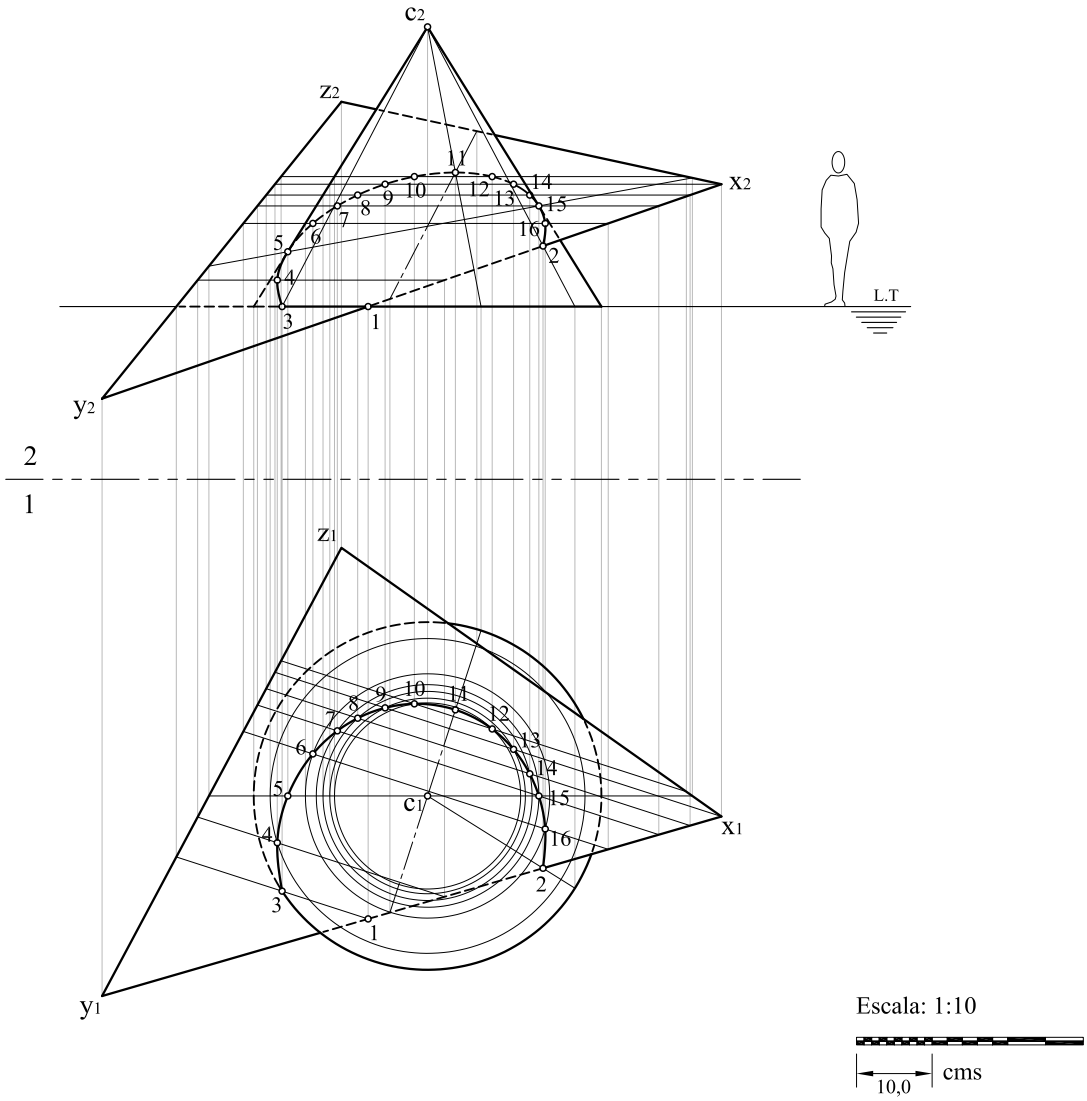


Desarrollo del ejemplo 3, intersección entre un plano y un cono recto (método del plano cortante)
Figura 9.36

De esta manera, la sección elíptica abarcará desde el punto 3 al punto 2, pasando por el punto final del eje de la elipse (punto 11); posteriormente, se plantean algunos planos cortantes horizontales que sean relativamente equidistantes entre sí, y que a la vez, intercepten al plano XYZ en dos puntos cada uno.

Los planos cortantes horizontales al ser perpendiculares al eje del cono recto, determinarán secciones circulares (vista superior); las cuales, al confrontarlas con sus respectivas líneas de intersección, y que pertenezcan al plano XYZ, determinarán los puntos de la sección elíptica solicitada.

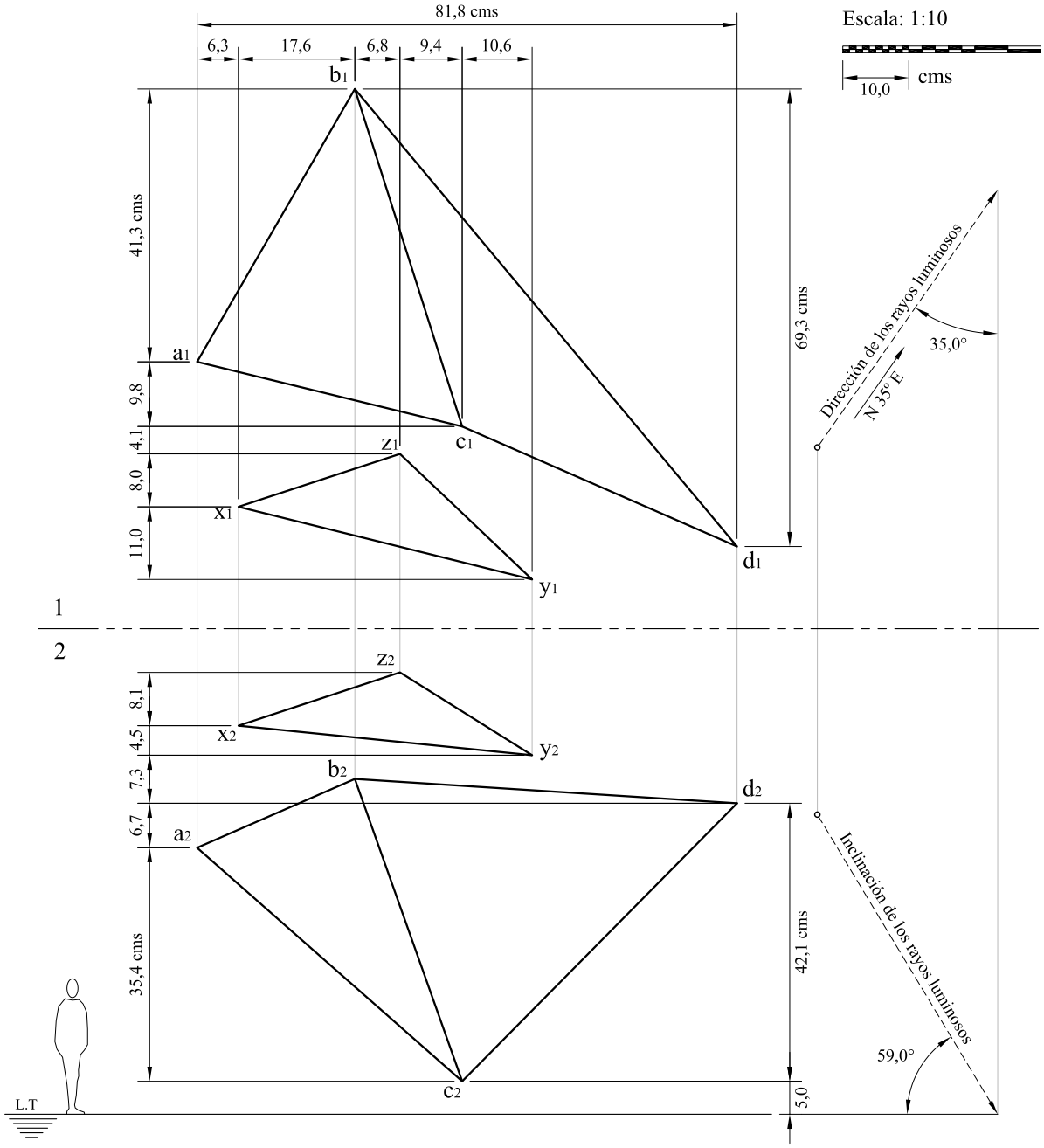
Se procede a conectar los puntos entre sí, mediante una línea elíptica en ambas vistas; posteriormente, se aplican criterios de visibilidad, de acuerdo al sistema de proyección DIN *(figura 9.37).*



Desarrollo del ejemplo 3, intersección entre un plano y un cono recto (método del plano cortante)
Figura 9.37

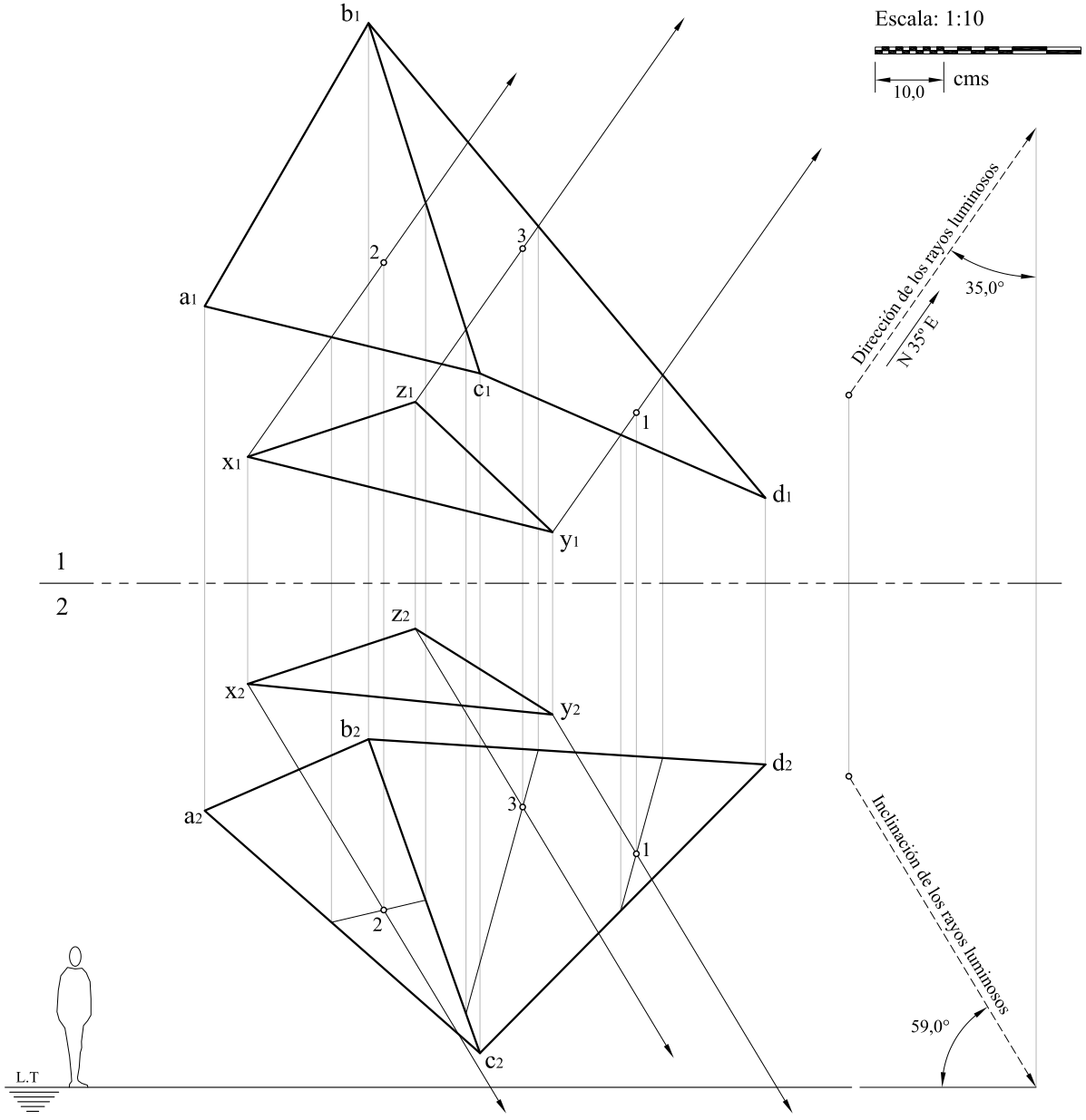
9.2.4 Ejemplo 4

Determinar la sombra proyectada del plano XYZ sobre los planos ABC y BCD, mediante el método del plano cortante; utilice como referencia la dirección, y el ángulo de inclinación proyectado de los rayos luminosos suministrados en el gráfico. Trabajar en sistema ASA, a escala: 1:10 *(figura 9.38).*



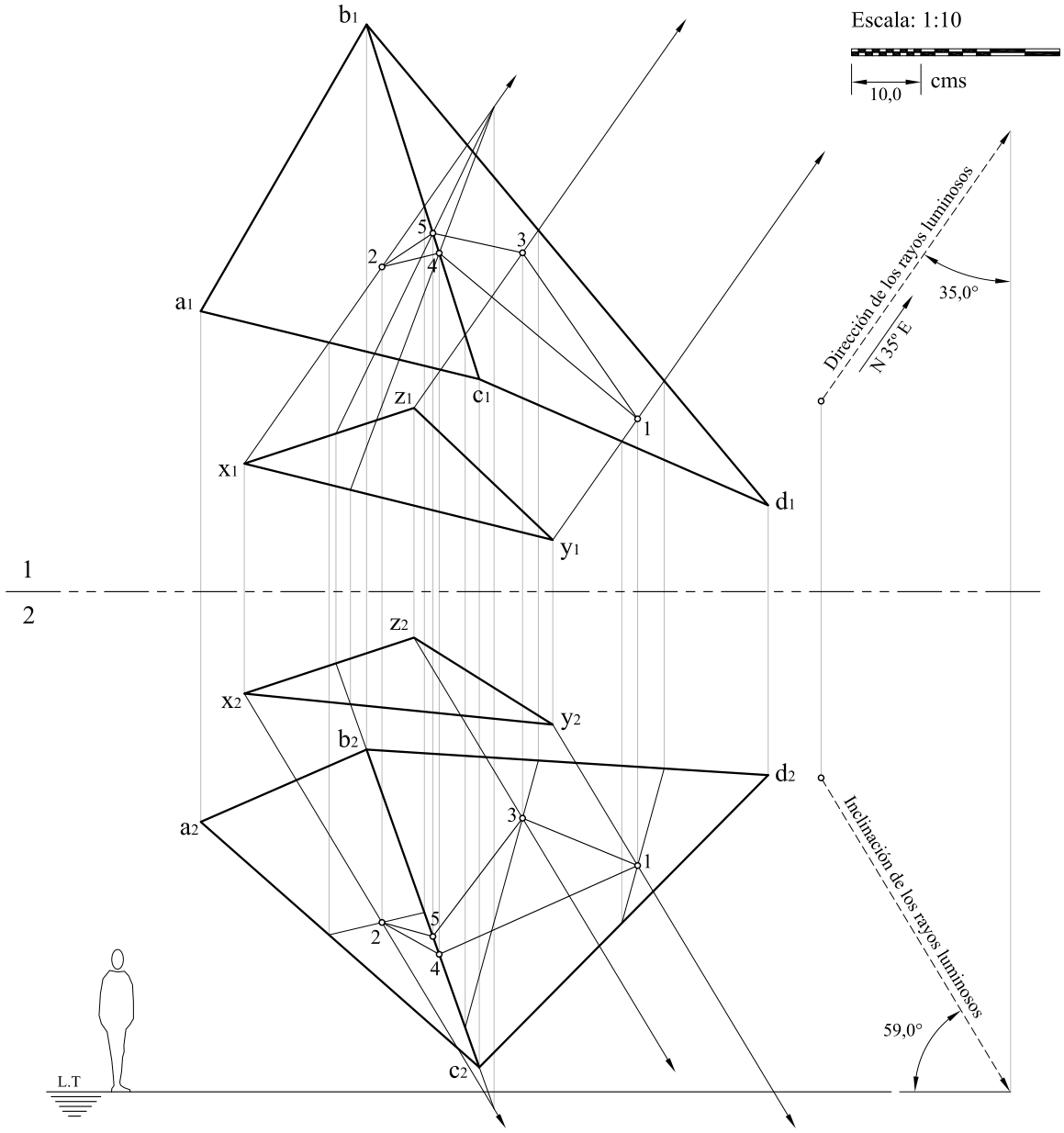
Enunciado ejemplo 4, sombra arrojada del plano XYZ sobre los planos ABC y BCD
Figura 9.38

En primer lugar, se procede a construir los rayos luminosos que pasen por los vértices X, Y, y Z, de acuerdo a la dirección, y el ángulo de inclinación suministrados; cada uno de los rayos se comporta como un plano cortante en la vista superior (planos verticales), los cuales, cortan al plano ABC o BCD en dos puntos cada uno; de esta manera, el rayo que pasa por el vértice X determina el punto 2 sobre el plano ABC, y los rayos que pasan por los vértices Y, y Z determinan los puntos 1 y 3 sobre el plano BCD respectivamente (*figura 9.39).*



Sombra arrojada del plano XYZ sobre los planos ABC y BCD (método del plano cortante)
Figura 9.39

El siguiente paso, consiste en dibujar la sombra; teóricamente la sombra de una recta sobre un plano será igual o menor a la longitud real de la recta, si la recta es paralela o no al plano respectivamente; esto significa, que los puntos 1 y 3 correspondientes a los vértices Y, y Z, se unen directamente ya que se encuentran en el mismo plano BCD; pero, el punto 2 no se une directamente con los puntos 1 y 3, ya que se encuentran en planos separados, es decir que la sombra se quiebra en la arista BC; por lo tanto, se debe construir un plano cortante que pase por b_2c_2, e intercepte a los planos virtuales que pasan por las aristas XY y XZ en dos puntos cada uno; de esta forma, el plano cortante b_2c_2 determina los puntos 4 y 5 con los planos virtuales XY, y XZ respectivamente; finalmente, se define la sombra mediante las aristas 1-3, 3-5, 2-5, 2-4, y 1-4 (*figura 9.40).*

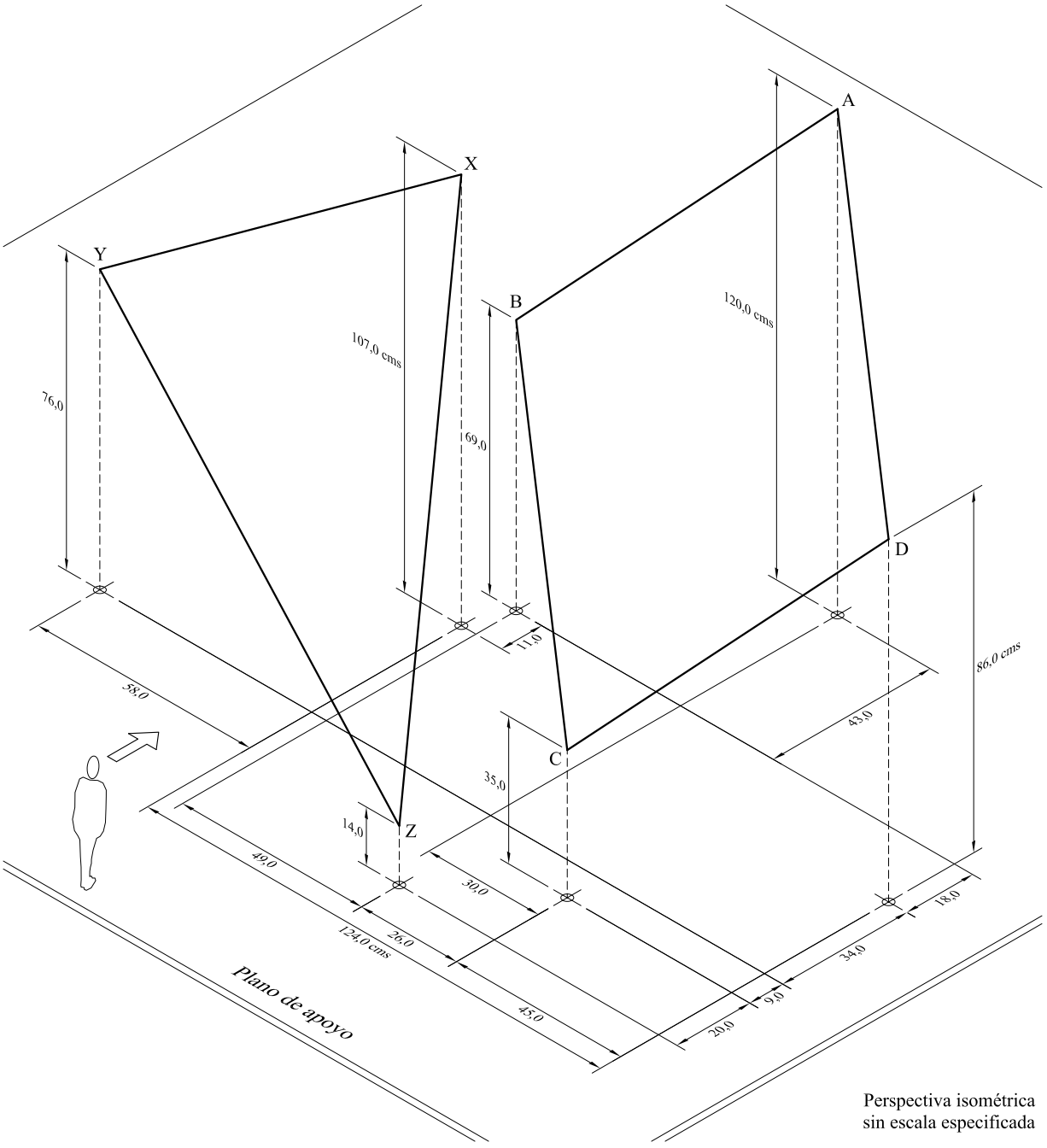


Sombra arrojada del plano XYZ sobre los planos ABC y BCD (método del plano cortante)
Figura 9.40

9.3 Ejercicios

9.3.1 Ejercicio 1

Determinar el rumbo y el ángulo de inclinación de la intersección aparente entre los planos ABCD y XYZ; trabajar a escala: 1: 10; sistema ASA, en un formato de 1/4 de pliego de papel (*figura 9.41).*



Ejercicio propuesto para resolver su intersección aparente
Figura 9.41

9.3.2 Ejercicio 2

Determinar la intersección entre los elementos representados en cada figura; utilice el método del plano como filo, muestre el procedimiento, y visualice al final; trabajar a escala: 1:5, en un formato de 1/8 de pliego de papel (*figuras 9.42 y 9.43).*

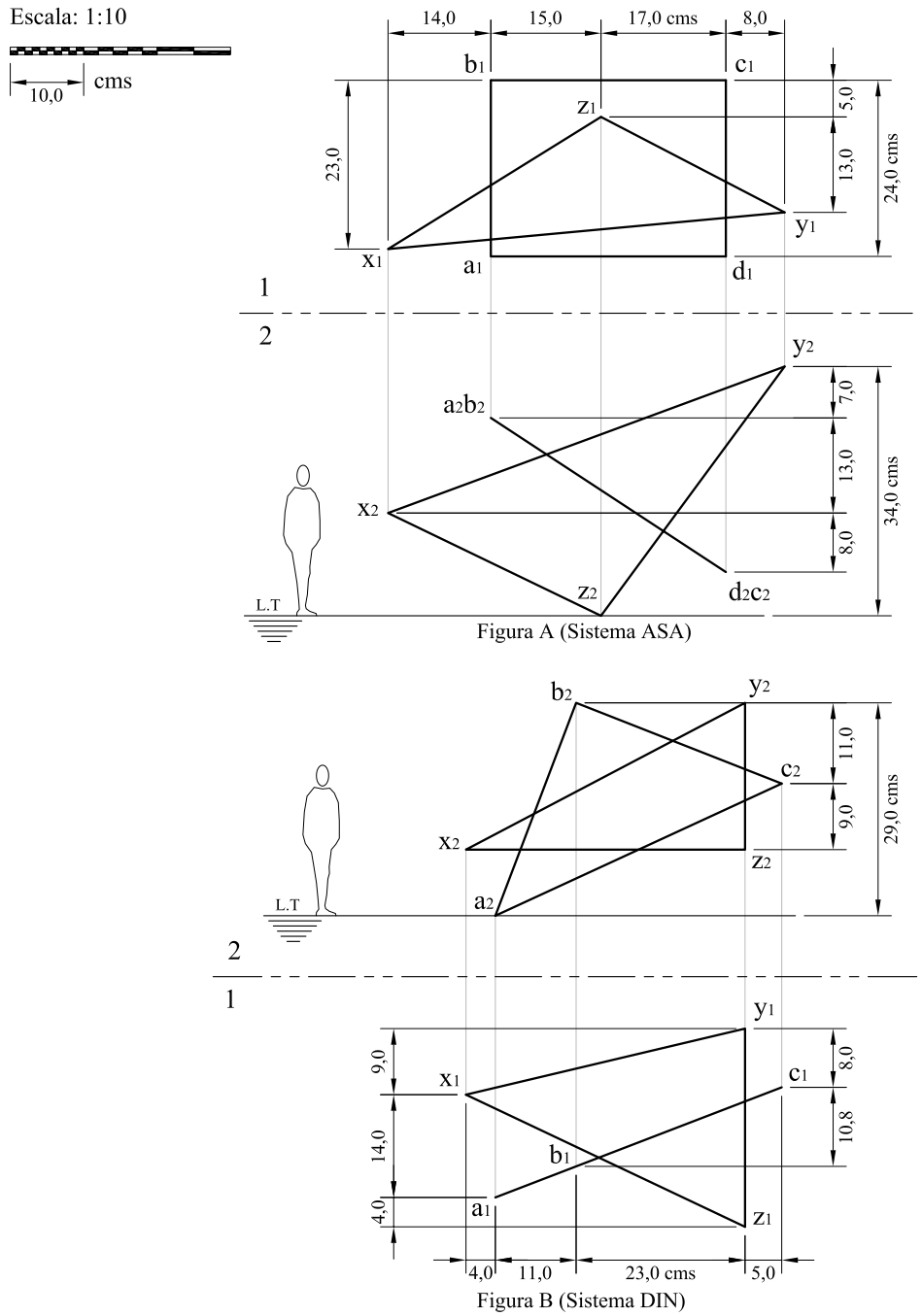


Figura A (Sistema ASA)

Figura B (Sistema DIN)

Ejercicios propuestos para resolver su respectiva intersección (Método del plano como filo)
Figura 9.42

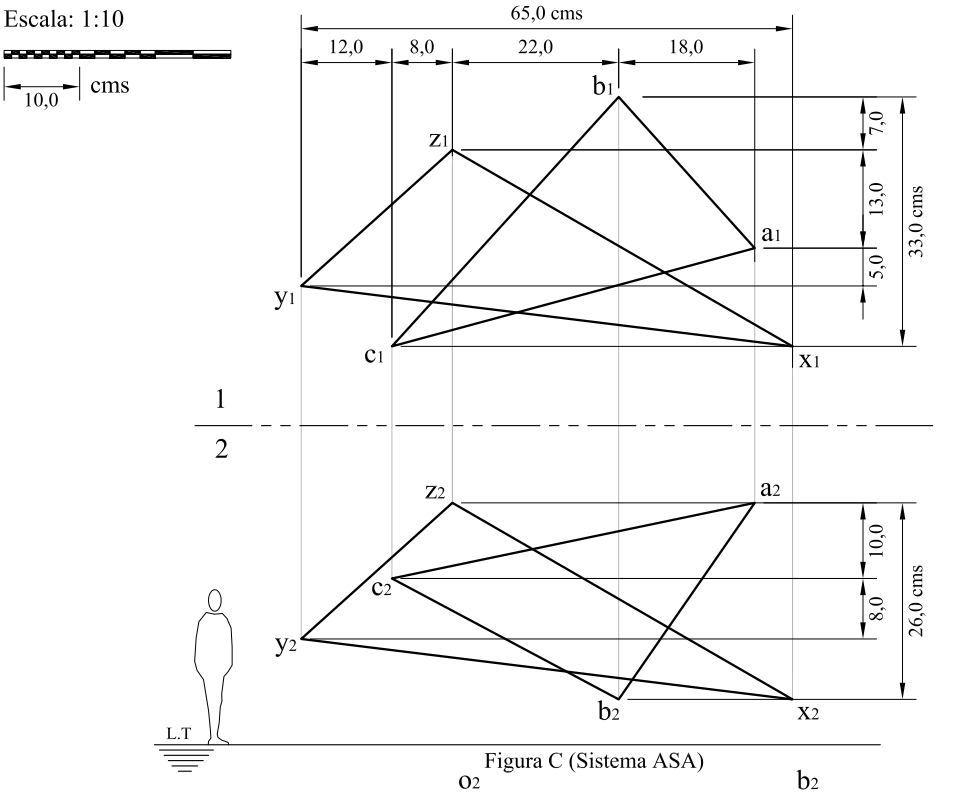


Figura C (Sistema ASA)

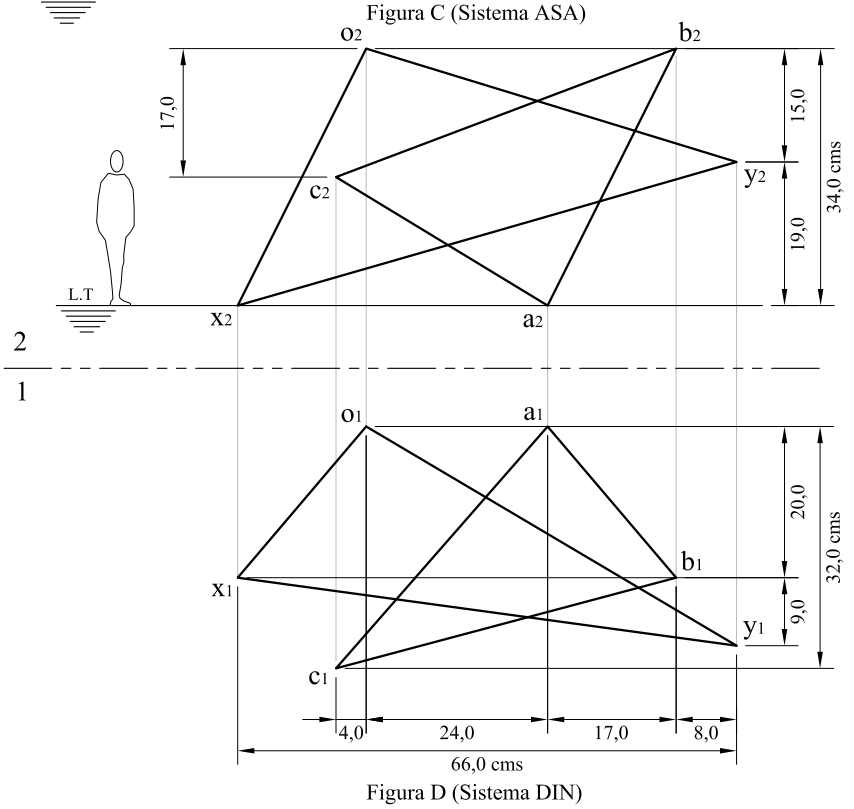
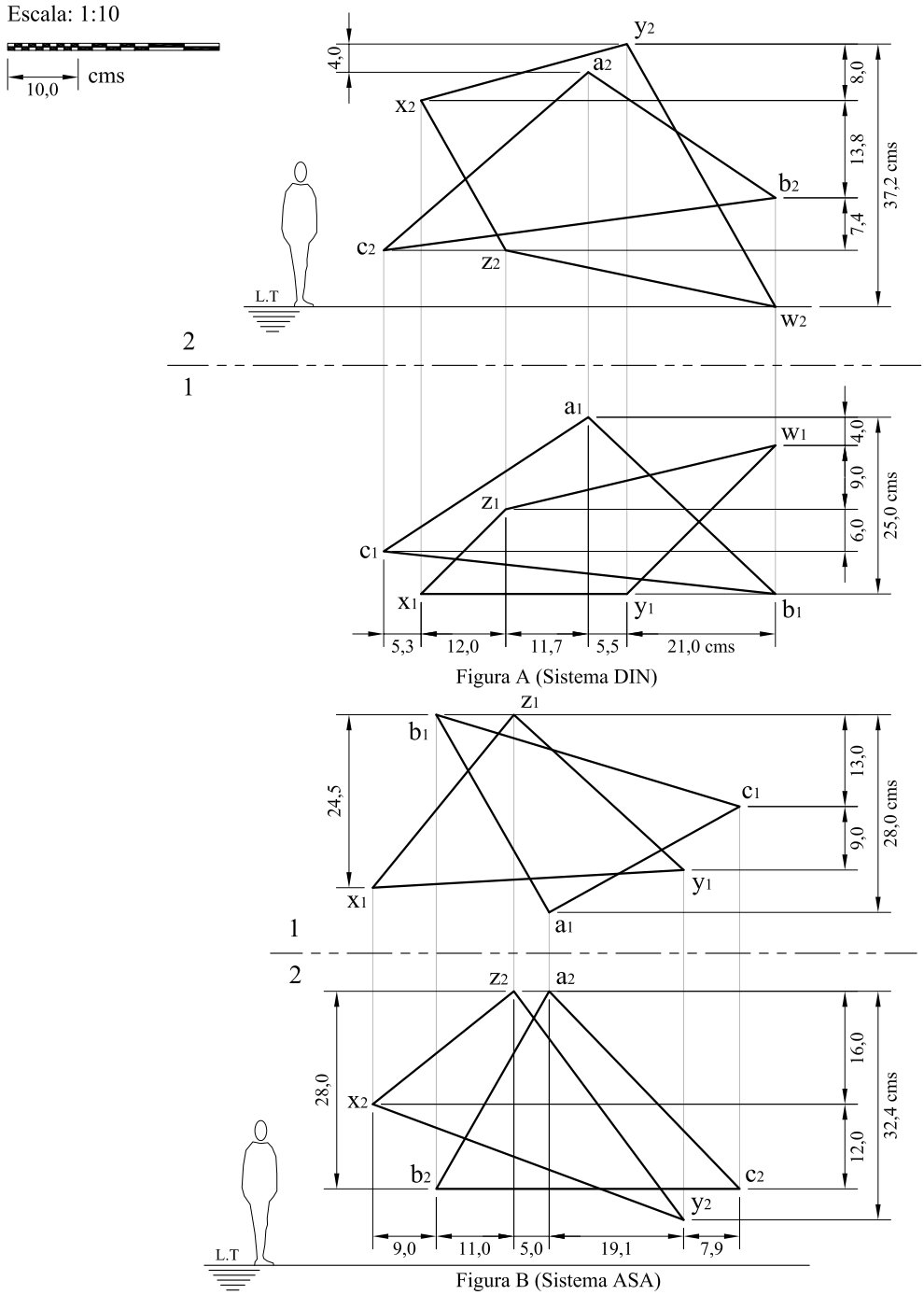


Figura D (Sistema DIN)

Ejercicios propuestos para resolver su respectiva intersección (Método del plano como filo)
Figura 9.43

9.3.3 Ejercicio 3

Determinar la intersección entre los elementos representados en cada figura; utilice el método del plano cortante, muestre el procedimiento completo, y visualice al final (*figuras 9.44 y 9.45).*



Ejercicios propuestos para resolver su respectiva intersección (Método del plano cortante)
Figura 9.44

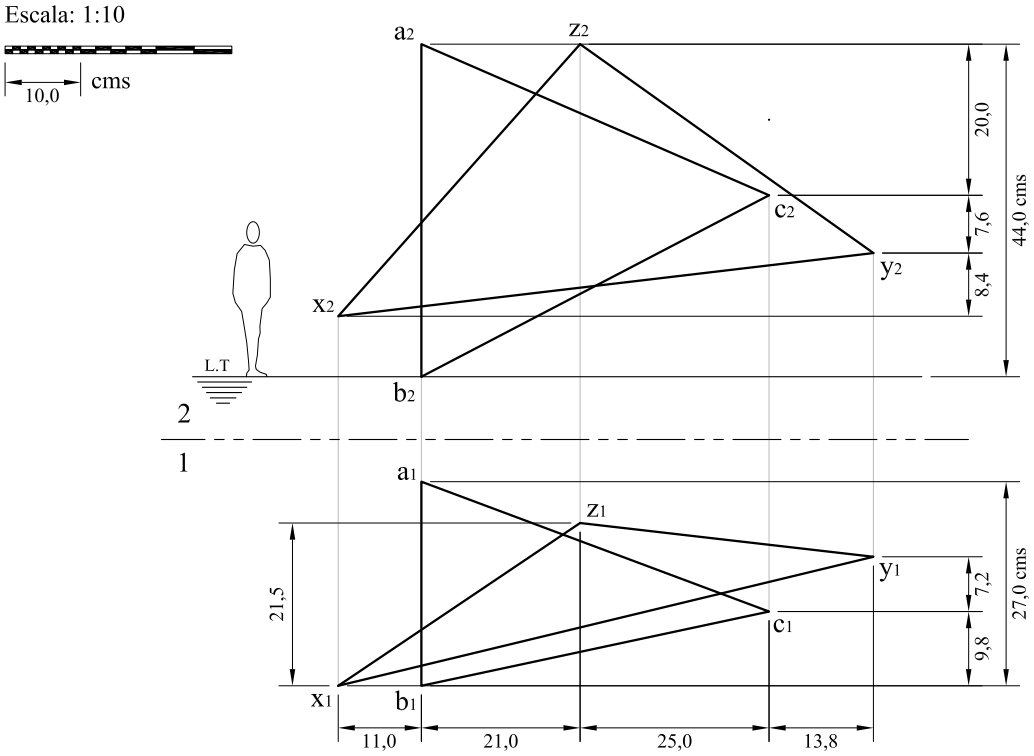


Figura C (Sistema DIN)

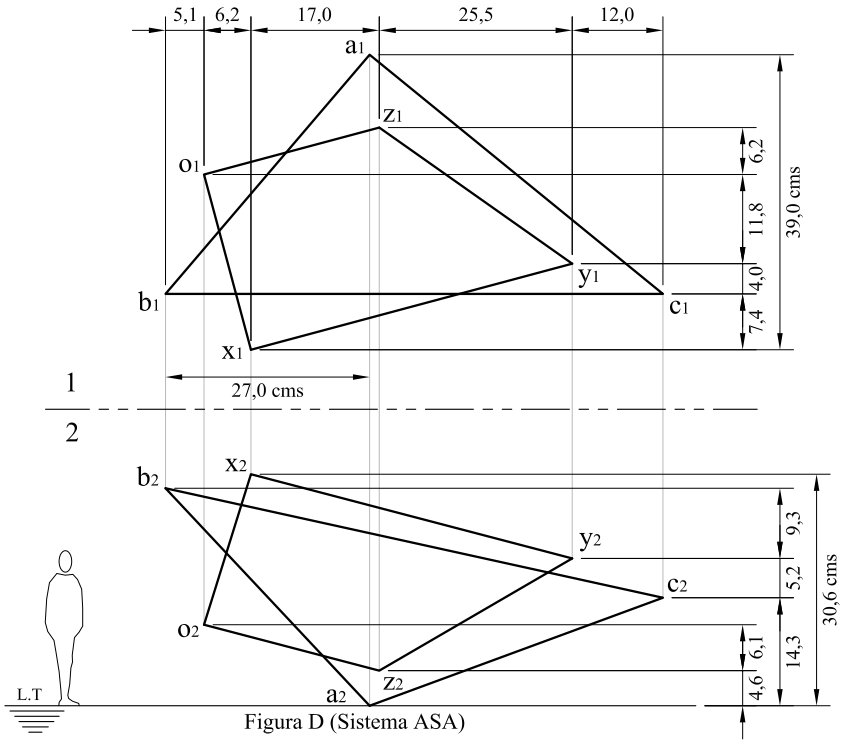
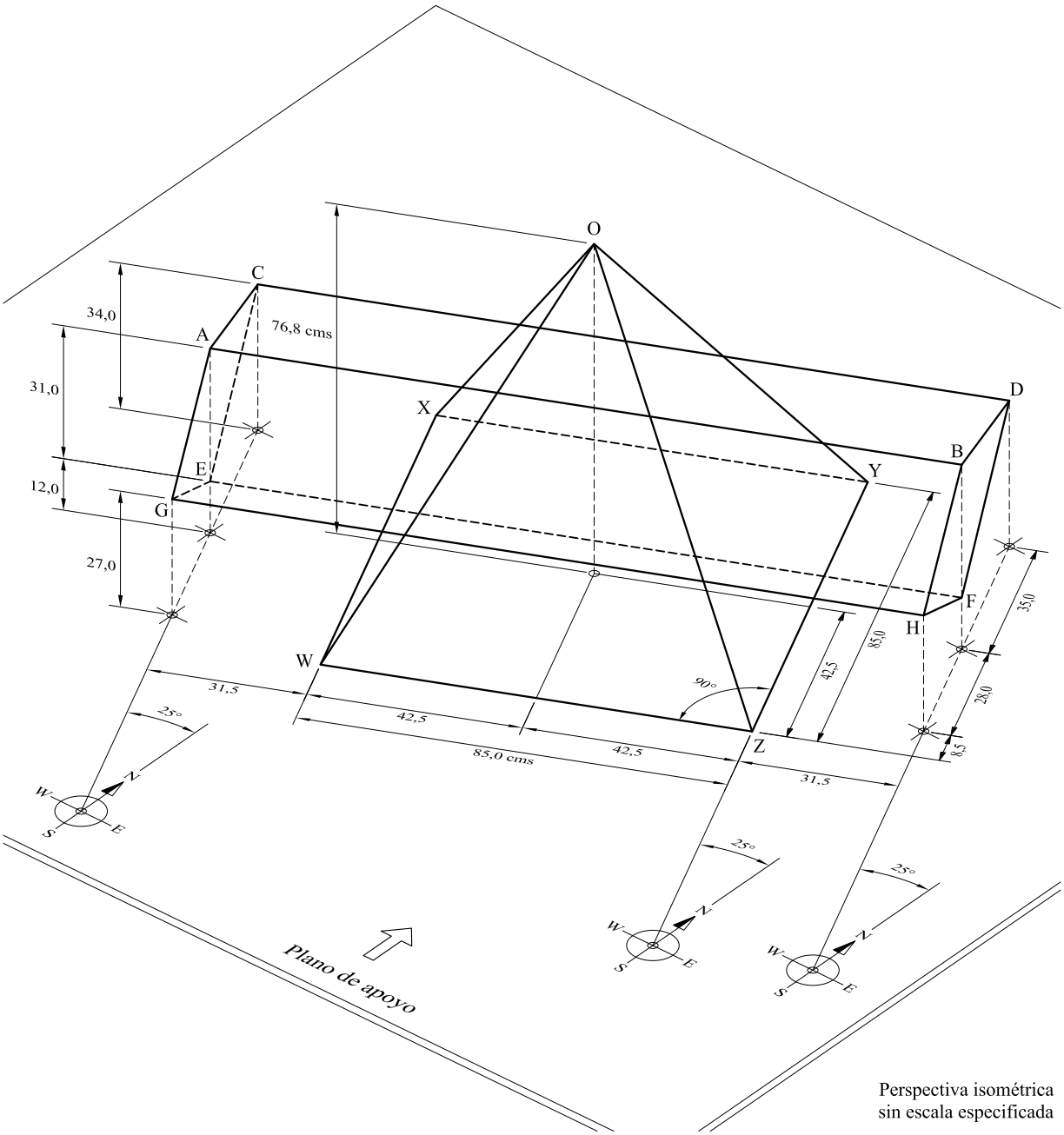


Figura D (Sistema ASA)

Ejercicios propuestos para resolver su respectiva intersección (Método del plano cortante)
Figura 9.45

9.3.4 Ejercicio 4

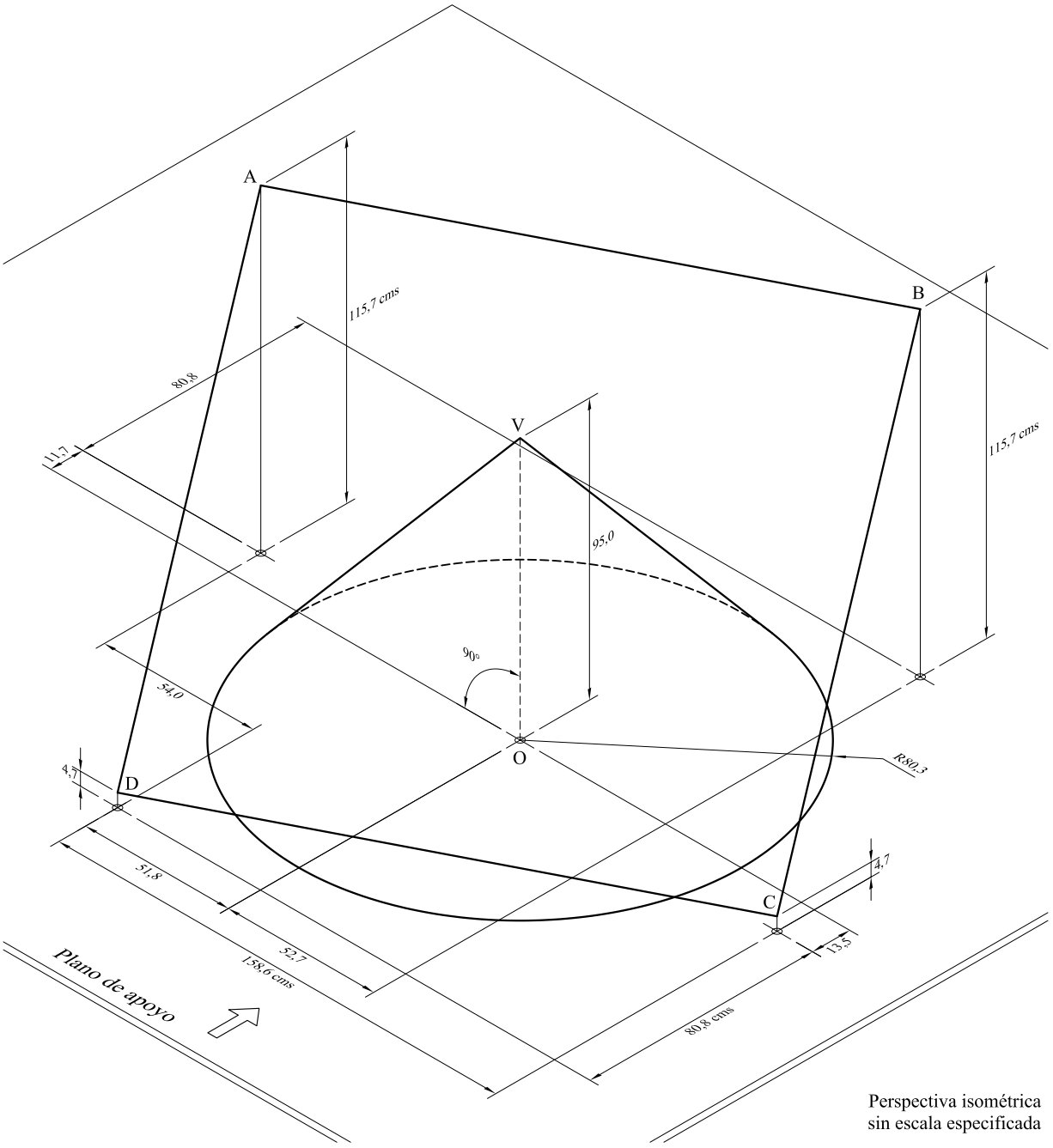
El gráfico expuesto a continuación muestra una pirámide recta y un prisma, los cuales se encuentran referenciados y dimensionados en cms; determine la intersección entre ambos elementos, utilizando el método del plano cortante; calcule el área total de intersección en los planos de la pirámide. Trabajar en sistema ASA, a escala: 1: 10; en un formato de 1/2 de pliego de papel (*figura 9.46).*



Ejercicio propuesto para resolver su intersección
Figura 9.46

9.3.5 Ejercicio 5

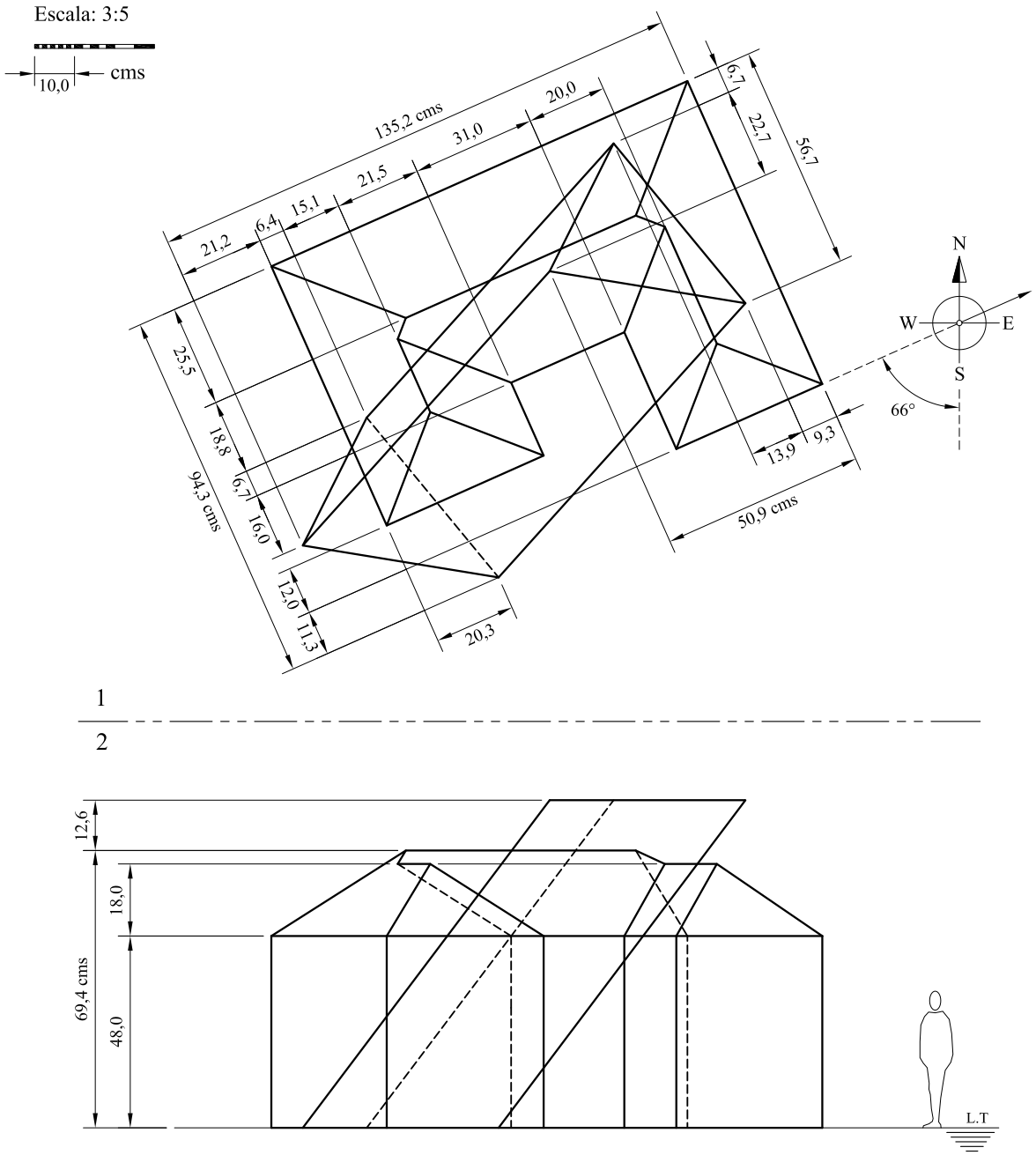
El gráfico expuesto a continuación muestra un cono recto y un plano ABCD, los cuales se encuentran referenciados y dimensionados en cms; determine la intersección entre ambos elementos, utilizando el método del plano como filo; determine el área de la sección cónica resultante. Trabajar en sistema ASA, a escala: 1: 10; en un formato de 1/2 de pliego de papel (*figura 9.47).*



Ejercicio propuesto para resolver su intersección
Figura 9.47

9.3.6 Ejercicio 6

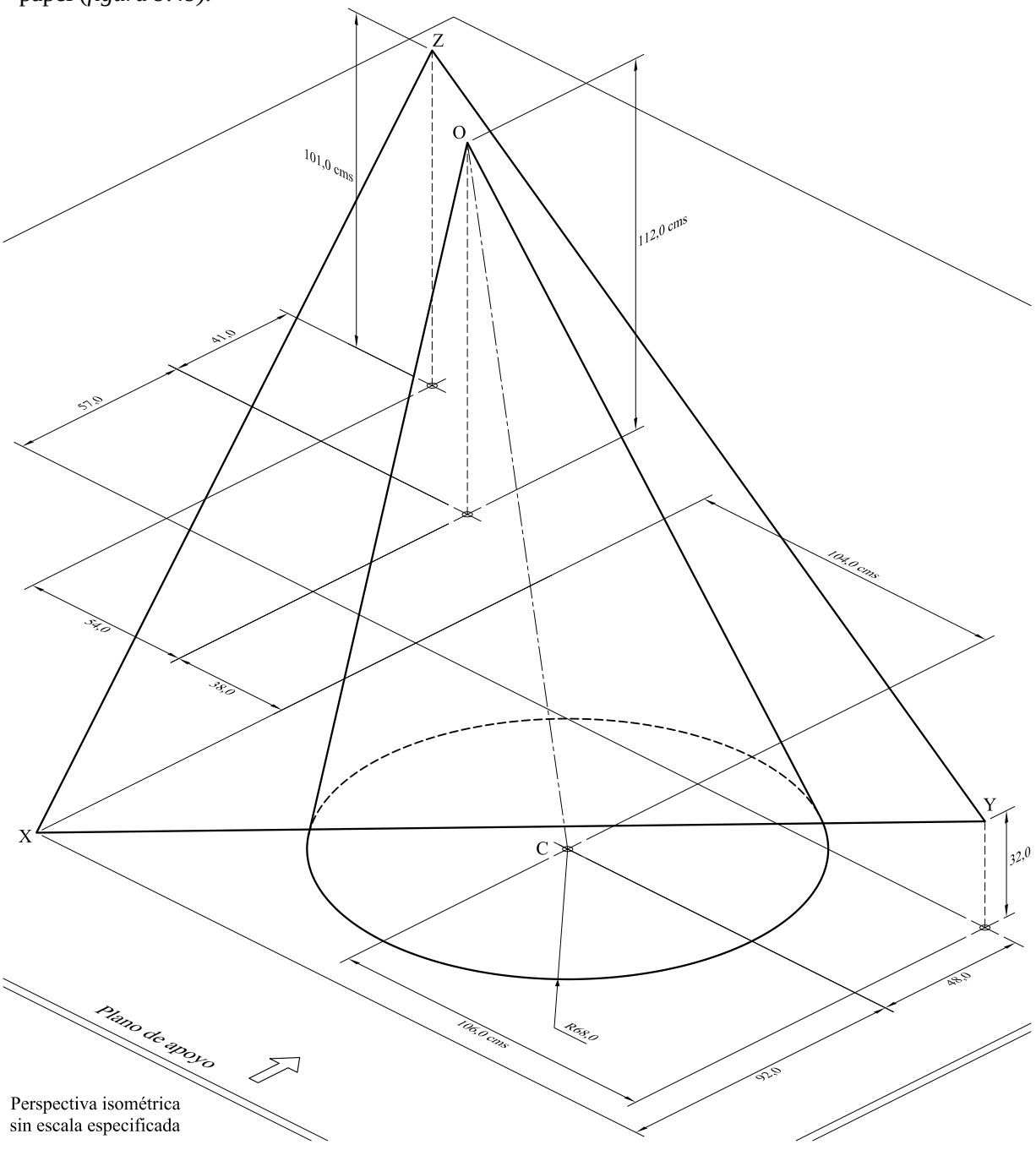
El gráfico expuesto a continuación muestra un sólido irregular y un prisma oblicuo, los cuales se encuentran referenciados y dimensionados en cms; determine la intersección entre ambos elementos, utilizando el método del plano cortante. Trabajar en sistema ASA, a escala: 1: 7,5; en un formato de 1/4 de pliego de papel (*figura 9.48).*



Ejercicio propuesto para resolver su intersección
Figura 9.48

9.3.7 Ejercicio 7

El gráfico expuesto a continuación muestra un cono oblicuo y un plano XYZ, los cuales se encuentran referenciados y dimensionados en cms; determine la intersección entre ambos elementos, utilizando el método del plano cortante. Trabajar en sistema ASA, a escala: 1: 10; en un formato de 1/4 de pliego de papel (*figura 9.49).*

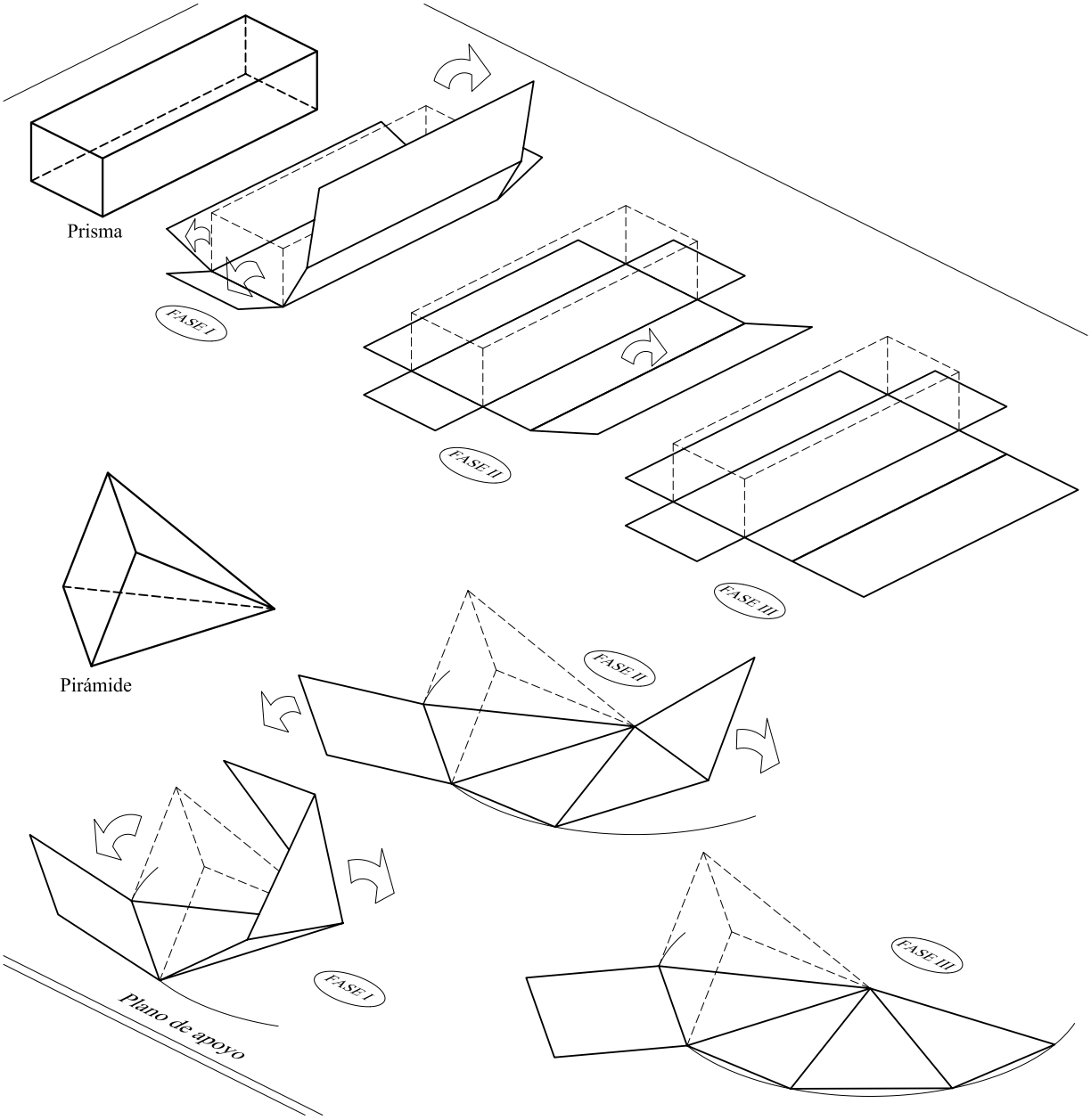


Ejercicio propuesto para resolver su intersección
Figura 9.49

10.0 Desarrollo de superficies

10.0 Generalidades sobre el desarrollo de superficies

El desarrollo de una superficie se refiere al proceso mediante el cual, se obtiene la verdadera forma de todos los planos que conforman un sólido en un solo plano de representación bidimensional; esto significa que los planos delimitadores de un cuerpo geométrico, se desenvuelven hasta que coincidan en un mismo plano de proyección *(figura 10.1).*



Esquema conceptual de desarrollo de superficies (perspectivas)
Figura 10.1

En nuestro medio, suelen encontrarse artículos manufacturados mediante láminas metálicas, a las cuales deben dibujarse los contornos en verdadera forma, para luego, seccionarlas, doblarlas, y unir las aristas mediante un proceso de costura, remachado, engatillado, o soldadura.

Las aplicaciones más representativas de dichos desarrollos, consisten en el diseño y fabricación de ductos para transporte de fluidos gaseosos o líquidos (Calderería), carpintería, formaletería, diseño de fuselajes para aeronaves, y diseño de empaques; cabe mencionar que los desarrollos de superficies que se consiguen en geometría descriptiva se consideran teóricos, debido a que no se tienen en cuenta el espesor y la tolerancia del curvado de la lámina; por lo tanto, en el momento de construir el modelo a escala, deben considerarse dichos parámetros; además, la mayoría de desarrollos de superficies obtenidos, muestran las caras internas del sólido, por lo tanto, en el momento de fabricar el modelo deben doblarse las caras por sus respectivas aristas en forma envolvente hacia el interior.

10.1 Clasificación de desarrollo de superficies

Dependiendo de las características geométricas del sólido, los desarrollos de superficies se clasifican en cuatro grupos:

a) Desarrollo paralelo
b) Desarrollo radial
c) Desarrollo por triangulación
d) Desarrollo aproximado

a) Desarrollo paralelo*:* Es el que se aplica para los sólidos de tipo prismáticos, es decir, aquellos objetos que poseen una sección constante a lo largo de un eje, tales como, los prismas, los cilindros, y los perfiles de extrusión recto.

b) Desarrollo radial: Es el que se aplica para los sólidos de tipo radial, es decir, aquellos objetos cuyas aristas convergen en un vértice, tales como, las pirámides, y los conos.

c) Desarrollo por triangulación: Es el que se aplica para los sólidos de tipo de transición o adaptadores, es decir, aquellos objetos cuyas caras deben subdividirse en triángulos; dentro de esta categoría, se encuentran las tolvas, adaptadores de sección, y el cono alabeado.

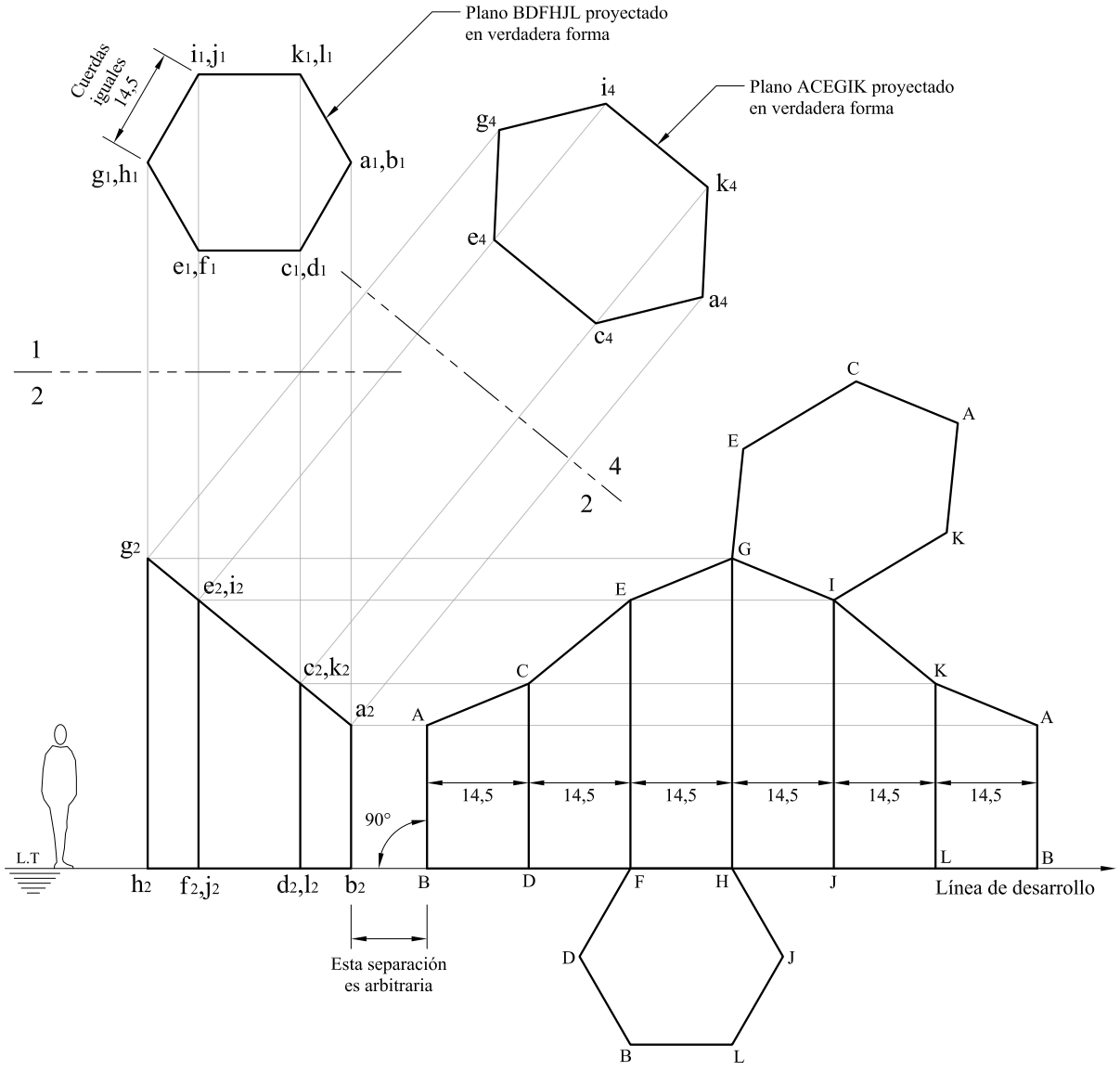
d) Desarrollo aproximado: Es el que se aplica para los sólidos complejos, cuya geometría debe descomponerse para utilizar uno o más de los tipos de desarrollo vistos anteriormente; dentro de este categoría se encuentran las superficies de doble curvatura que se pueden desarrollar en formas aproximadas, tales como la esfera, y el toroide.

10.2 Desarrollo paralelo

Para obtener un desarrollo paralelo en un sólido de tipo prismático, es necesario precisar la verdadera magnitud del eje, así como, obtener la sección media de dicho sólido; esto quiere decir, que las aristas principales al estar paralelas al eje, deben proyectarse en verdadera magnitud, y en una vista auxiliar obtener dichas aristas visualizadas como un punto cada una (sección media); estos dos parámetros permitirán construir el desarrollo definitivo, por medio de líneas paralelas a una *"Línea de desarrollo"*, donde se trasladarán las medidas verdaderas, como si se tratara de un sistema cartesiano; de esta manera, la línea de desarrollo se comporta como un eje principal X, representando a su vez, la línea de ordenamiento donde se desenvuelven las caras del sólido.

10.2.1 Desarrollo de un prisma recto

En este caso, las aristas longitudinales del prisma se proyectan en verdadera magnitud en la proyección frontal, ya que se tratan de rectas verticales, y por consiguiente en la vista superior se proyectan como un punto cada una (sección media); se plantea un eje de pliegue 2-4 paralelo al plano ACEGIK visto como filo, para poder obtener su verdadera forma; luego, se plantea una línea de desarrollo que sea perpendicular a las aristas longitudinales proyectadas en verdadera magnitud, y sobre ella, se trasladan sus magnitudes reales por medio de líneas paralelas a la línea de desarrollo; la separación entre ellas se mide directamente en la sección media; al final se completan los demás planos del prisma *(figura 10.2)*

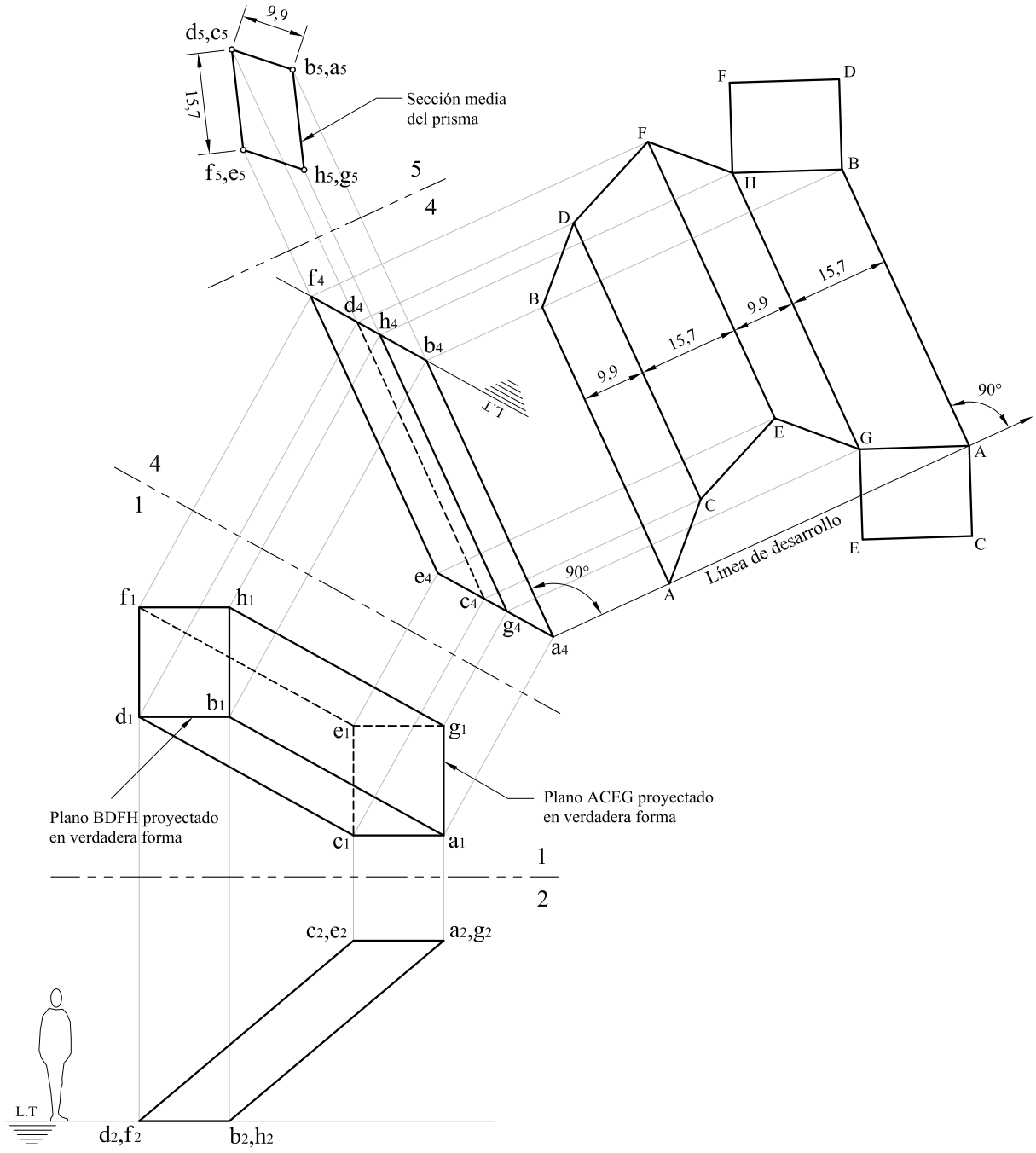


Nota: En el desarrollo definitivo, se designan los vértices con sus respectivas letras en mayúsculas.

Desarrollo de un prisma recto truncado
Figura 10.2

10.2.2 Desarrollo de un prisma oblicuo

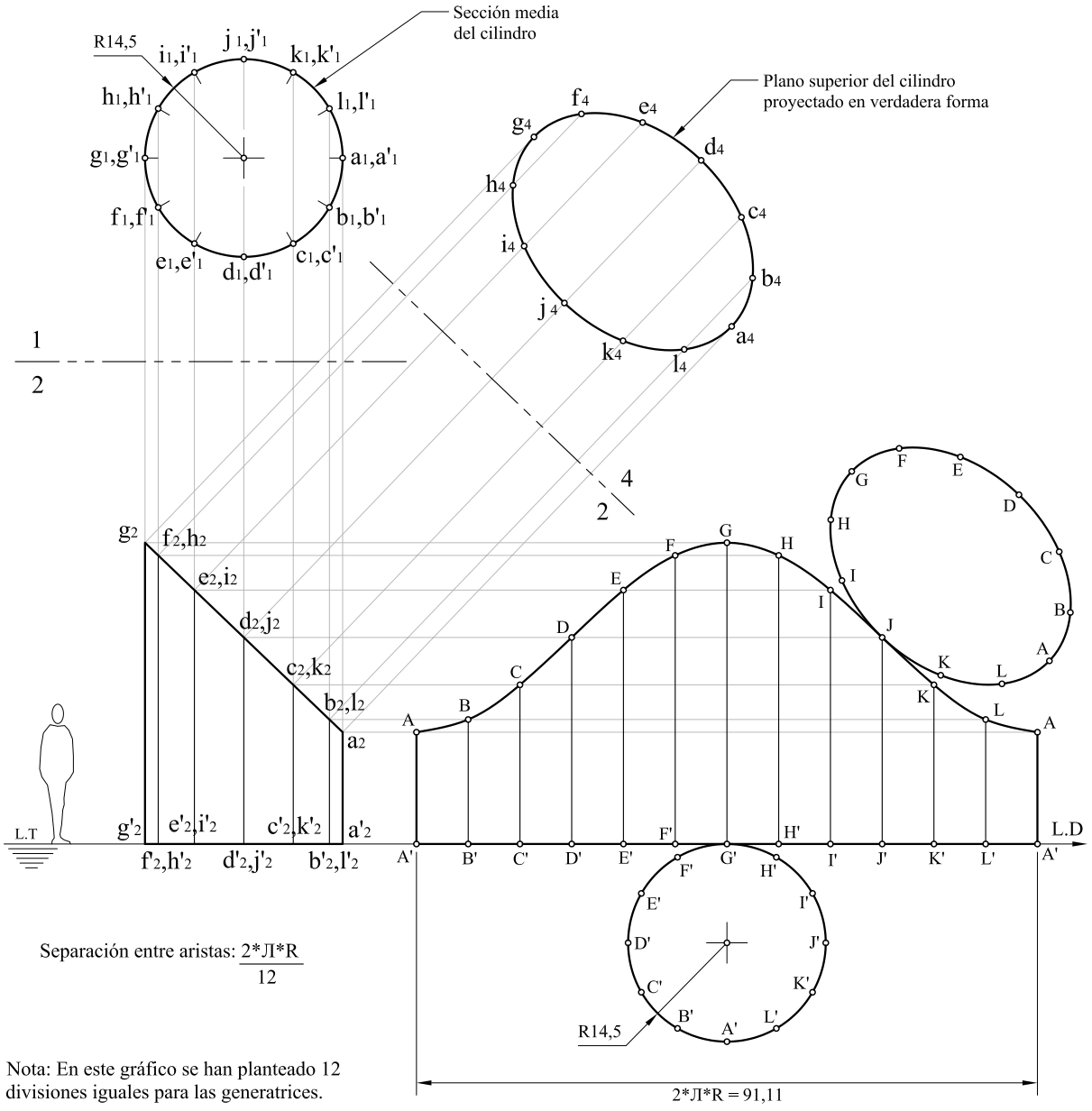
Al igual que el anterior caso, se plantean dos vistas donde se aprecien la verdadera magnitud de las aristas longitudinales, así como la sección media del prisma (vistas auxiliares 4 y 5 respectivamente); luego, se plantea una línea de desarrollo que sea perpendicular a las aristas longitudinales proyectadas en verdadera magnitud, y se completa trasladando las distancias desde la sección media *(figura 10.3)*.



Desarrollo de un prisma oblicuo de bases paralelas
Figura 10.3

10.2.3 Desarrollo de un cilindro recto

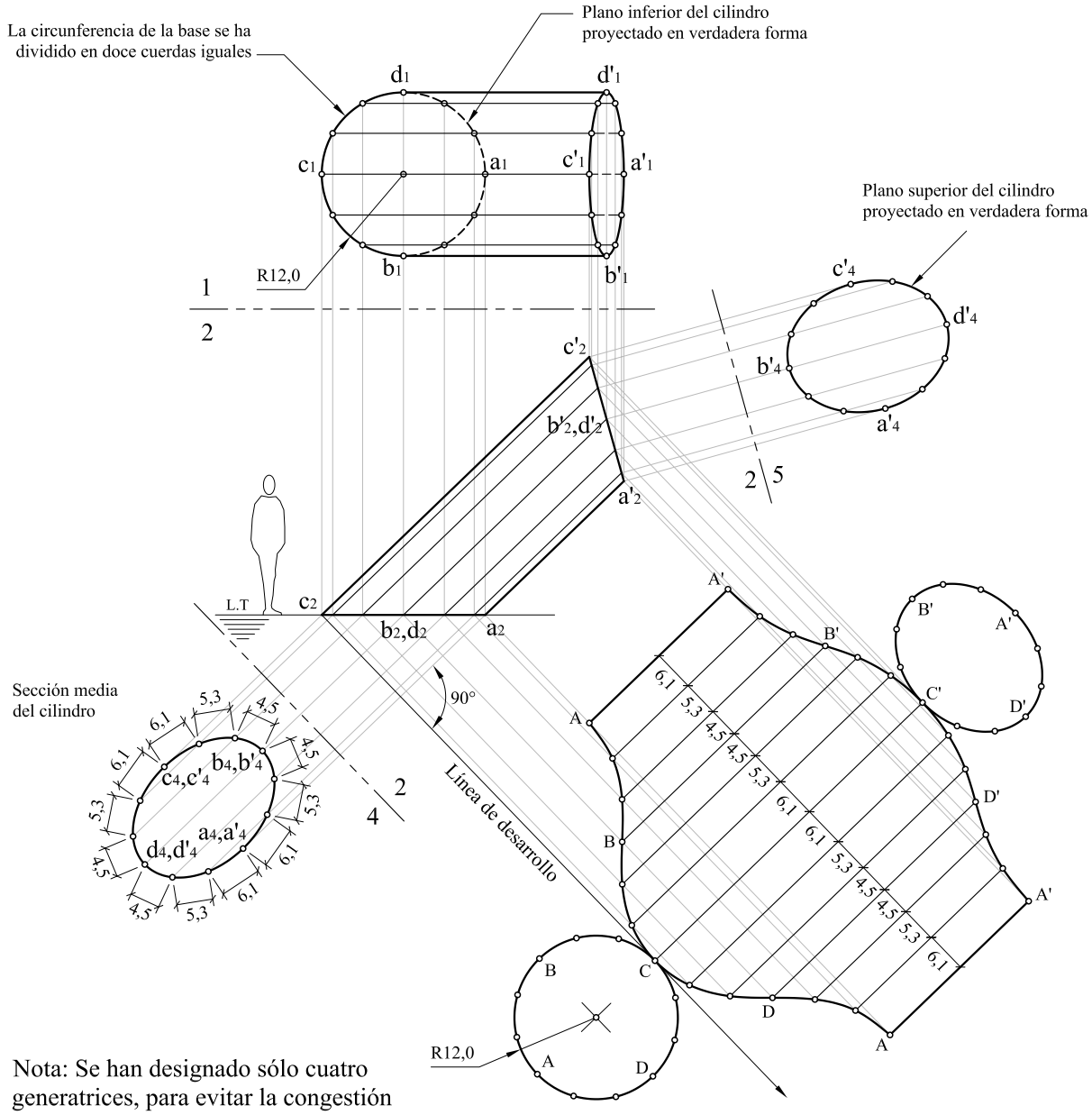
El propósito consiste en obtener la verdadera magnitud de las generatrices, así como obtener la sección media del cilindro (vista frontal y superior, respectivamente); luego se plantea un eje de pliegue 2-4 paralelo a la base superior proyectada como filo para conseguir su verdadera forma; de igual manera, la base inferior del cilindro al estar paralela al plano superior se proyecta en verdadera forma en dicho plano de proyección; finalmente, se plantea una línea de desarrollo equivalente a la longitud del perímetro de la circunferencia de la sección media (Longitud = 2.π.r), y sobre ella se desenvuelven las generatrices con sus respectivas magnitudes verdaderas *(figura 10.4).*



Desarrollo de un cilindro recto truncado
Figura 10.4

10.2.4 Desarrollo de un cilindro oblicuo

De igual manera, se determina la verdadera magnitud de las generatrices y se obtiene la sección media; luego, se determina la verdadera forma de los planos superior e inferior; después se plantea una línea de desarrollo que sea perpendicular a las aristas longitudinales proyectadas en verdadera magnitud, y al final se completa trasladando las distancias obtenidas en la sección media *(figura 10.5).*

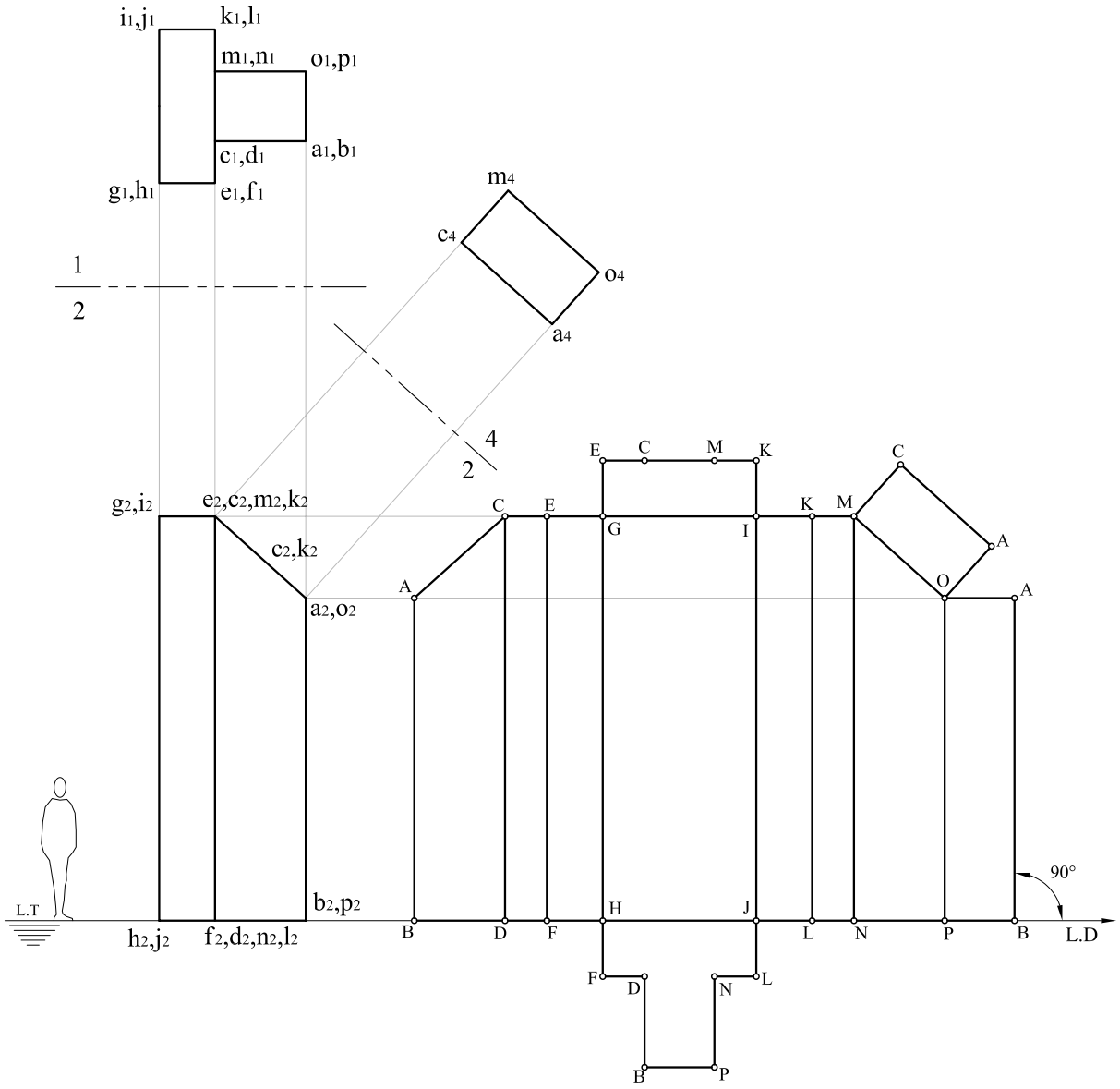


Nota: Se han designado sólo cuatro generatrices, para evitar la congestión visual en el dibujo.

Desarrollo de un cilindro oblicuo de bases no paralelas
Figura 10.5

10.2.5 Desarrollo de un perfil de extrusión recto

Los perfiles de extrusión recto representan elementos estructurales que se caracterizan por su esbeltez y resistencia, muy empleados en carpintería metálica, para el diseño de ventanas, puertas, columnas, vigas, y cerchas. Al poseer una sección constante a lo largo del eje principal, se puede desarrollar con el método paralelo; en este caso, se determina la verdadera magnitud de las aristas longitudinales, así como obtener la sección media; luego, se procede a definir la verdadera forma de los planos restantes; al final se desenvuelven todos los planos sobre la línea de desarrollo, siguiendo la misma metodología explicada anteriormente *(figura 10.6).*

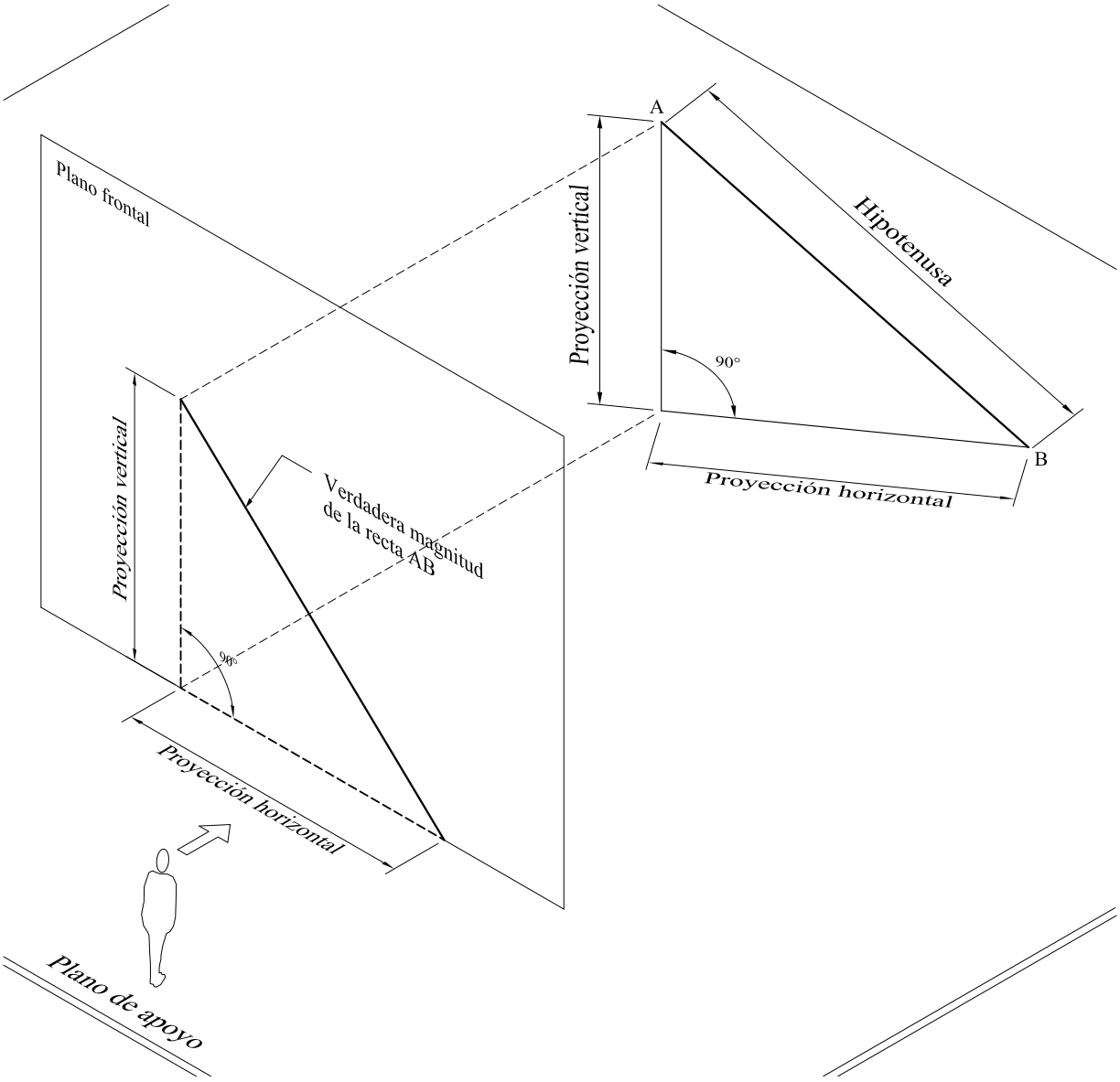


Desarrollo de un perfil de extrusión recto
Figura 10.6

10.3 Desarrollo radial

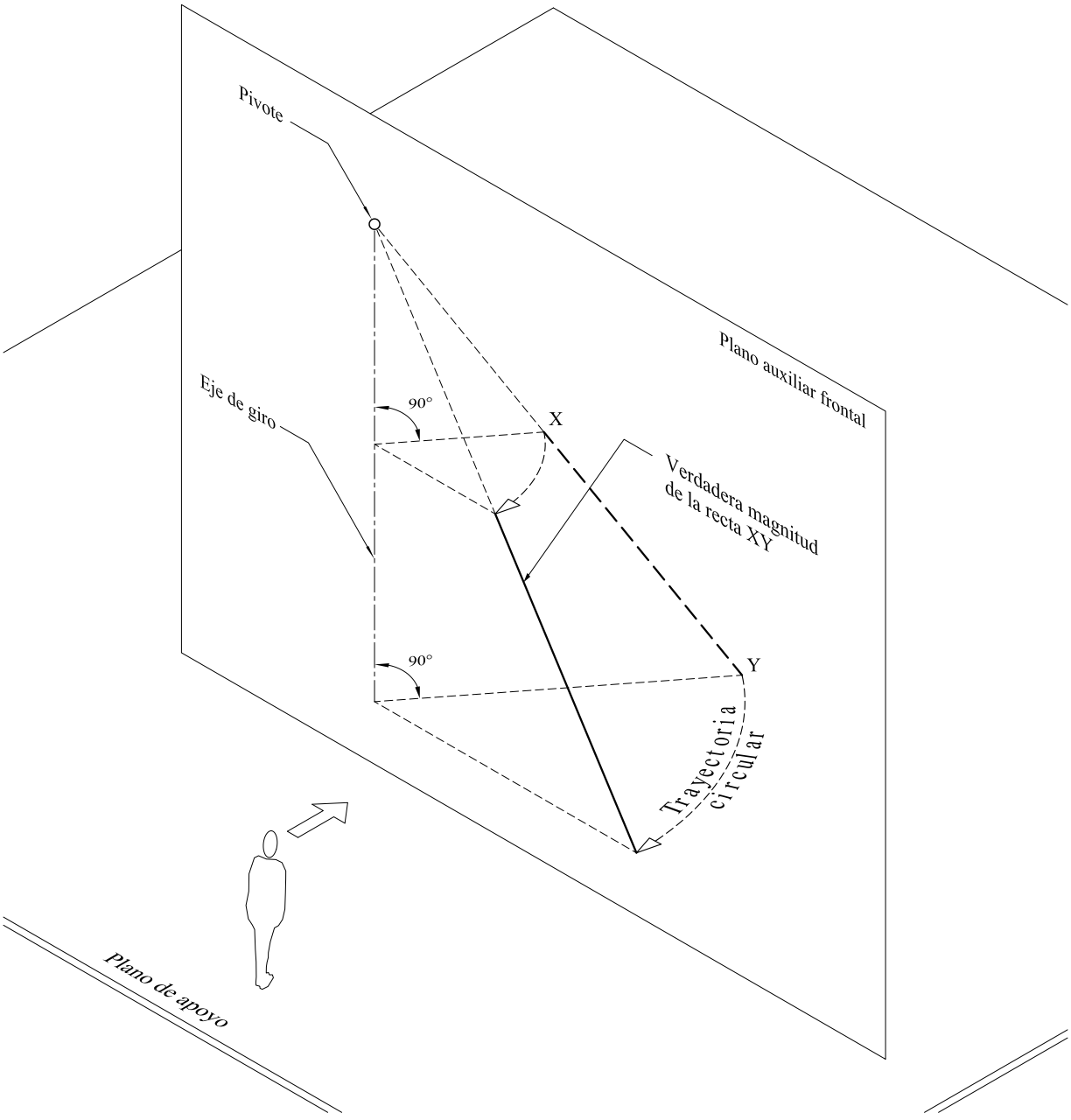
El objetivo principal consiste en determinar la verdadera magnitud de las aristas que convergen en el vértice, y visualizar la base del sólido en verdadera forma, donde se miden las longitudes de las cuerdas inscritas en el círculo que define el sólido. Para determinar la longitud real de una arista convergente, se pueden utilizar cualquiera de los dos métodos explicados a continuación:

a) Método de Pitágoras: Consiste en construir un triángulo rectángulo, de tal manera que el cateto adyacente corresponda con la proyección horizontal de la recta (distancia topográfica), y el cateto opuesto corresponda con la proyección vertical de la recta (cota); de esta forma, la longitud verdadera de la arista convergente será igual a la hipotenusa de dicho triángulo *(figura 10.7).*



Verdadera magnitud de una arista convergente (Método de Pitágoras)
Figura 10.7

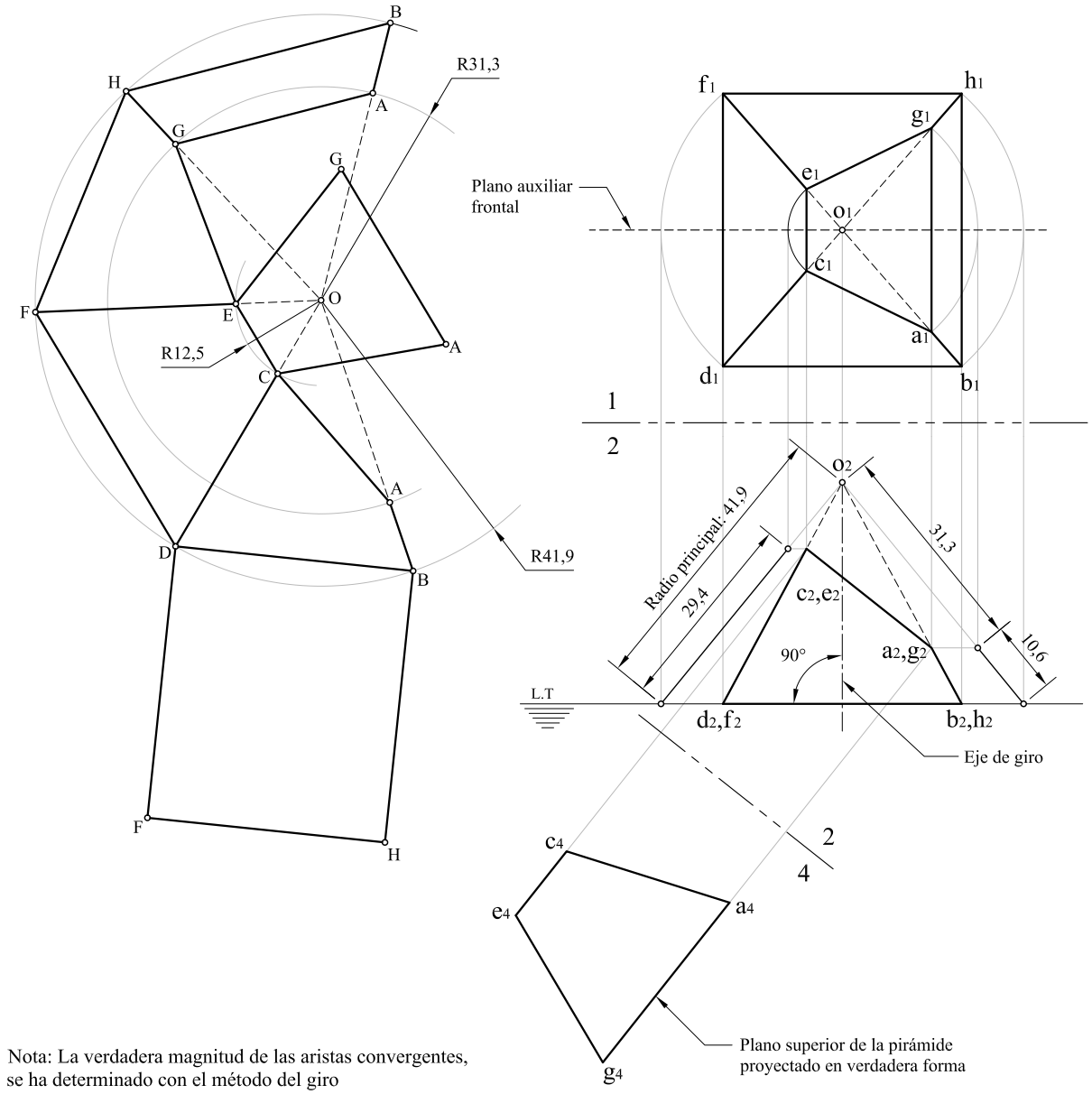
b) Método del giro o revolución: Consiste en rotar la recta desde un eje vertical que pasa por un punto colineal de la recta (punto de pivote), y a su vez dicho eje deberá pertenecer a un plano auxiliar que se proyecte en verdadera forma, de esta manera, cualquier punto que pertenezca a la recta, a excepción del pivote, describirá una trayectoria circular alrededor del eje, siendo este plano circular perpendicular al eje de giro; cuando la recta coincide con el plano auxiliar proyectado en verdadera forma, se obtiene su verdadera magnitud *(figura 10.8).*



Verdadera magnitud de una arista convergente (Método del giro o revolución)
Figura 10.8

10.3.1 Desarrollo de una pirámide recta

En primer lugar se deben prolongar las aristas convergentes de la pirámide hasta que coincidan en un solo vértice (punto O); el punto o_2 servirá para ubicar el eje de giro (recta vertical), así como, localizar un plano auxiliar frontal; en la vista superior se dibujan las trayectorias circulares de los vértices de la pirámide hasta que intercepten el plano auxiliar frontal, siendo estas trayectorias perpendiculares al eje de giro en la vista frontal; luego, a un lado de las proyecciones se dibuja un círculo con radio principal (R = 41.9) , y se trasladan los demás radios en verdadera magnitud, completando con las medidas de los lados de la base inferior (cuerdas), y el plano superior en verdadera forma *(figura 10.9).*

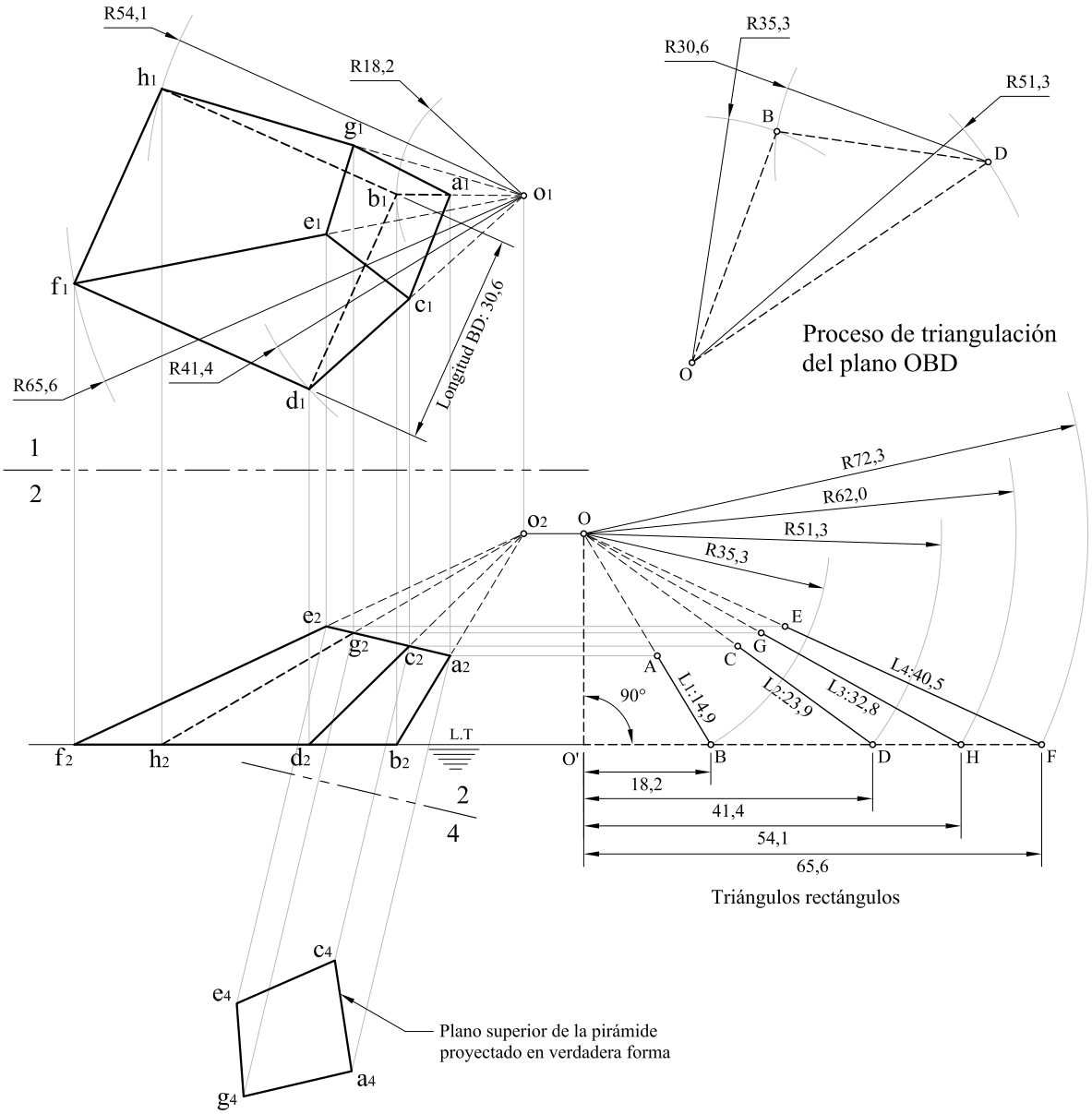


Nota: La verdadera magnitud de las aristas convergentes, se ha determinado con el método del giro

Desarrollo de una pirámide recta truncada (Método del giro)
Figura 10.9

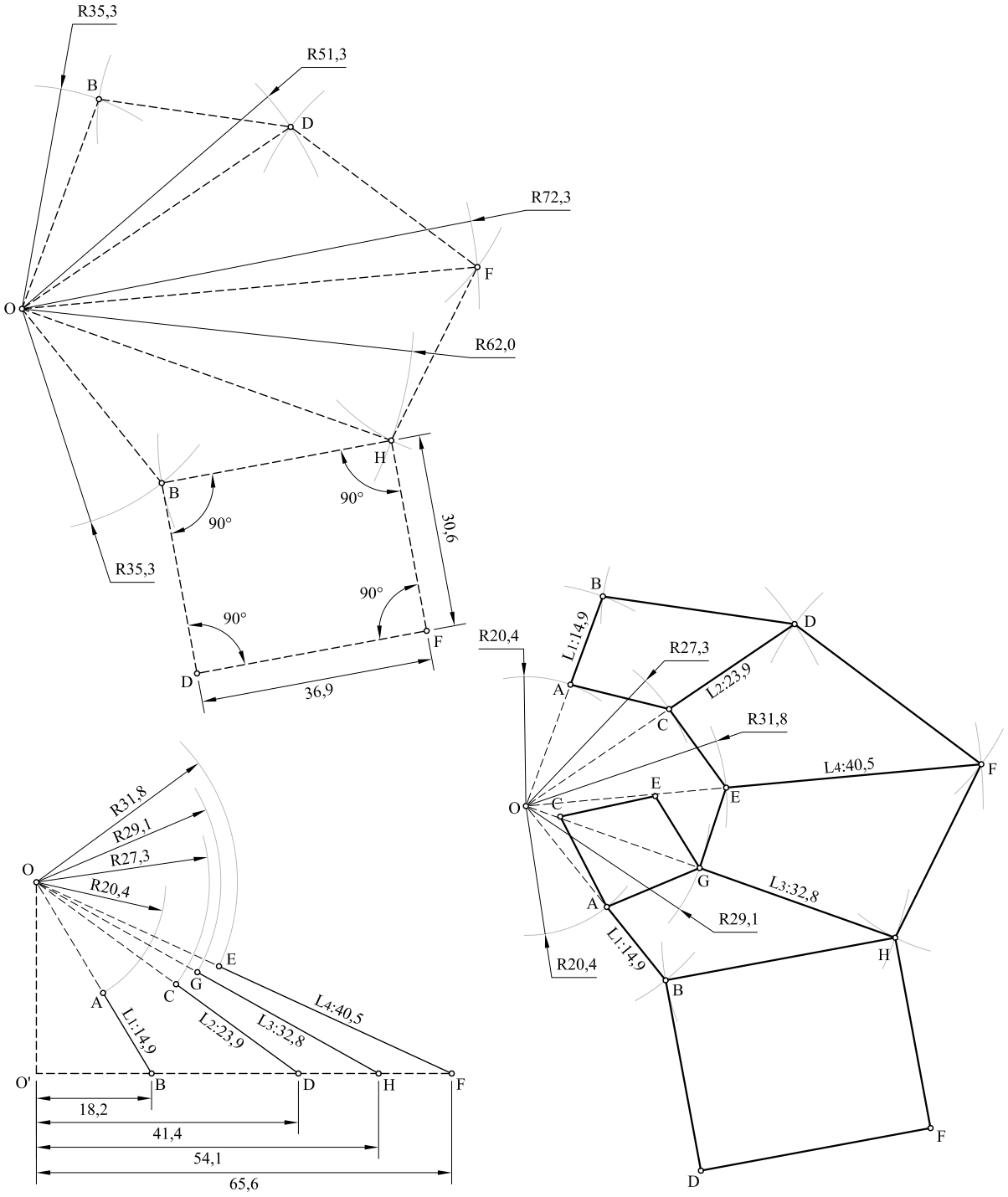
10.3.2 Desarrollo de una pirámide oblicua

Se prolongan las aristas convergentes de la pirámide oblicua hasta que coincidan en un solo vértice O en ambas proyecciones, después se trasladan las proyecciones de las alturas de las mismas aristas, por medio de líneas paralelas a la línea de tierra, con el fin de construir los triángulos rectángulos BO'X, DO'X, HO'X, y FO'X; siendo el cateto vertical común OO', y los catetos horizontales O'B, O'D, O'H, y O'F representan las proyecciones de las aristas OB, OD, OH, y OF en la vista superior; de esta forma las hipotenusas obtenidas constituyen las verdaderas magnitudes de las aristas convergentes; por lo tanto, con la ayuda de un compás de precisión se procede a realizar la triangulación de cada uno de los planos laterales *(véase triangulación del plano OBD)*, *(figura 10.10)*.



Desarrollo de una pirámide oblicua truncada (Método de Pitágoras)
Figura 10.10

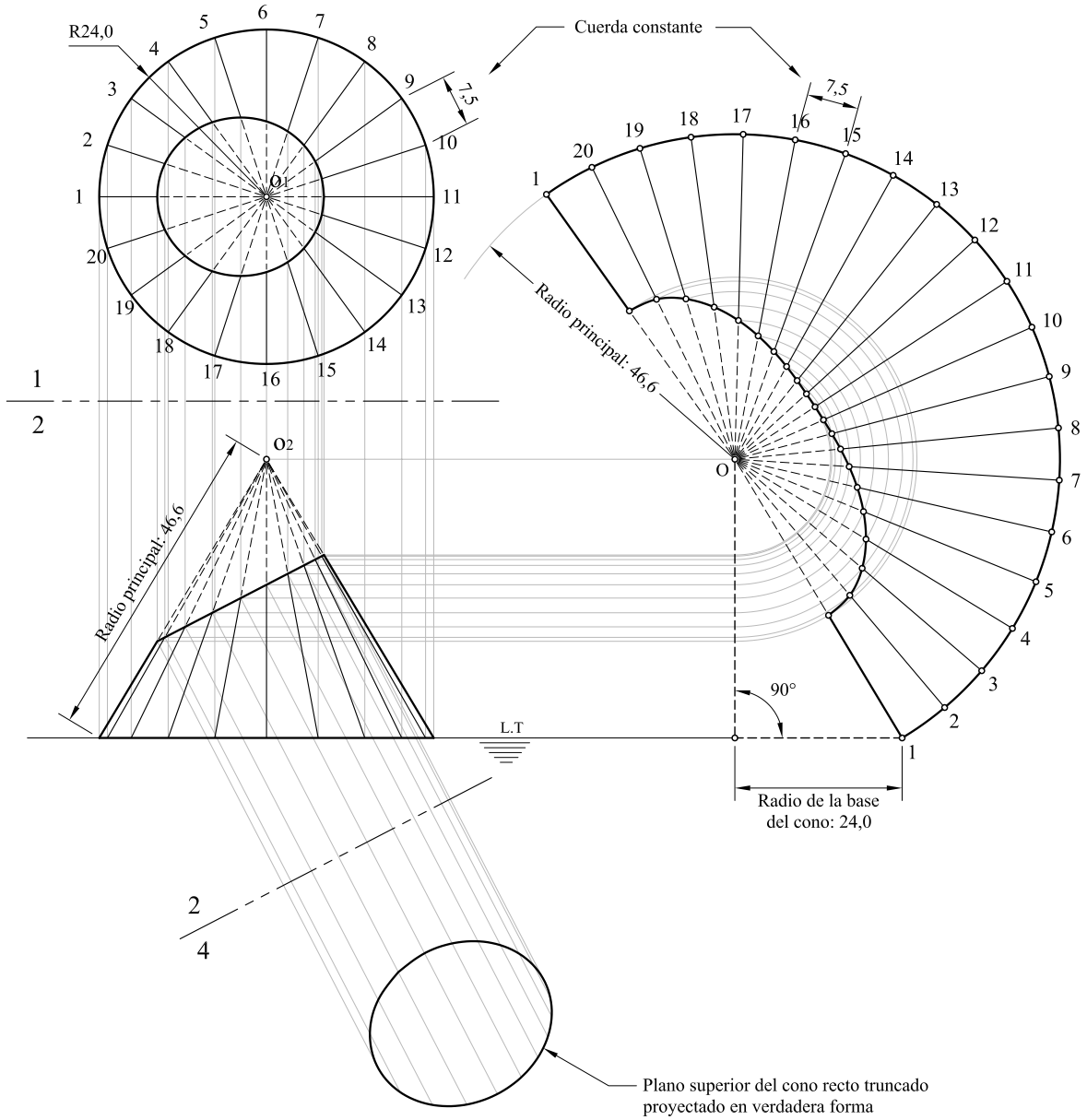
Este proceso de triangulación se repite para los demás planos; teniendo como referencia los radios internos OA, OC, OG, y OE se consigue el desarrollo definitivo de los planos de la pirámide; al final se incorporan los planos superior e inferior en verdadera forma *(figura 10.11).*



Desarrollo de una pirámide oblicua truncada (Triangulación de los planos en verdadera forma)
Figura 10.11

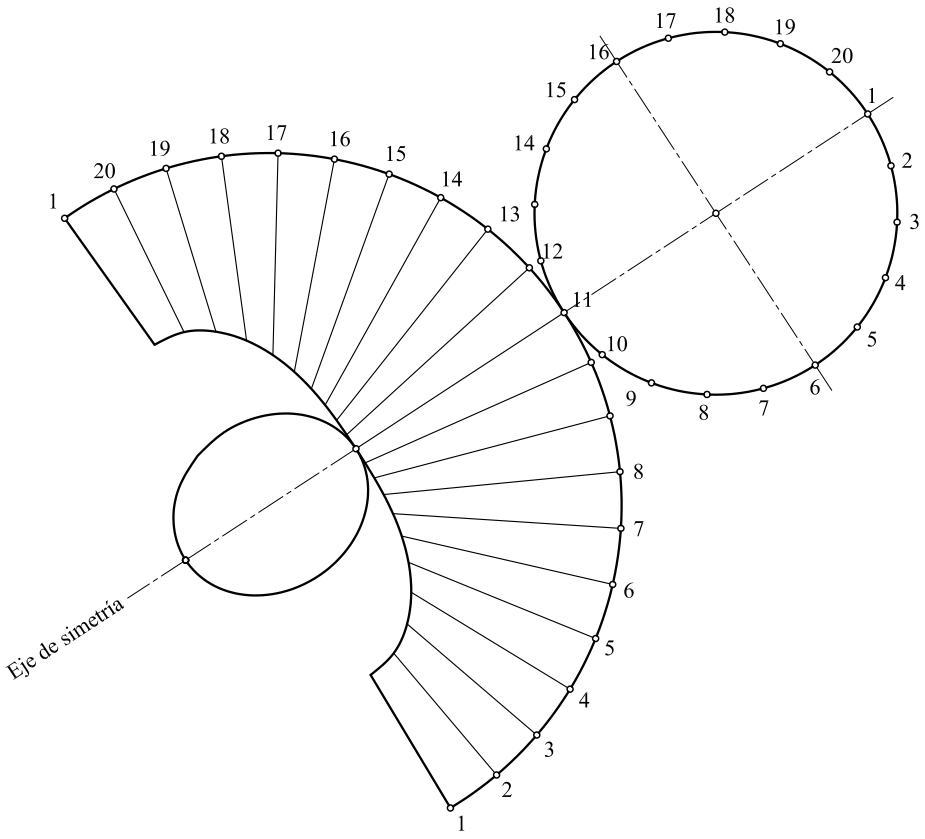
10.3.3 Desarrollo de un cono recto

Todas las generatrices de un cono recto poseen igual longitud, por lo tanto, el problema se reduce en determinar la verdadera magnitud de una sola generatriz, y visualizar la base circular en verdadera forma; pero, si el cono ha sido truncado por un plano secante inclinado, entonces las generatrices varían en su longitud; por este motivo se deben plantear un mínimo de 20 a 36 generatrices equidistantes entre sí, para tener como referencia una longitud de cuerda constante de la base circular en que se desplazan dichas generatrices. El objetivo principal consiste en visualizar la verdadera forma de las generatrices, usando cualquiera de los dos métodos vistos anteriormente *(figura 10.12).*



Desarrollo de un cono recto truncado (Método de Pitágoras)
Figura 10.12

Al final se incorporan los planos superior e inferior del cono recto truncado; para este propósito se debe tener en cuenta un eje de simetría alineado con la generatriz que le corresponde a la mitad del recorrido del perímetro de la base (generatriz O-11); sobre este eje se alinean los ejes longitudinales del círculo y la elipse en verdadera forma, para obtener el desarrollo definitivo del cono truncado *(figura 10.13).*



Desarrollo de un cono recto truncado
Figura 10.13

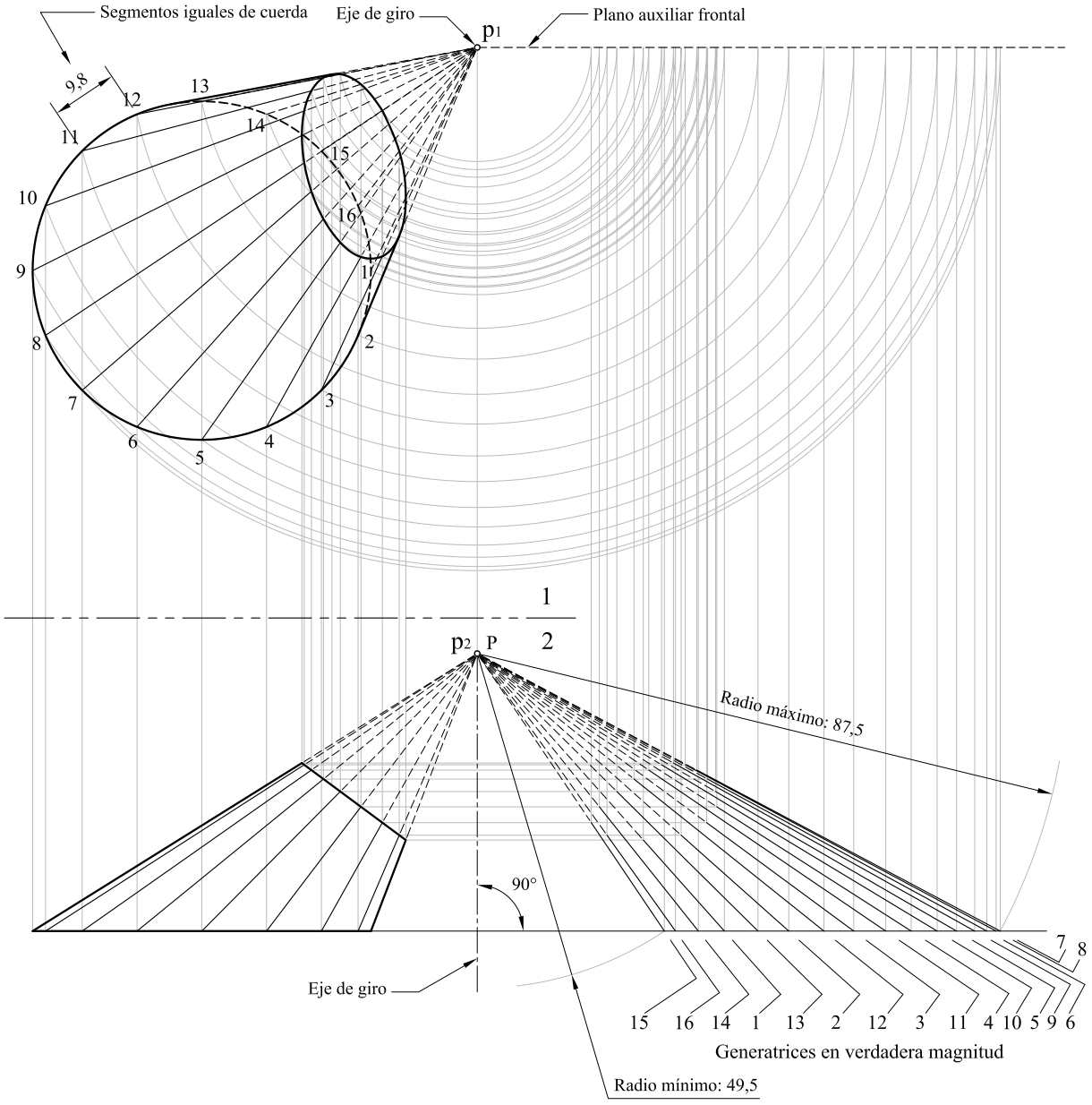
Cabe mencionar que el truncamiento de un cono recto dependerá del ángulo del plano de corte respecto al ángulo de conicidad *(véase numeral 9.1.6, secciones cónicas)*, por lo tanto, las secciones cónicas que presentan en realidad un contorno cerrado consisten en la elipse y el círculo; dicha información servirá para justificar la variación o nó de las longitudes de las rectas generatrices que definen el cono; así como, la verdadera forma del plano superior del cono truncado.

En cambio, la parábola y la hipérbola, se consideran secciones cónicas abiertas que tienden al infinito en sus extremos, y por consiguiente el cono truncado no tendrá un plano superior de contorno cerrado.

Es importante considerar el aspecto de la disposición del desarrollo definitivo de los planos, pues desde el punto de vista del rendimiento de la lámina, y los costos generados por los empalmes de los bordes (remache, costura, o soldadura), la configuración de los planos de desarrollo pueden manipularse con criterios de simetría para conseguir un mejor aprovechamiento de la lámina.

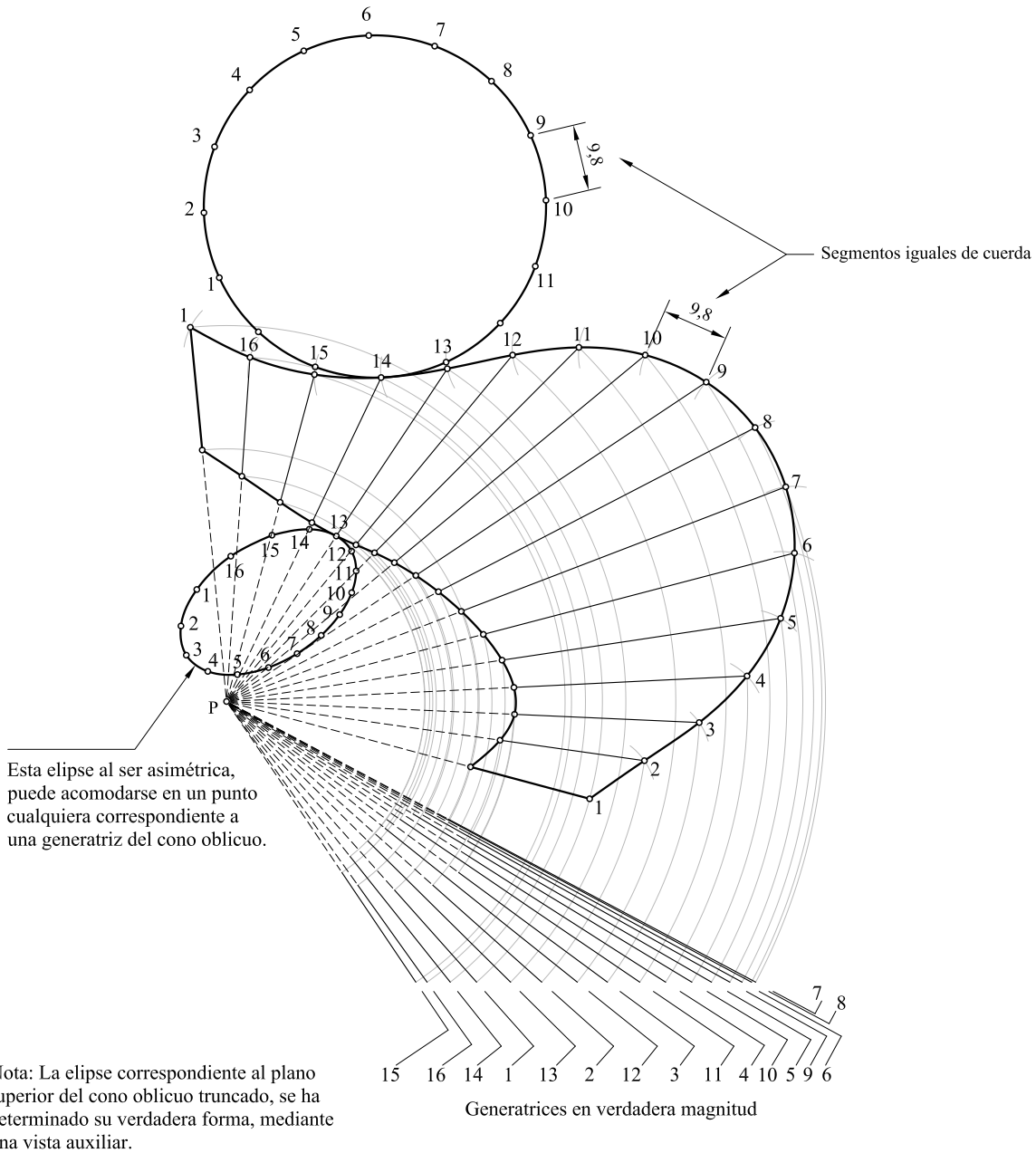
10.3.4 Desarrollo de un cono oblicuo

En primer lugar se subdivide la base de apoyo circular en 16 o más segmentos de cuerdas iguales, donde se ubicarán las generatrices del cono oblicuo; luego, se prolongan dichas generatrices hasta que coincidan en un vértice (punto de pivote P); posteriormente, se plantea un eje de giro vertical que coincida con el punto de pivote en ambas proyecciones. Utilizando el método del giro, se procede a rotar en la vista superior cada una de las generatrices hasta que coincidan con el plano auxiliar frontal que contiene el eje de giro, y en la vista frontal las trayectorias circulares serán perpendiculares al eje de rotación; de esta manera se obtiene la longitud real de las generatrices *(figura 10.14)*.



Desarrollo de un cono oblicuo truncado (Método del giro o revolución)
Figura 10.14

Después de conseguir la verdadera magnitud de todas las generatrices, y teniendo como referencia la longitud constante de cuerda en que se ha subdividido la circunferencia de apoyo (cuerda = 9,8), se procede a triangular cada uno de los sectores comprendidos entre dos generatrices consecutivas y el punto de pivote P (por ejemplo, triángulos 1-2-P, 2-3-P, 3-4-P, etc.), hasta completar los 16 sectores; los arcos internos determinarán los puntos de contacto con el plano de truncamiento (elipse asimétrica); este proceso de desarrollo se organiza a un lado de las vistas principales, anexando los planos inferior y superior del cono oblicuo truncado en verdadera forma *(figura 10.15).*

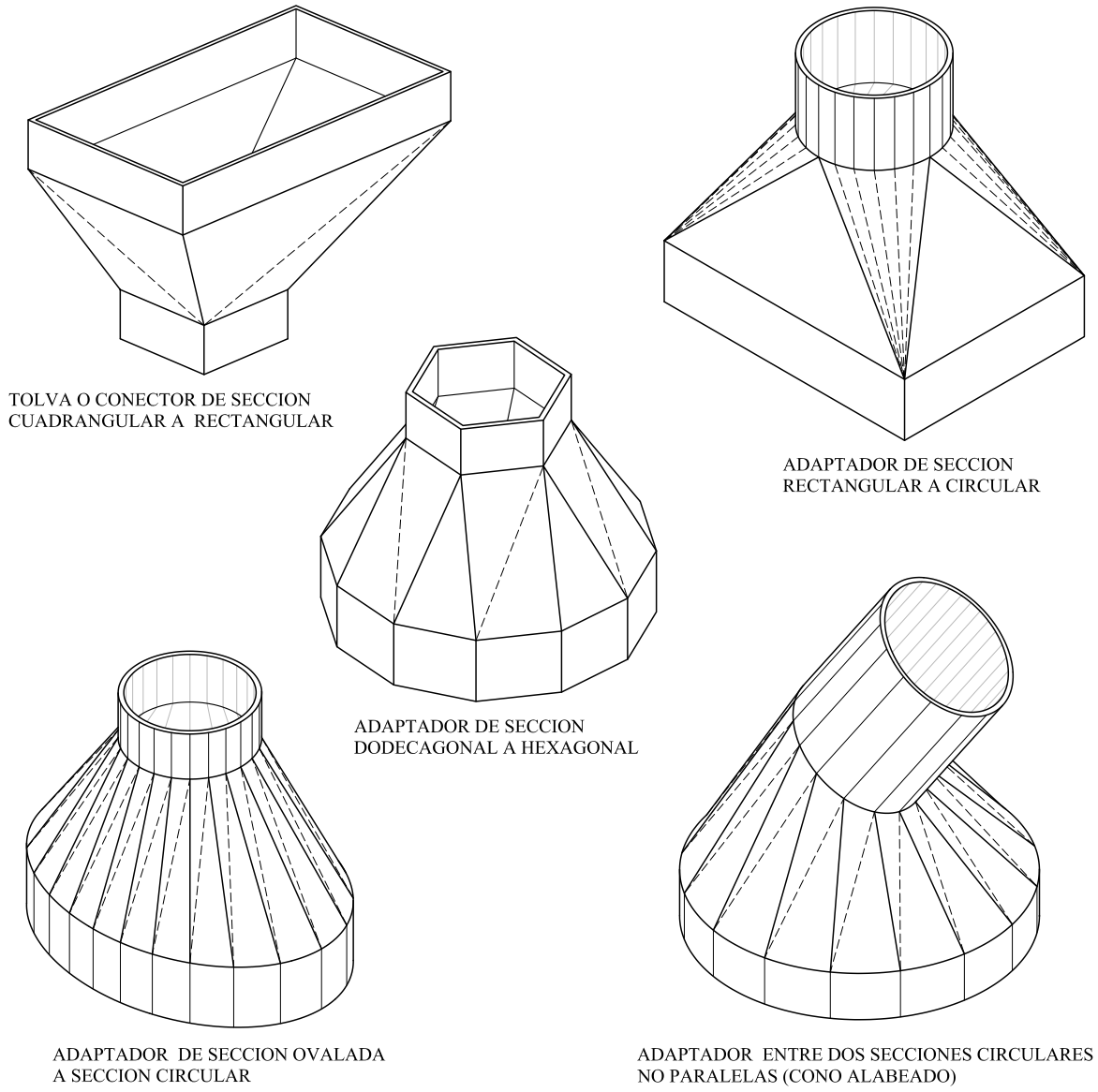


Triangulación y desarrollo de un cono oblicuo truncado
Figura 10.15

10.4 Desarrollo por triangulación

Este tipo de desarrollo se fundamenta principalmente en dividir cada una de las caras cuadriláteras que conforman un sólido mediante una línea diagonal para obtener dos triángulos; de esta manera, el problema se reduce en determinar la verdadera magnitud de los lados de dichos triángulos (método del giro y/o Pitágoras); además, es conveniente una adecuada lectura espacial de todos los componentes geométricos de la superficie o el sólido (rectas y planos) en las proyecciones dadas, para visualizar y confirmar su verdadera magnitud cuando se presenta en alguna de las vistas.

El desarrollo por triangulación se aplica a las tolvas, los adaptadores de sección, el cono alabeado, y en general toda superficie que pueda subdividirse en triángulos *(figura 10.16)*.

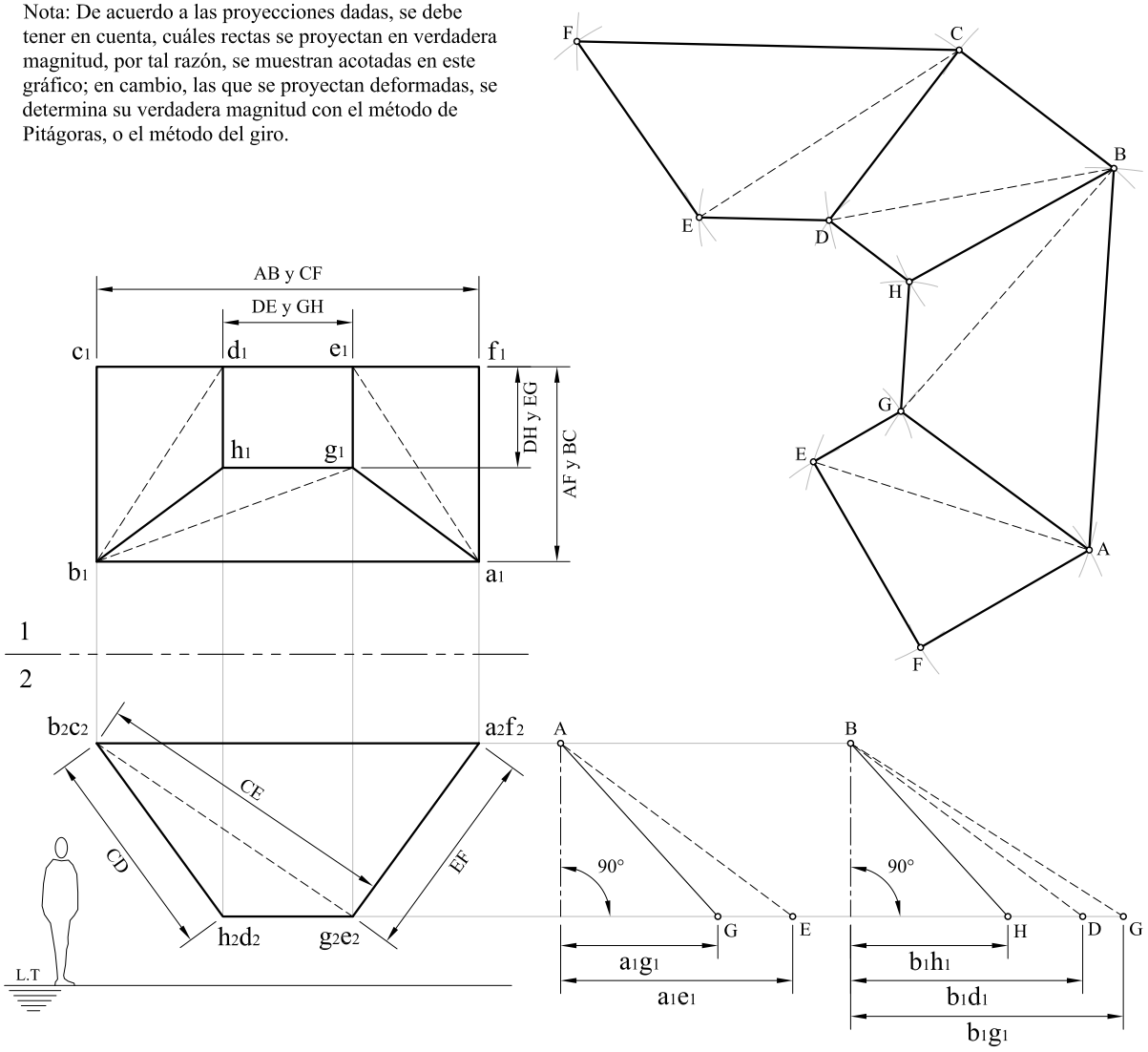


Ejemplos de superficies y sólidos para desarrollar por triangulación
Figura 10.16

10.4.1 Desarrollo de una tolva

Una tolva, aunque se parezca a un tronco de pirámide invertida en realidad no se puede desarrollar radialmente, esto se debe a que al prolongar sus aristas inclinadas no convergen en un vértice; por lo tanto, cada una de las caras que conforman la tolva, debe dividirse en dos triángulos; por conveniencia, la diagonal que las divide se dibuja con una línea de trazo oculto.

Para determinar la verdadera magnitud de las aristas y las diagonales, es necesario analizar las diversas posiciones en que se encuentran; esto se hace con el fin de discriminar las rectas que en realidad proyectan su longitud real en alguna de las vistas, y por consiguiente, se aplica el método de Pitágoras o el método del giro cuando realmente se requiera precisar su verdadera magnitud. Al final, se realiza la triangulación con un compás de precisión de cada triángulo obtenido *(figura 10.17).*

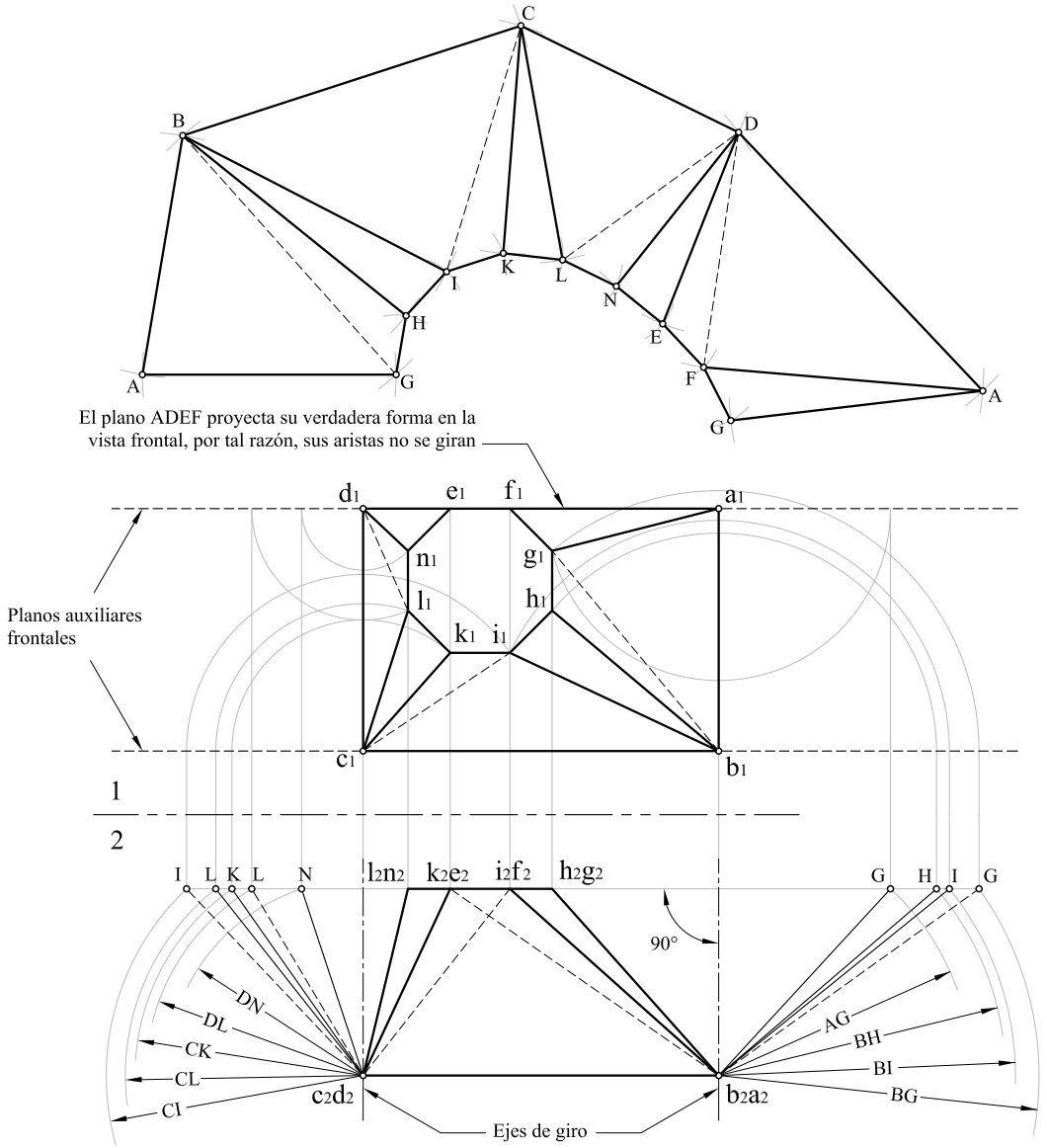


Desarrollo de una tolva (método de Pitágoras)
Figura 10.17

10.4.2 Desarrollo de un adaptador de sección rectangular a sección octogonal

Se procede a triangular los planos de los cuadriláteros que conforman el adaptador por medio de una línea diagonal; si se utiliza el método del giro o revolución, bastará identificar los vértices a_1, b_1, c_1 y d_1 como los puntos donde se ubica un eje de giro vertical en cada uno, esto se debe a que las aristas inclinadas del adaptador parten desde dichos vértices; además se plantean los dos planos auxiliares frontales que contienen a_1c_1 y b_1c_1 respectivamente.

Se realiza el proceso del giro de las aristas inclinadas que no proyectan su longitud real en ambas vistas, de tal forma que sus trayectorias sean perpendiculares a los ejes de giro; luego, se comienza a triangular cada uno de los planos hasta obtener el desarrollo del adaptador *(figura 10.18).*

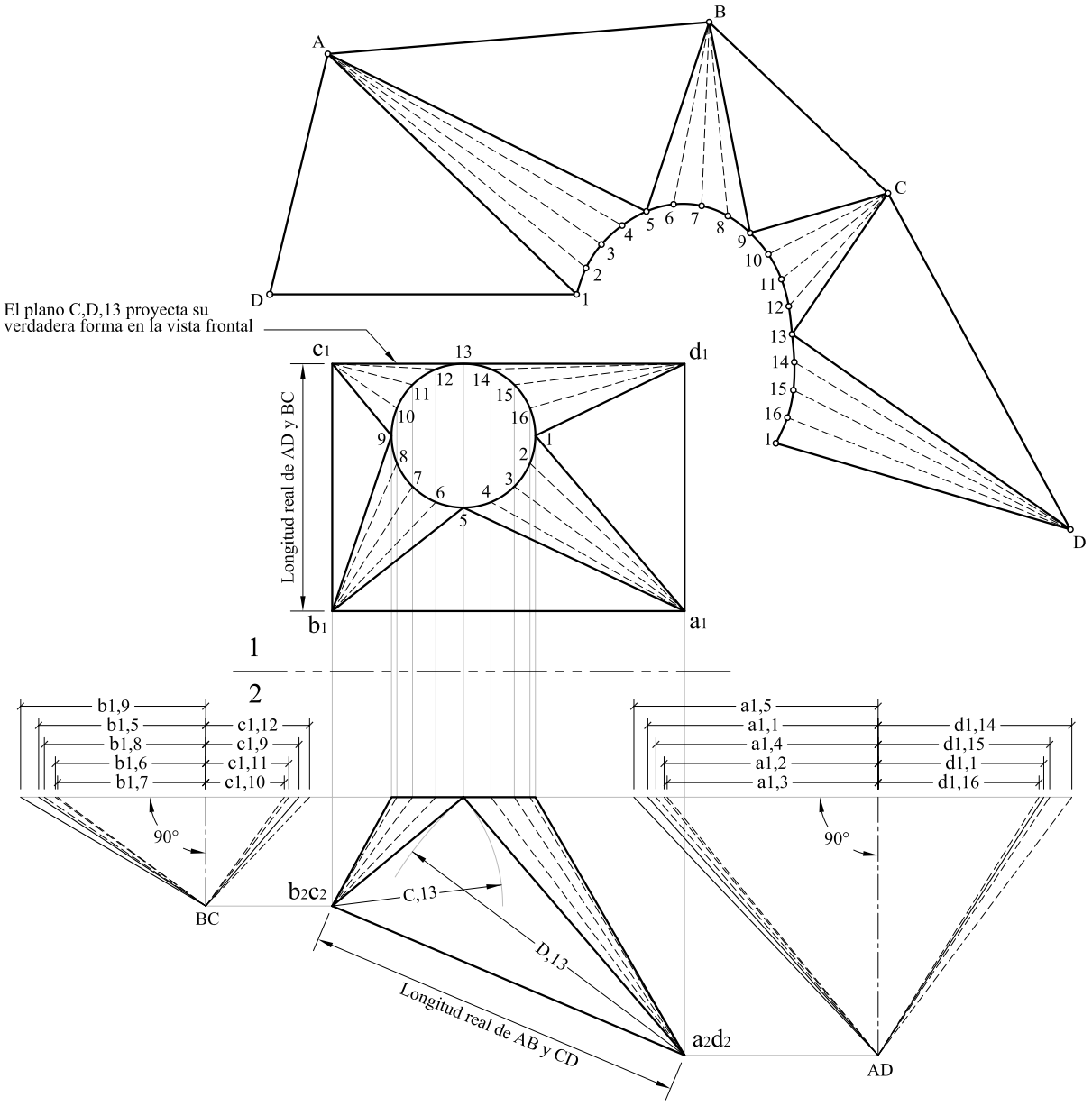


Desarrollo de un adaptador de sección rectangular a sección octogonal (método del giro)
Figura 10.18

10.4.3 Desarrollo de un adaptador de sección rectangular a sección circular

Cada esquina del rectángulo se une con un sector cuadrante de la circunferencia mediante una porción de cono, a las cuales se les dibujan rectas generatrices conservando una longitud de cuerda constante; el adaptador se completa con la definición de los planos triangulares CD13, AD1, AB5, y BC9.

Con el método de Pitágoras se procede a construir los triángulos rectángulos, tomando como referencia las proyecciones horizontales, y las proyecciones de cota de todas las rectas que conforman el objeto; al final, se realiza el proceso de triangulación con un compás de precisión, para cada uno de los planos obtenidos; de esta manera, se obtiene el desarrollo completo del adaptador *(figura 10.19)*.

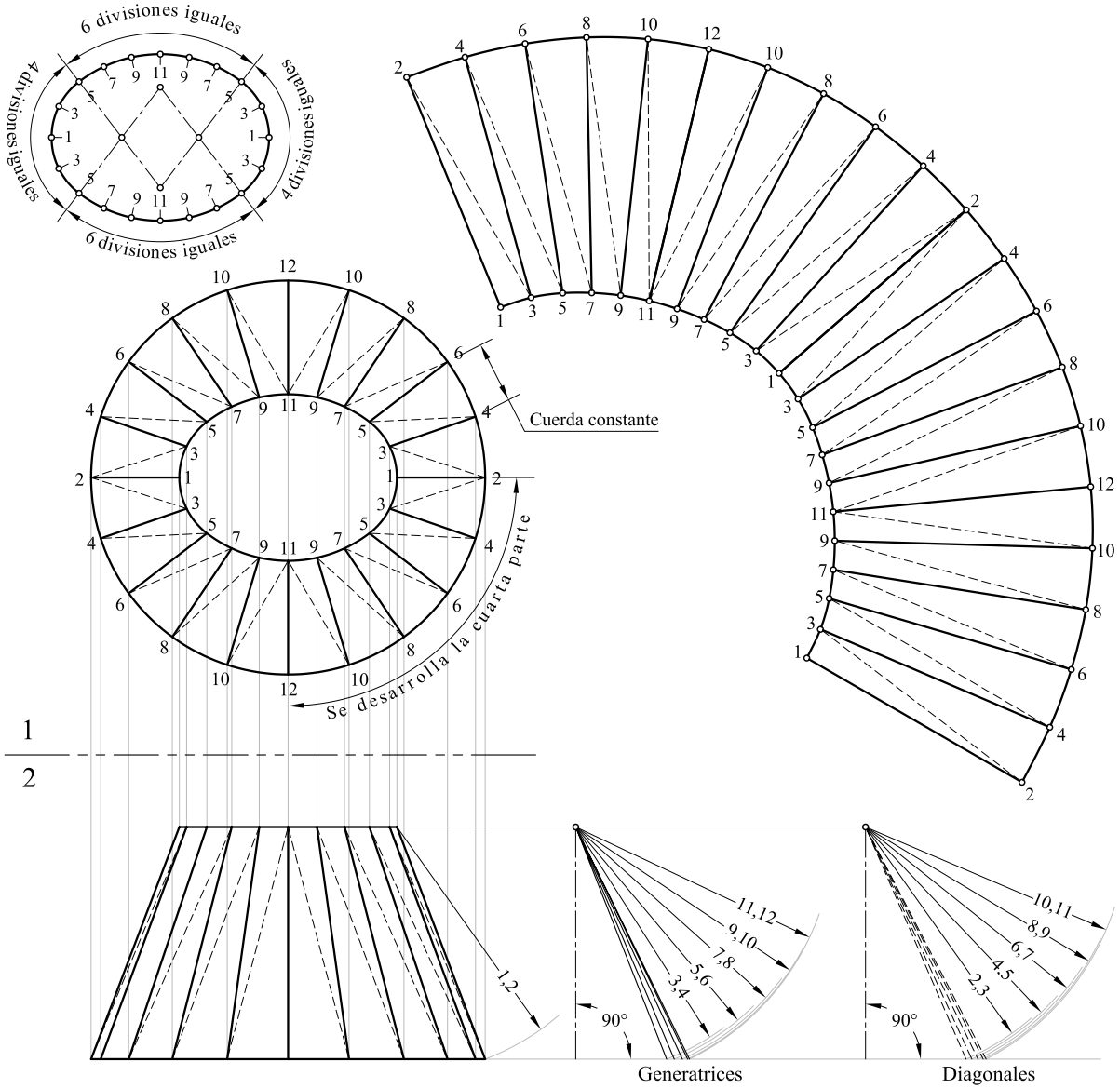


Desarrollo de un adaptador de sección rectangular a sección circular (método de Pitágoras)
Figura 10.19

10.4.4 Desarrollo de un adaptador de sección circular a sección elíptica

Si las secciones dadas son paralelas entre sí, simplemente se subdivide la elipse en cuerdas constantes de acuerdo a los arcos de circunferencia tangenciales que la definen (12 cuerdas iguales para los arcos mayores, y 8 cuerdas iguales para los arcos menores), y el círculo se subdivide en 20 cuerdas iguales; luego se conectan ambas secciones por los vértices con líneas generatrices; de esta manera, se procede a triangular todos los cuadriláteros que definen la superficie adaptadora.

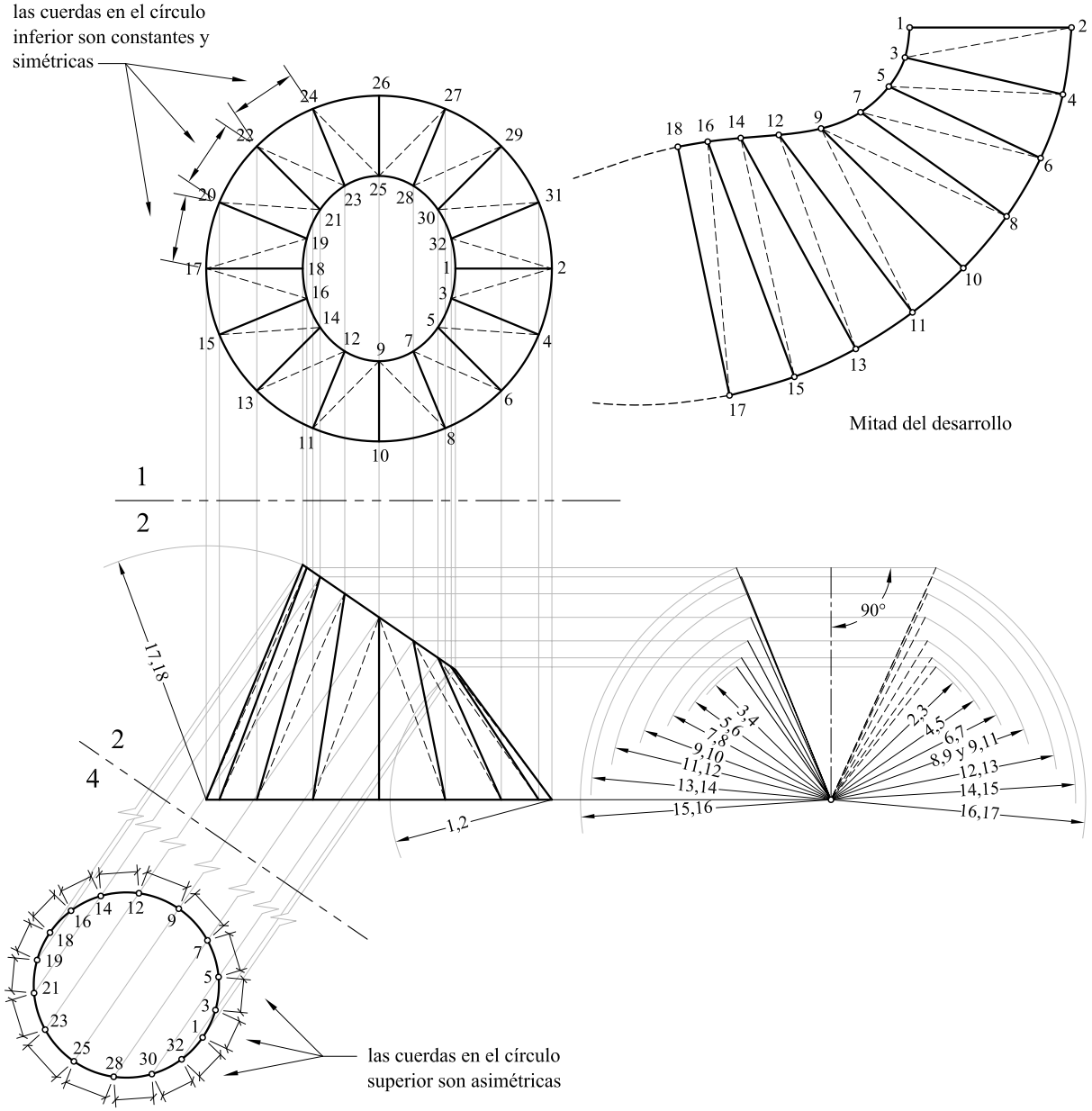
El método de Pitágoras es muy útil para determinar la longitud real de todos los lados de los triángulos; en este caso, por tratarse de dos secciones alineadas en forma simétrica, se definen las longitudes reales de la cuarta parte de la pieza adaptadora *(figura 10.20).*



Desarrollo de un adaptador de sección circular a sección elíptica (método de Pitágoras)
Figura 10.20

10.4.5 Desarrollo de un cono alabeado

El cono alabeado es una superficie generada por el desplazamiento de una recta generatriz entre dos secciones circulares o elípticas no paralelas entre sí; por lo tanto, el proceso de subdivisión se lleva a cabo en el círculo de la base mediante planos cortantes verticales radialmente espaciados entre sí, dividiendo la base en cuerdas iguales, dichos planos cortantes determinarán los vértices en el círculo superior proyectado como elipse en la vista superior; por este motivo, las cuerdas resultantes en el círculo superior son asimétricas. Al igual que en los anteriores casos, se triangulan los cuadriláteros, y se determina la longitud real de los lados que conforman los triángulos *(figura 10.21).*

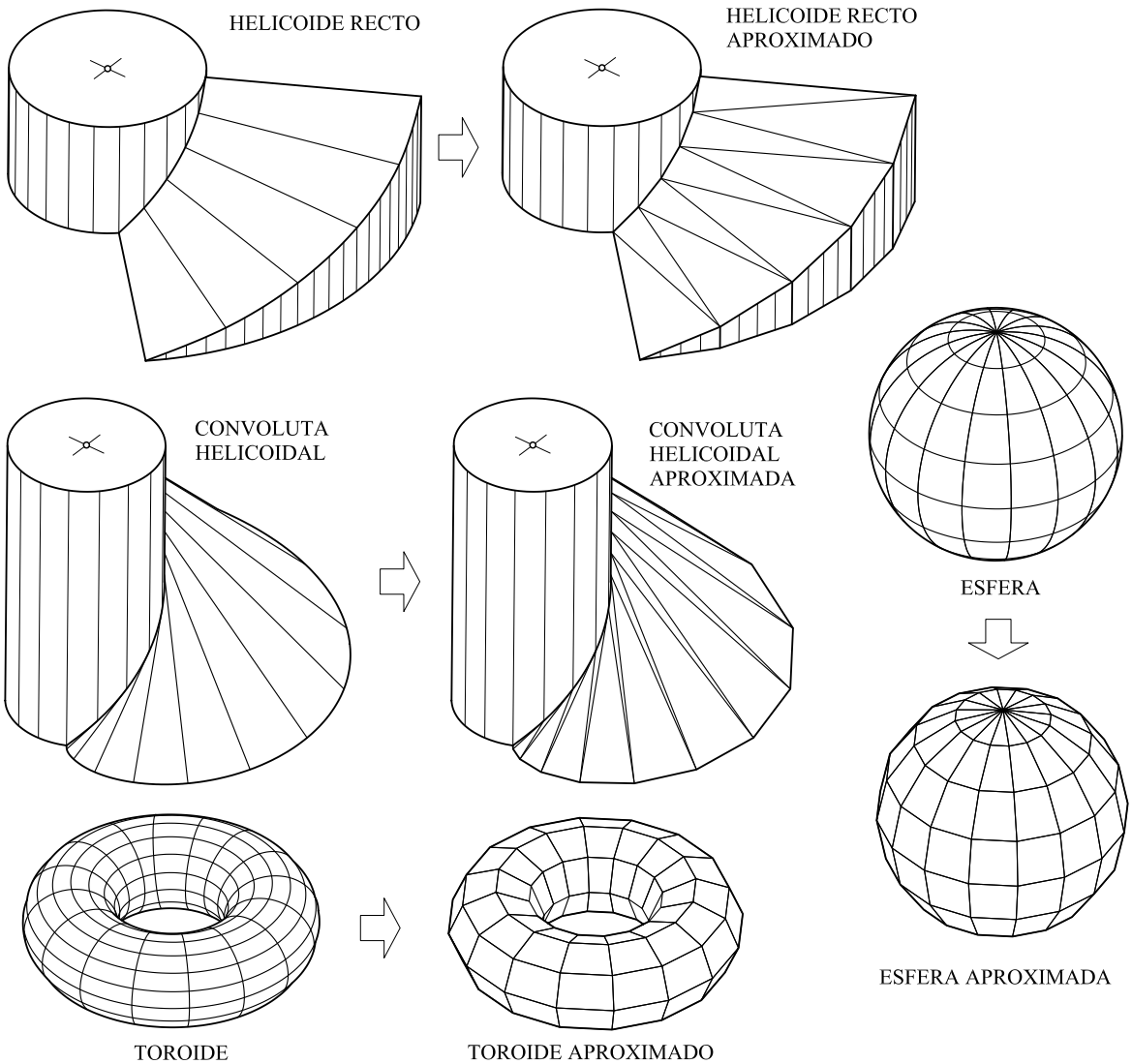


Desarrollo de un cono alabeado (método de Pitágoras)
Figura 10.21

10.5 Desarrollo aproximado

Este tipo de desarrollo se fundamenta en la abstracción y descomposición de superficies con geometría compleja, para poder desarrollarlas en forma aproximada mediante la utilización de uno o más tipos de desarrollos descritos anteriormente; teóricamente las superficies alabeadas y las superficies de doble curvatura no son desarrollables, pero, es posible conseguir un desarrollo similar a la realidad, si se descompone y analiza por sectores, para utilizar el(los) tipo(s) de desarrollo que más convenga(n).

En la mayoría de programas CAD, cuando se recurre al modelado tridimensional de objetos que posean superficies de simple o doble curvatura, regladas, y/o alabeadas, suelen utilizarse herramientas para visualizar el sombreado de dichas superficies en forma alámbrica, suavizada, o faceteada; siendo esta última opción la más apropiada para explicar el concepto de un desarrollo aproximado *(figura 10.22)*.

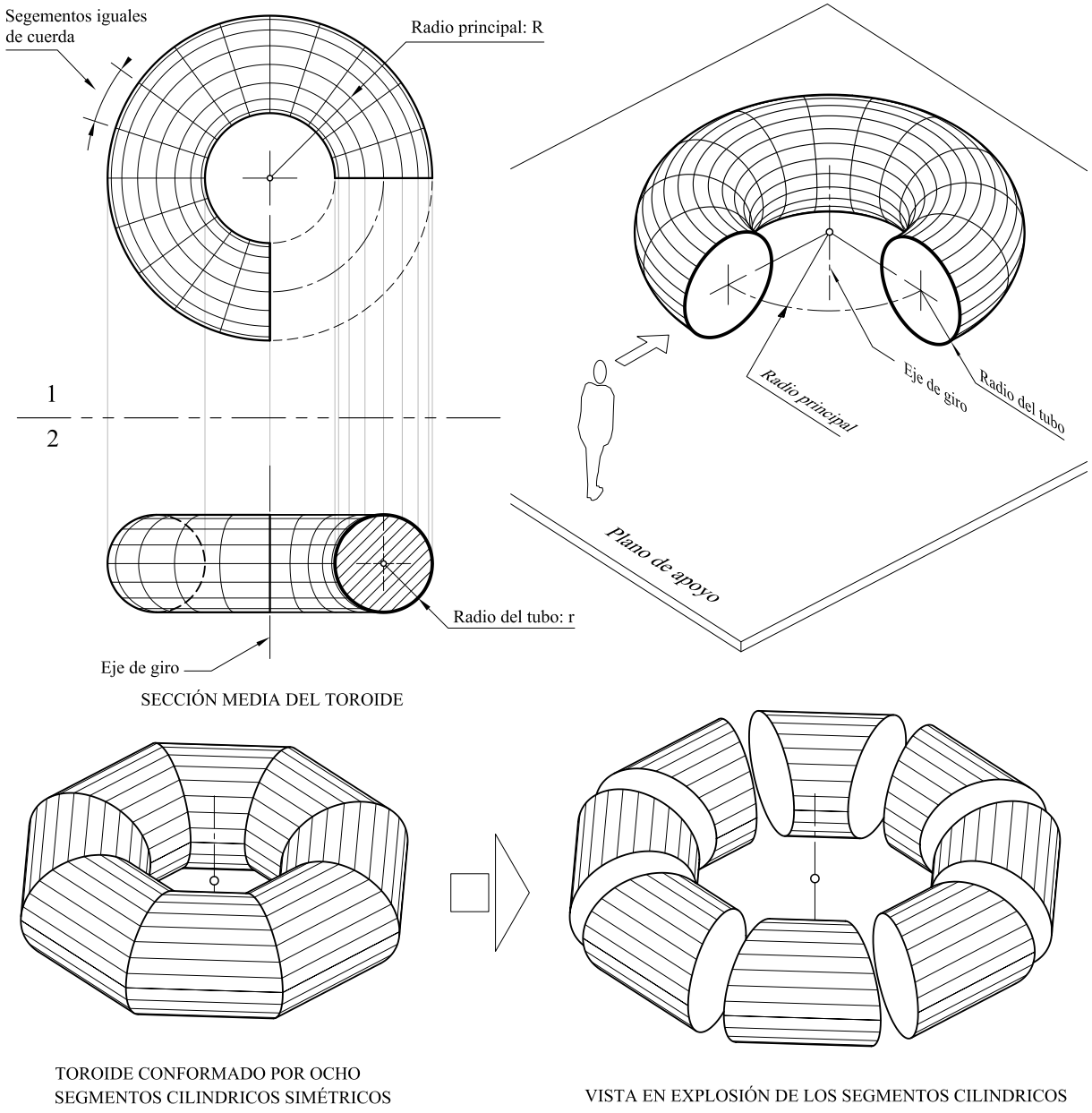


Ejemplos de superficies para desarrollar en forma aproximada
Figura 10.22

10.5.1 Desarrollo de un toroide

El toroide, también conocido como “dona”, es una superficie de doble curvatura, que se determina por la rotación de un círculo alrededor de un eje vertical, a una distancia denominada radio principal (R), y el círculo que genera la superficie deberá poseer un radio menor al principal (radio del tubo: r); cuando el toroide es seccionado por un plano secante horizontal, se determinan dos círculos concéntricos.

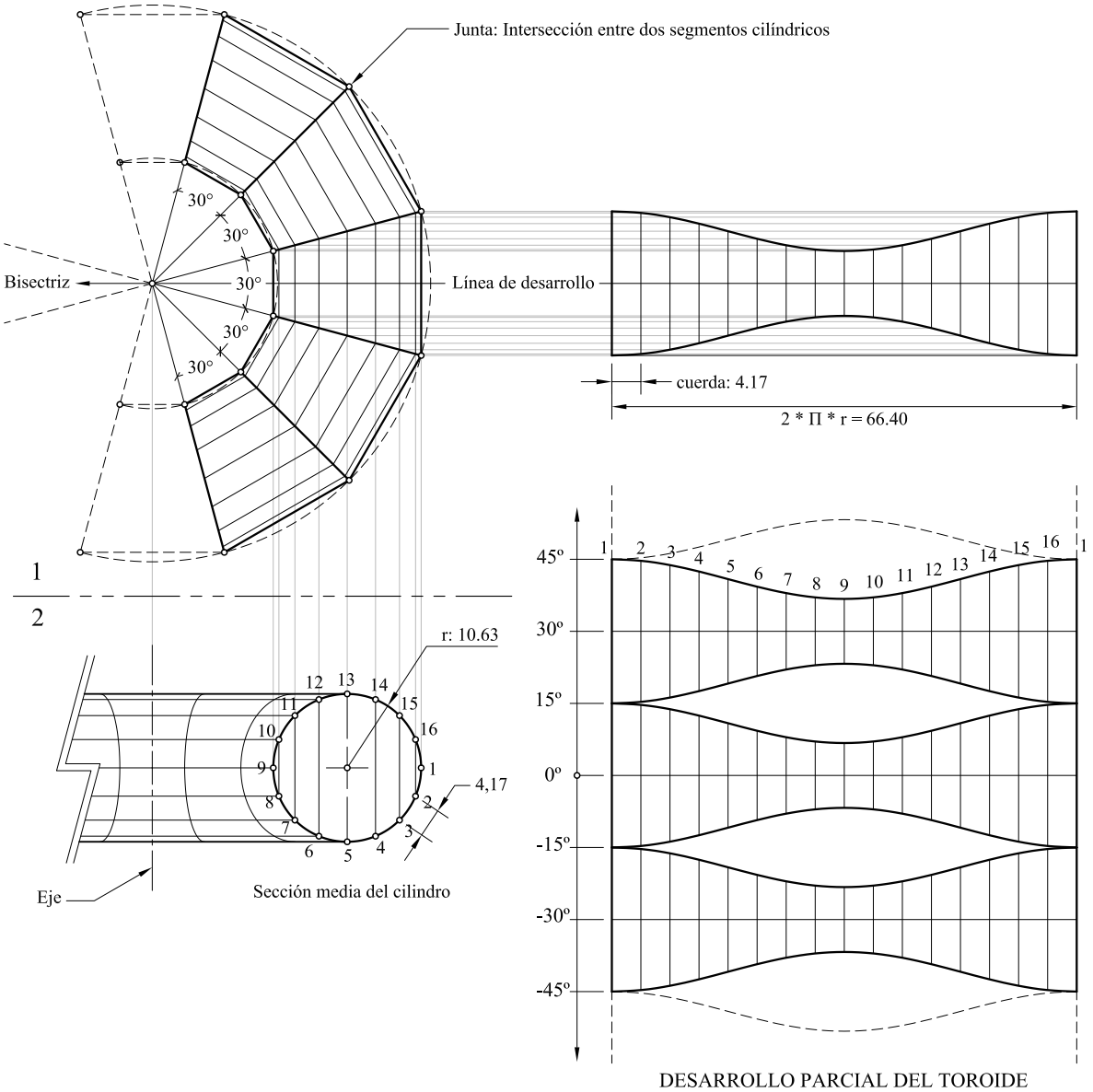
Para conseguir el desarrollo de un toroide, es necesario aproximar la forma del tubo como si estuviera constituido por segmentos cilíndricos simétricos alrededor del mismo eje *(figura 10.23).*



Determinación de un toroide
Figura 10.23

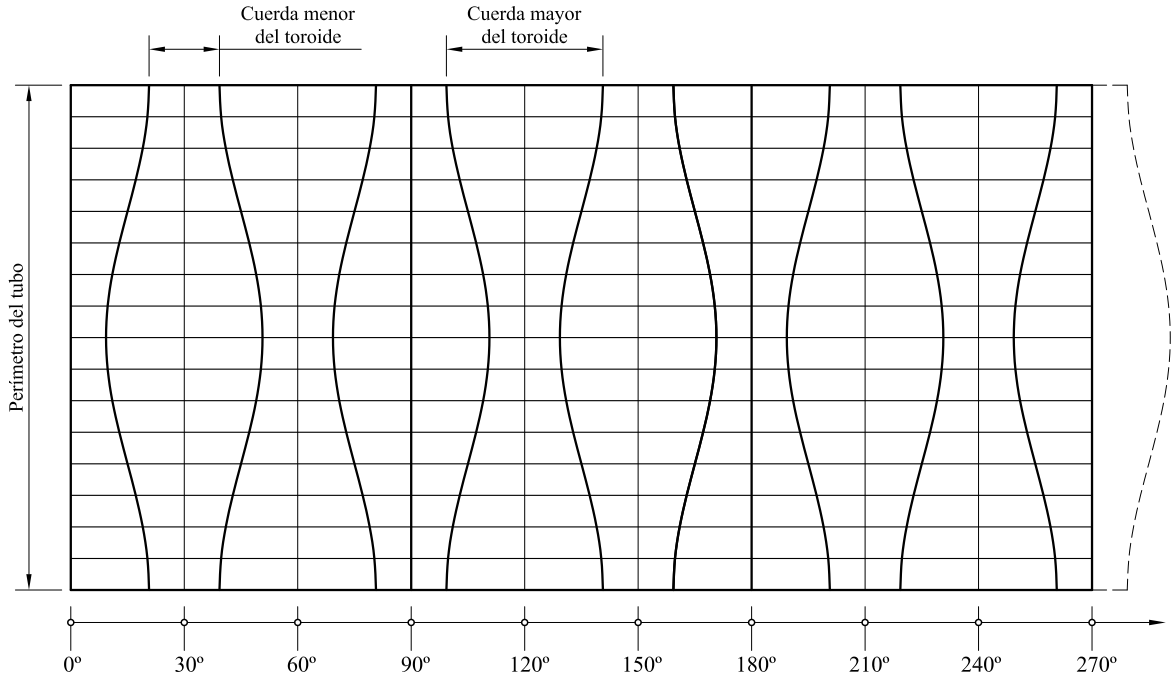
El problema se reduce en aplicar el método paralelo para un solo segmento cilíndrico, esto se debe a la configuración simétrica de los cilindros alrededor del eje vertical; las intersecciones de dichos cilindros se denominan “juntas”, y la precisión del desarrollo del toroide dependerá del número de segmentos en que se haya subdividido, así como del número de generatrices planteadas en el cilindro.

Supóngase un toroide dividido en 12 segmentos cilíndricos iguales; en este caso, 2 juntas consecutivas formarán un ángulo diedro de 30º, pero por conveniencia, la bisectriz de dicho ángulo se alinea con el cuadrante 0º de la circunferencia, para que las generatrices del cilindro proyecten la sección media en la vista frontal, y a su vez, dicha bisectriz representará la línea de desarrollo *(figura 10.24).*



Desarrollo aproximado de un toroide con 12 segmentos cilíndricos
Figura 10.24

Sin embargo, el desarrollo obtenido no se acomoda como es realmente, ya que se desperdiciaría mucha lámina al cortarla; por esta razón, los módulos simétricos deben ajustarse de tal manera que ofrezcan el mejor rendimiento para la lámina, como si se tratase de un entramado *(figura 10.25).*



Entramado óptimo de los módulos del toroide de la figura 10.24
Figura 10.25

El margen de error que se puede presentar en el desarrollo aproximado de un toroide, se puede apreciar en la siguiente tabla *(figura 10.26).*

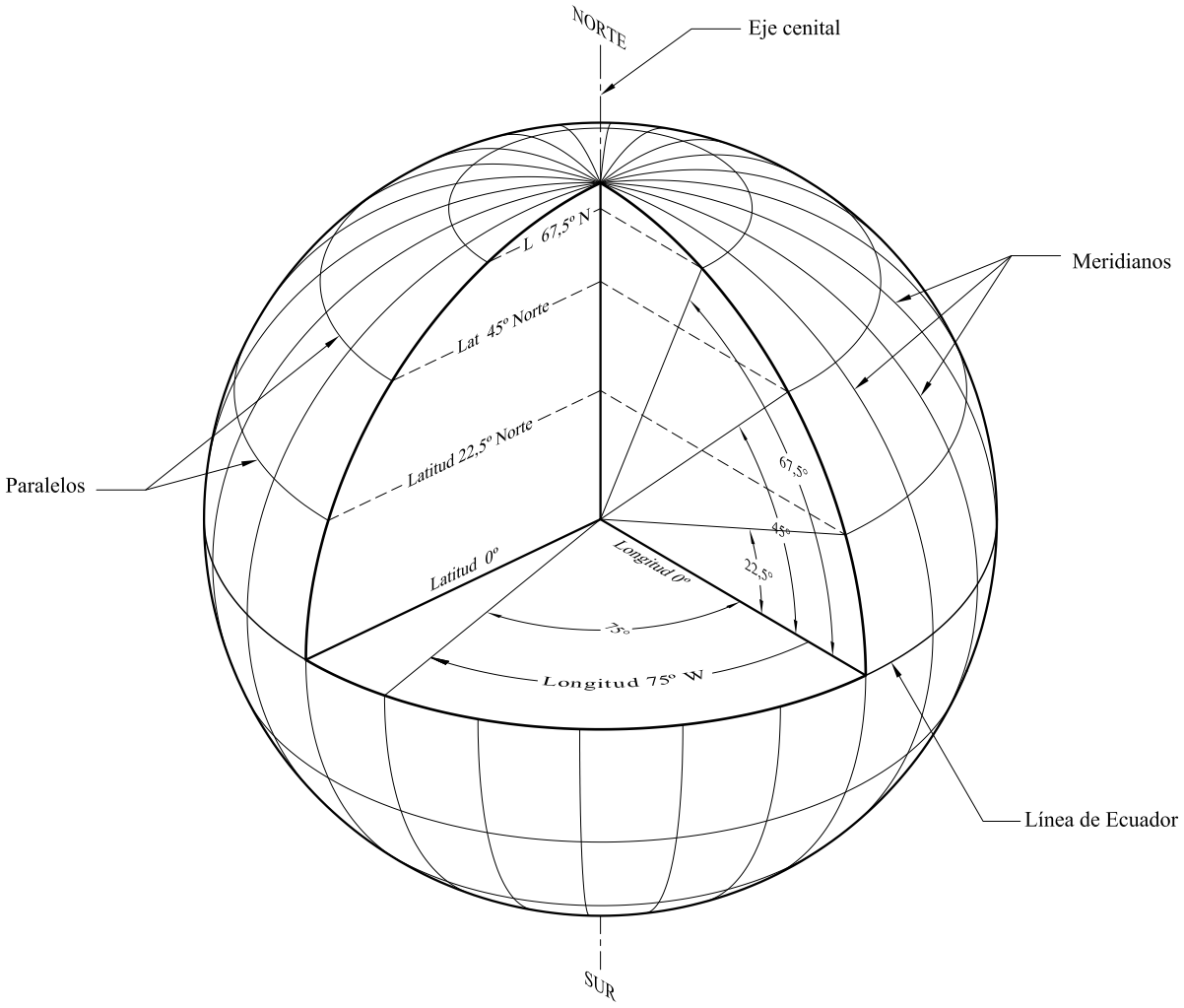
Nº DE SEGMENTOS CILINDRICOS	ANGULO DIEDRO ENTRE JUNTAS		MARGEN DE ERROR
	Ángulo completo	Ángulo de bisectriz	
12	30º	15º	6,7 %
16	22.5º	11,25º	3,8 %
24	15º	7,5º	1,5 %
32	11.25º	5,625º	0,9 %
36	10º	5º	0,7 %
40	9º	4,5º	0,6 %

Márgenes de error que se presentan en el desarrollo de un toroide
Figura 10.26

10.5.2 Desarrollo de una esfera

La esfera es una superficie de doble curvatura, la cual se genera por la rotación de un círculo sobre su propio eje; generalmente el eje apunta hacia el cenit, es decir, en la misma dirección del eje Z positivo de un sistema cartesiano (eje cenital).

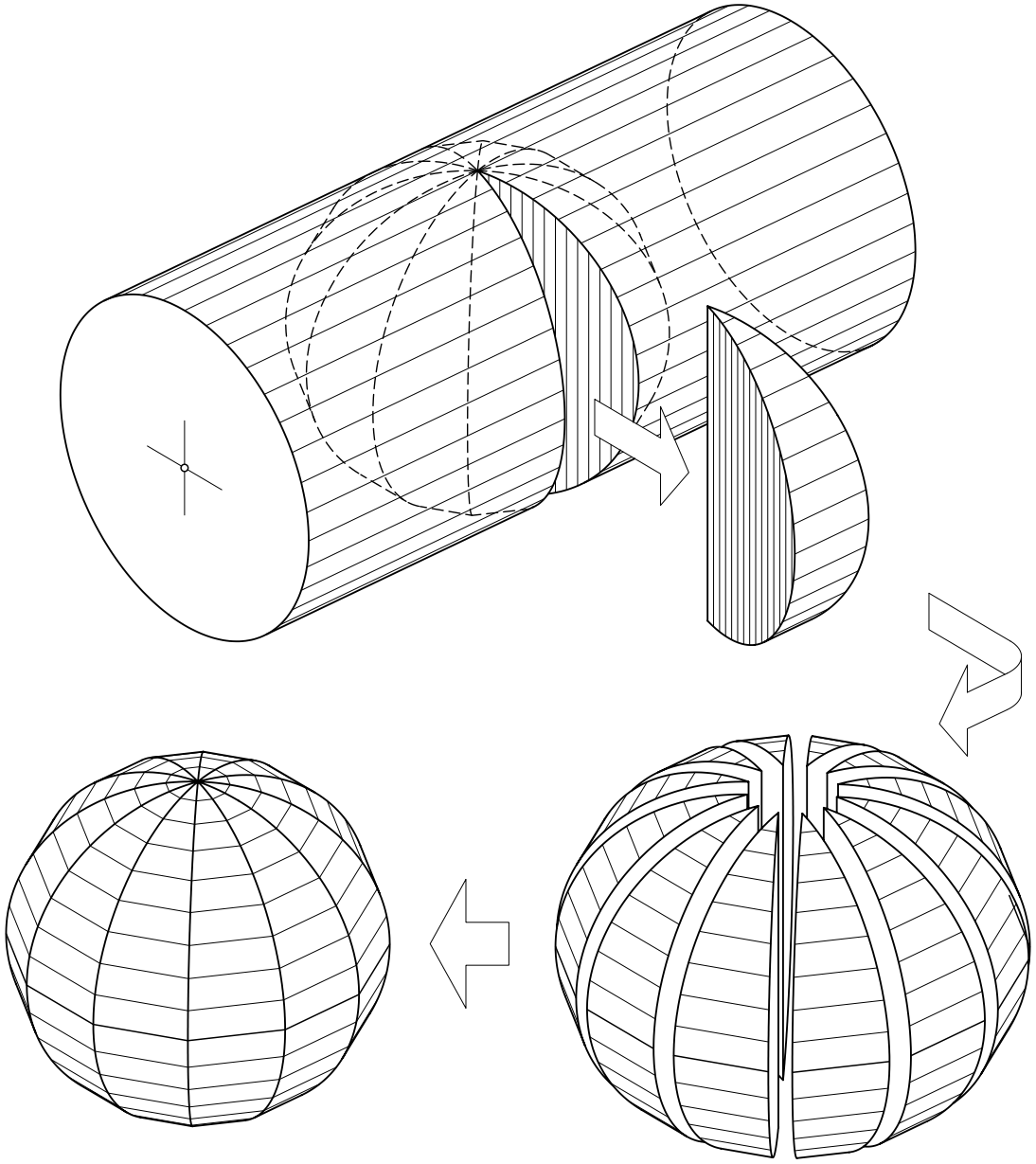
Para representar una esfera y permitir la localización de un punto sobre la misma, es necesario definir unas secciones circulares, las cuales son determinadas por la intersección de planos secantes verticales y horizontales; los planos verticales pasan por el eje de la esfera y se disponen en forma simétrica para definir los meridianos; y los planos horizontales son perpendiculares al eje de la esfera, los cuales definen los paralelos; cuando el plano pasa por el medio del eje, la esfera queda dividida por una línea denominada “línea de Ecuador”, la cual divide a la misma en dos hemisferios iguales; los demás planos horizontales se ubican sobre una distancia angular medido desde la línea de Ecuador, hasta llegar a un ángulo de 90º correspondiente a los polos de la esfera; de esta manera, se define un sistema de coordenadas geográficas, que sirve para localizar un punto sobre la esfera si se conocen la longitud y la latitud del mismo *(figura 10.27).*



Representación de una esfera
Figura 10.27

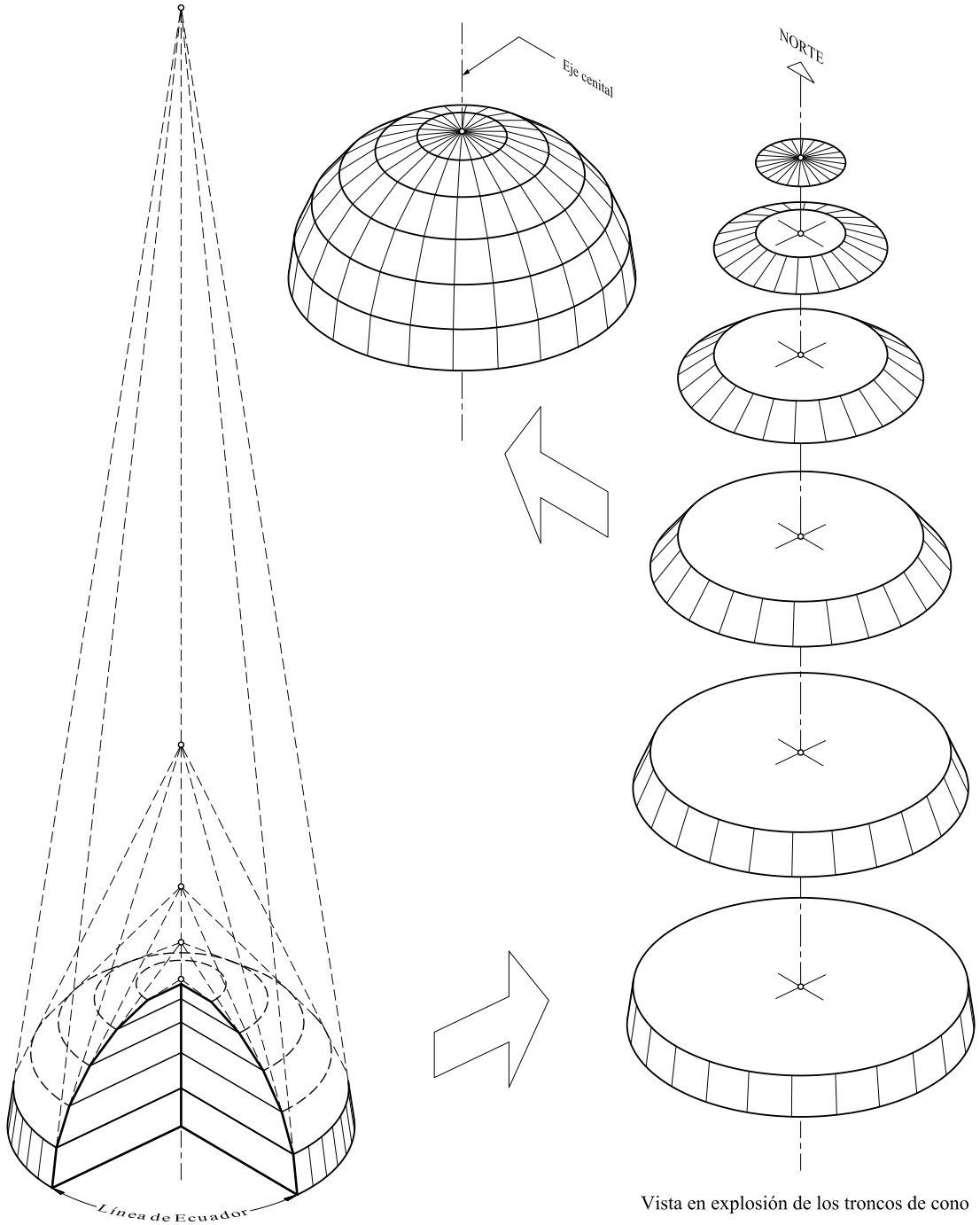
Para determinar el desarrollo de una esfera se puede utilizar cualquiera de los tres métodos descritos a continuación:

a) Método de los husos: En este caso, la esfera está conformada por sectores cilíndricos, siendo cada sector comprendido entre dos meridianos consecutivos de polo a polo, dicha zona se denomina “huso”; es importante tener en cuenta el número de husos repartidos simétricamente a lo largo de la línea del Ecuador *(figura 10.28).*



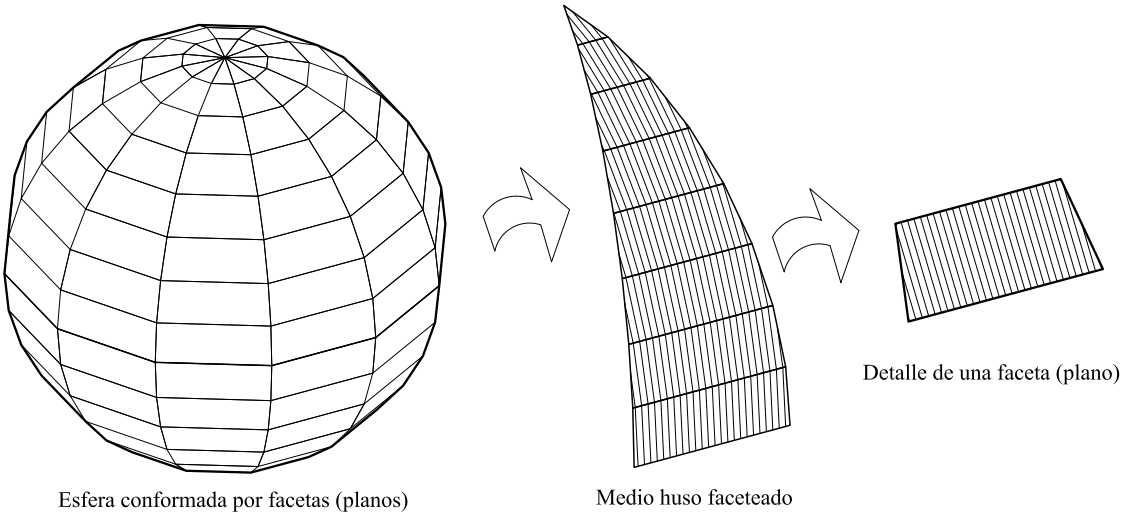
Aproximación de una esfera (Método de los husos)
Figura 10.28

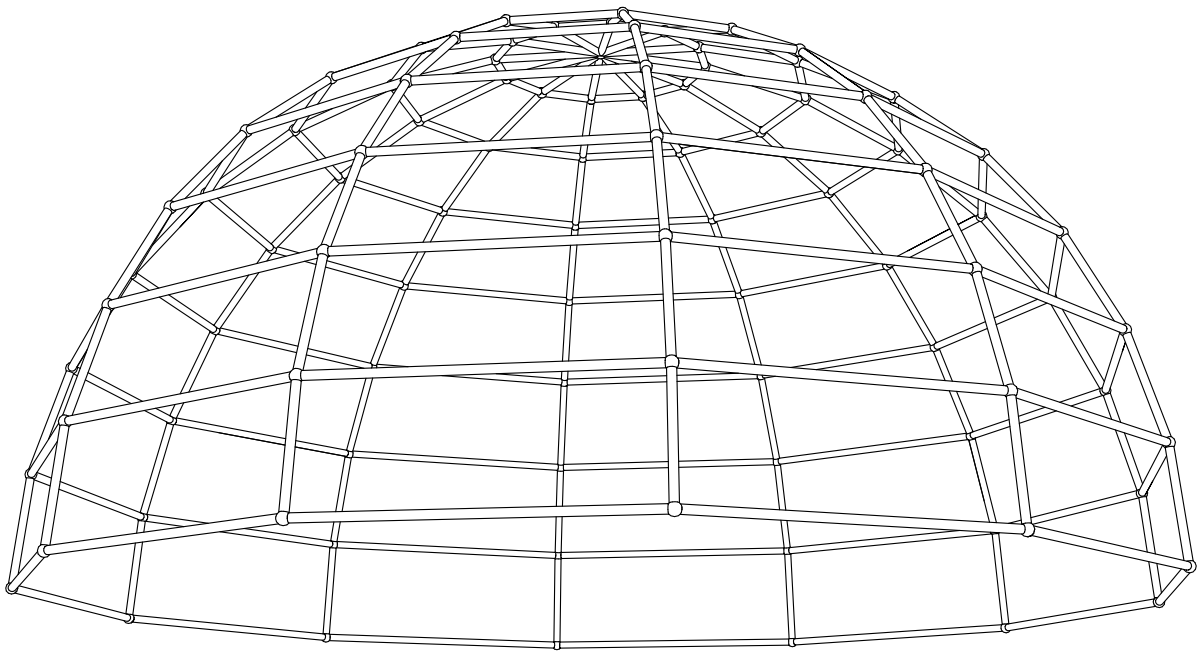
b) Método de las zonas paralelas: La esfera se conforma por troncos de cono cuyas bases son paralelas a la línea de Ecuador; cada porción cónica recibe el nombre de “zona paralela”, siendo la altura virtual de cada cono variable, con tendencia a cero cuando se acerca a los polos *(figura 10.29).*



Aproximación de una esfera (Método de las zonas paralelas)
Figura 10.29

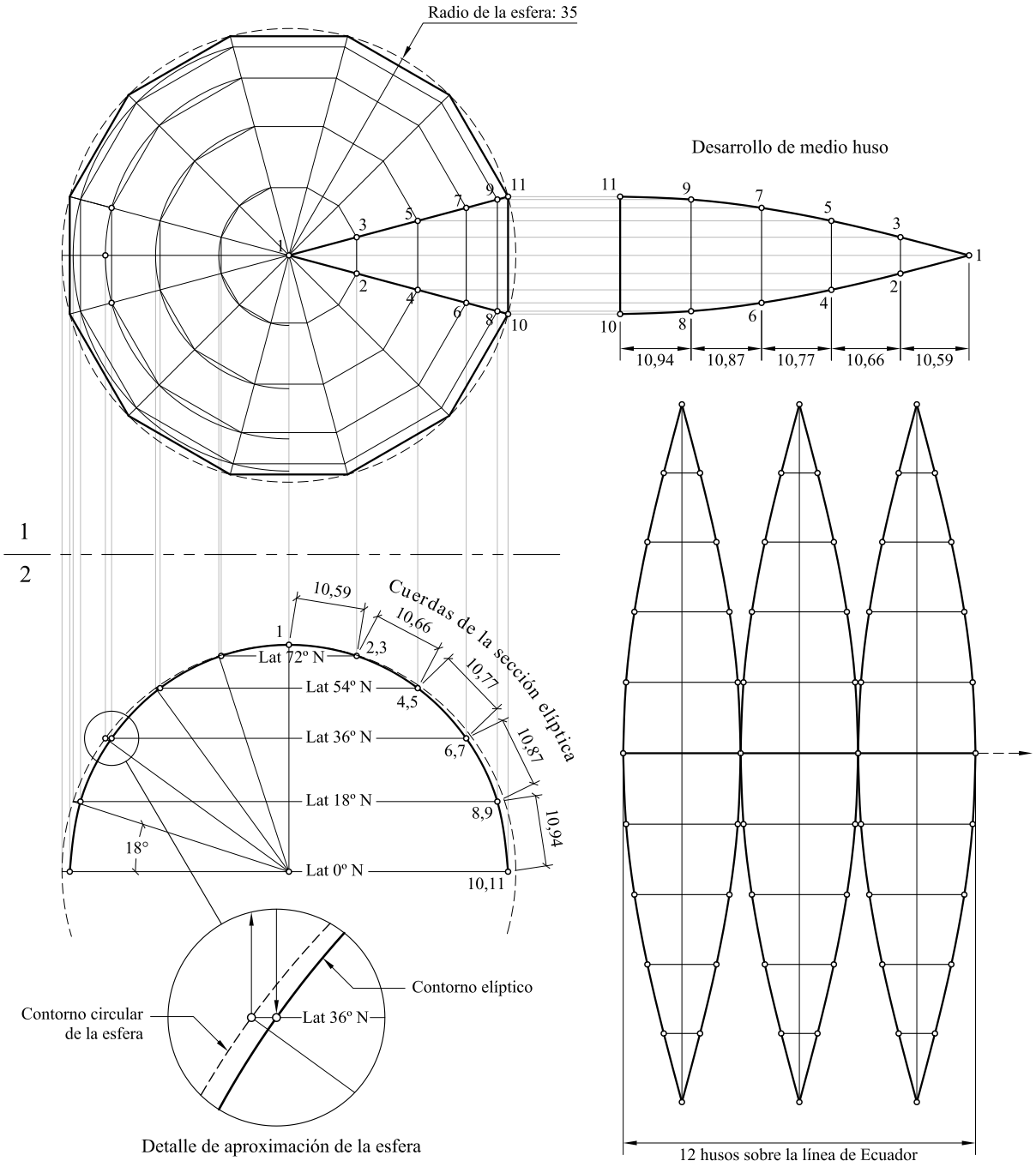
c) Método de las facetas: En este caso, la esfera se encuentra conformada por superficies planas, es decir, que las rectas que definen cada cara no poseen curvatura; para este propósito se deben emplear las cuerdas de los contornos circulares que definen la esfera, y la precisión del desarrollo dependerá del número de husos que se planteen; una de las aplicaciones más utilizadas con este método consiste en el diseño y la construcción de domos o cúpulas, debido a la comodidad para manipular los elementos estructurales esbeltos en forma modulada, obteniéndose estructuras rígidas y livianas *(figura 10.30).*





Aproximación de una esfera (Método de las facetas)
Figura 10.30

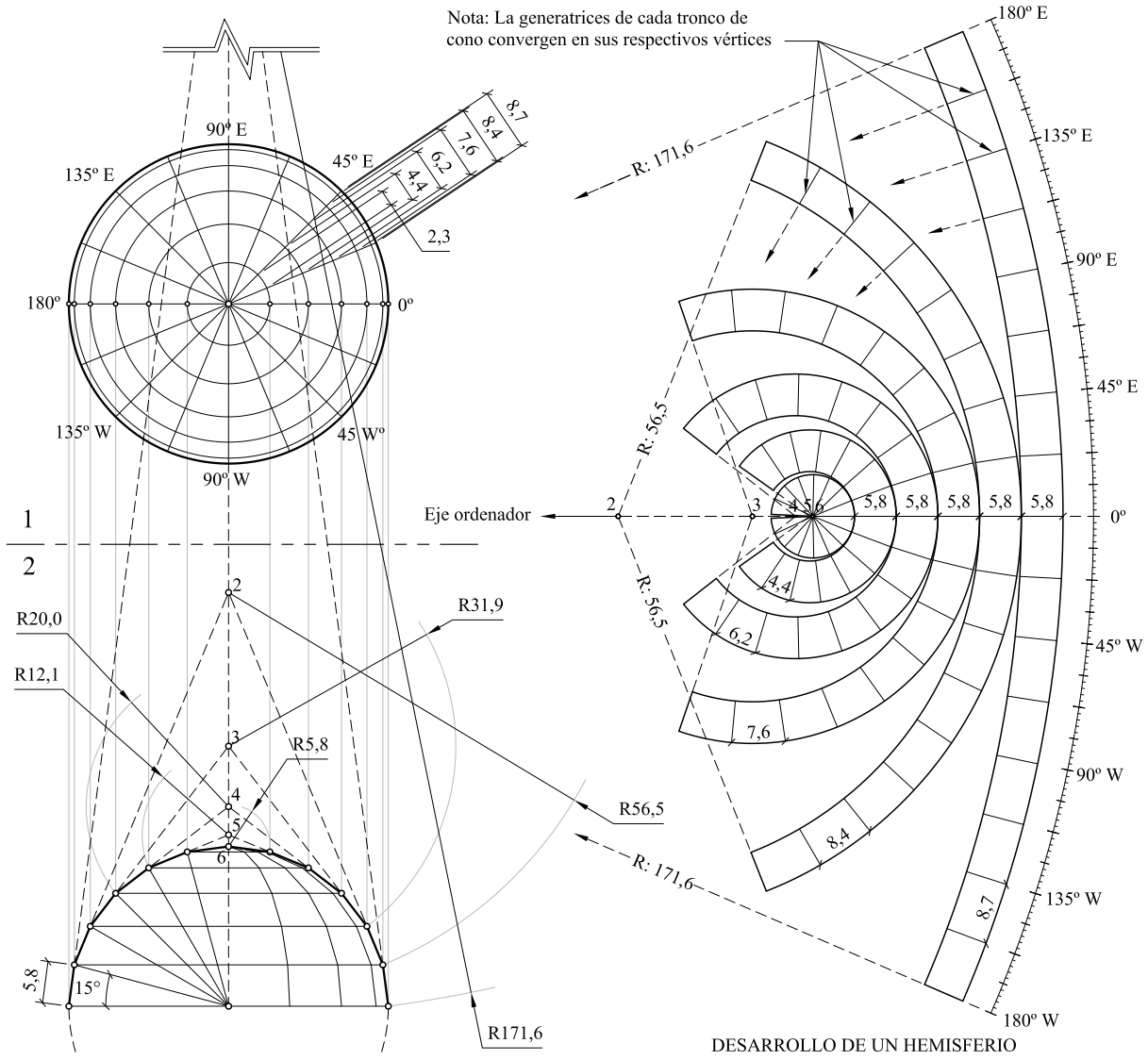
Con el método de los husos, se procede a dividir la esfera en 12 o 24 husos en la vista superior, y se alinea el ángulo de bisectriz comprendido entre dos juntas con el ángulo 0º del contorno de la esfera; luego, se trazan los paralelos con sus segmentos de cuerda iguales. La posición de las cuerdas definirán la curva de la sección media del cilindro para desarrollar (contorno elíptico); finalmente, se procede a determinar el desarrollo de medio huso aplicando el método paralelo *(figura 10.31).*



Desarrollo de una esfera (Método de los husos)
Figura 10.31

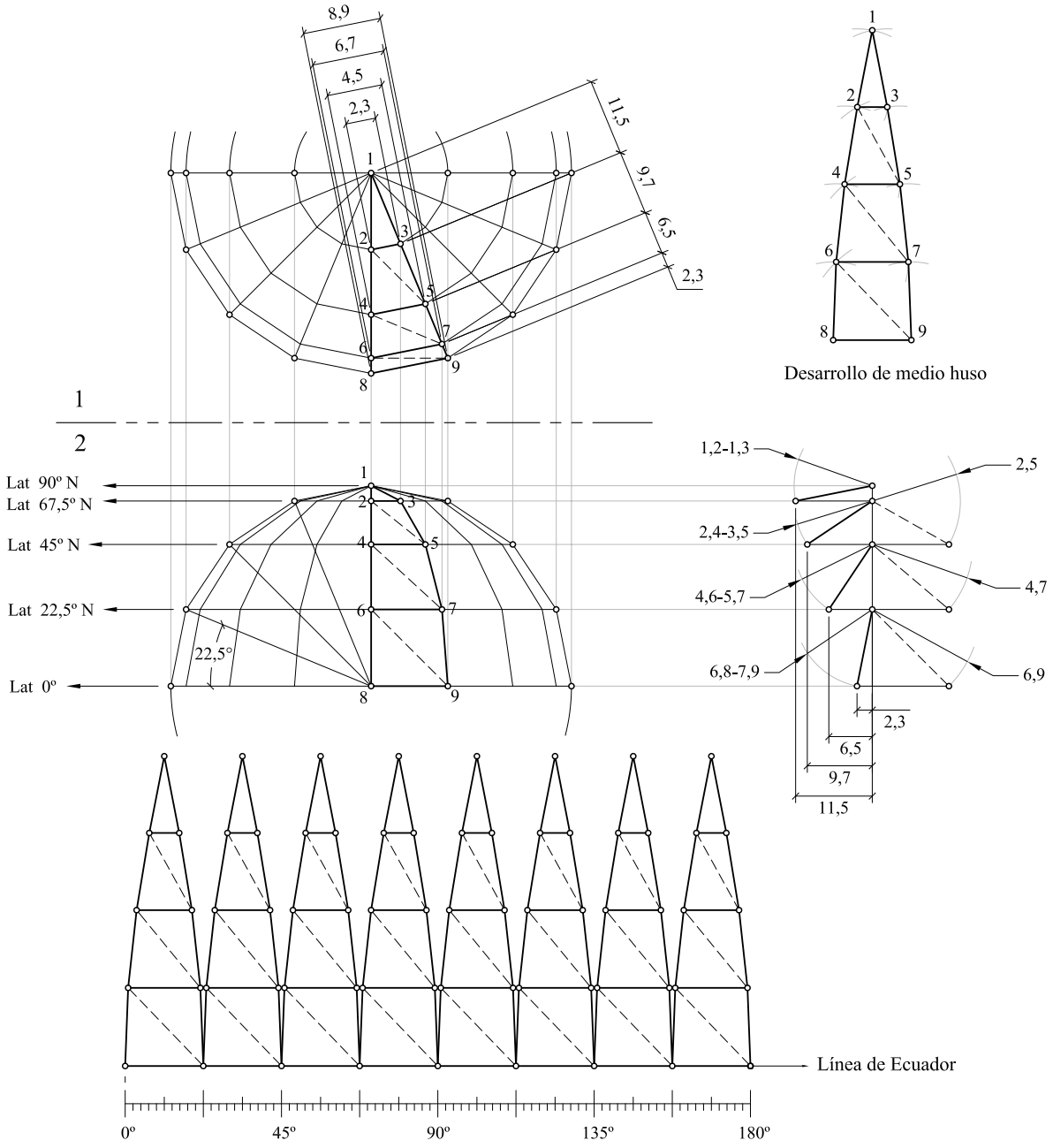
Para obtener un desarrollo de la esfera con el método de las zonas paralelas, se deben definir troncos de conos rectos cuyas bases sean paralelas a la línea de Ecuador; en el gráfico expuesto a continuación, se han planteado seis troncos de conos cuyas bases coinciden en latitudes de 15º cada una, separados con una cuerda constante de 5,8; de igual manera, se ha dividido la esfera en 16 husos meridionales desde el ángulo 0º del contorno esférico en la vista superior, los cuales corresponden con las generatrices de cada tronco.

Se prolongan las cuerdas de cada tronco de cono en la vista frontal, hasta que intercepten el eje cenital de la esfera para obtener los vértices de cada uno; los radios reales de cada tronco de cono se proyectan en la vista frontal, y las cuerdas de cada paralelo se proyectan en verdadera magnitud en la proyección superior. Al final, se construye el desarrollo de la esfera, de tal manera que las zonas paralelas queden consecutivas, y sus vértices se alineen sobre un eje ordenador *(figura 10.32).*



Desarrollo de una esfera (Método de las zonas paralelas)
Figura 10.32

Para obtener un desarrollo con el método de las facetas, se parte desde un hemisferio, y se procede a subdividir los contornos de los paralelos y meridianos en cuerdas iguales. En el gráfico expuesto a continuación se han planteado cuatro divisiones de paralelos que coinciden en latitudes de 22,5º cada uno, y ocho husos meridionales; de esta manera, el hemisferio queda constituido por planos definidos con sus respectivas cuerdas. Finalmente, se triangulan los cuadriláteros y se determina la longitud real de las aristas que conforman medio huso, utilizando el método de Pitágoras *(figura 10.33).*

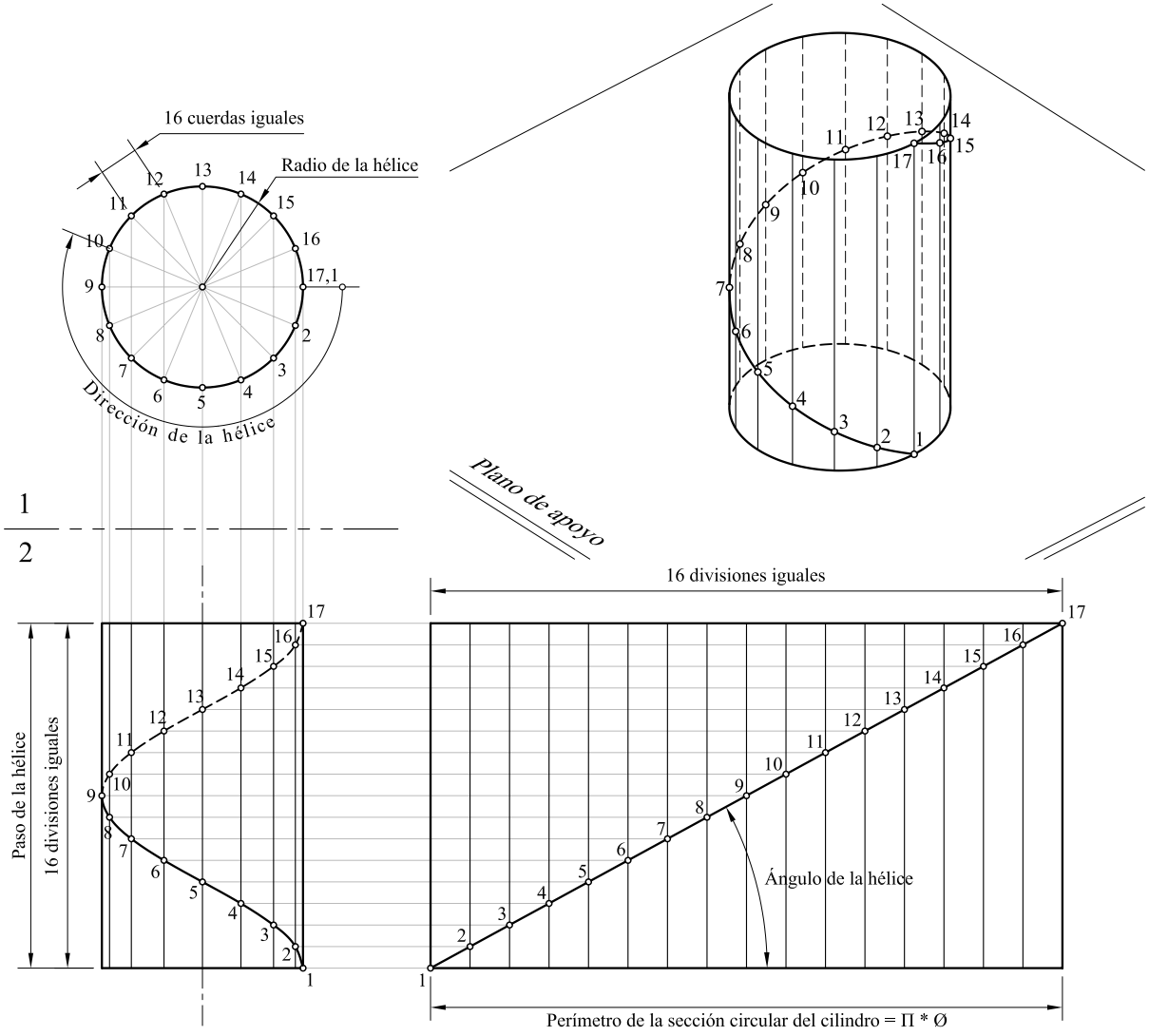


Desarrollo de una esfera (Método de las facetas)
Figura 10.33

10.5.3 Desarrollo de un helicoide recto

Un helicoide recto es una superficie alabeada, definida por el desplazamiento de una recta generatriz entre dos hélices concéntricas, siendo todas las rectas generatrices perpendiculares al eje de dichas hélices; teóricamente las superficies alabeadas no son desarrollables, pero, se pueden desarrollar por medio de subdivisiones triangulares; esto significa que el margen de error disminuye a medida que el número de triángulos se incremente.

Una hélice representa la diagonal del desarrollo de un cilindro recto; donde la longitud de la hélice es igual a la hipotenusa del triángulo rectángulo definido por la altura del cilindro y el perímetro de la sección circular del mismo; la altura donde se desenvuelve dicha hélice barriendo un ángulo de 360º se denomina “paso de la hélice”; esta línea curva se desplaza por el espacio conservando un ángulo de pendiente constante, siendo este ángulo igual a la tangente de la relación (paso de la hélice/ π * Ø); la dirección de la hélice puede ser en sentido del reloj o en sentido contrario del mismo *(figura 10.34).*



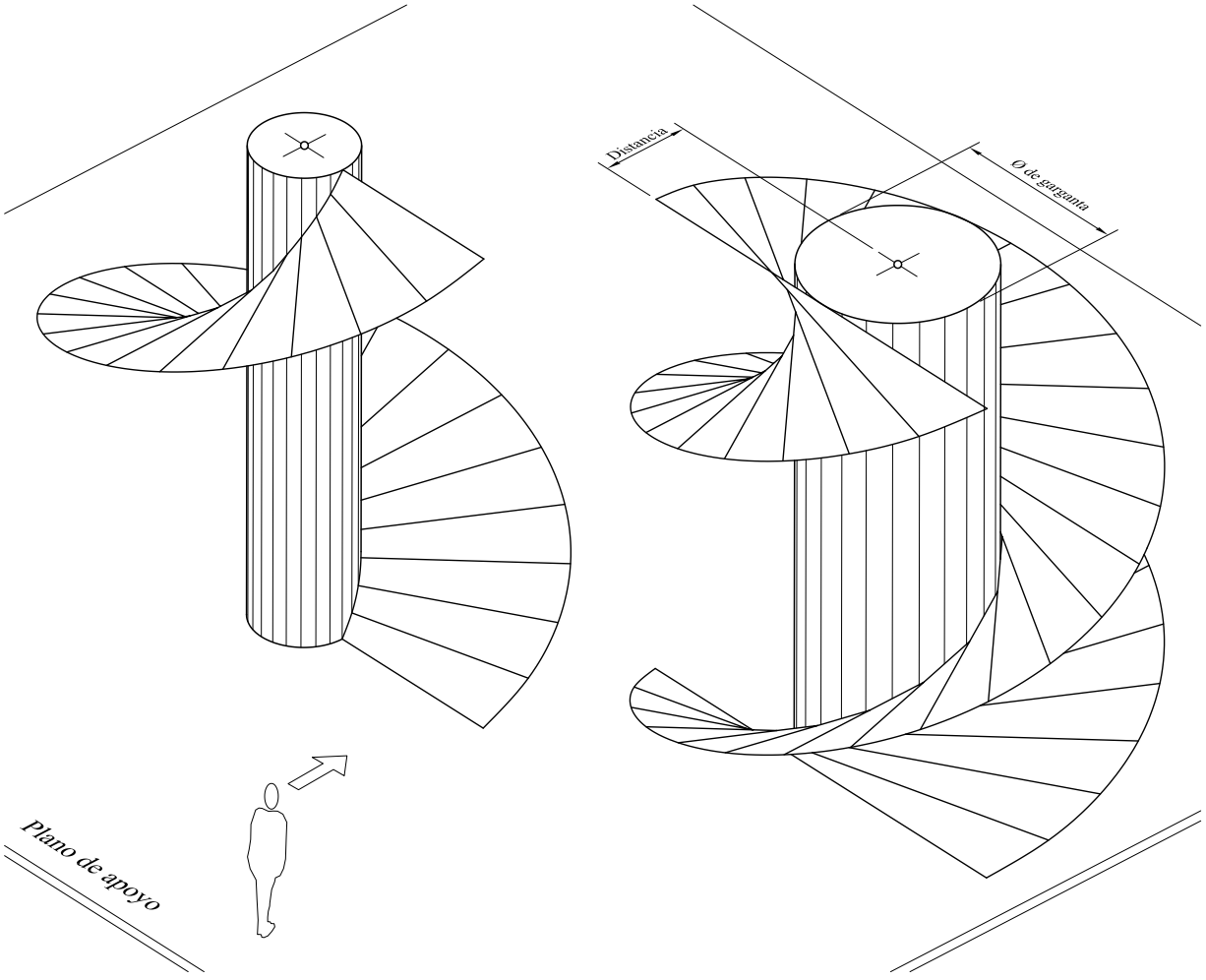
Determinación de una hélice en un cilindro recto
Figura 10.34

En algunos casos, una hélice puede barrer un ángulo parcial (menor a 360º), o un ángulo mayor a 360º; suponiendo que el ángulo de barrido es un ángulo Ω, esto significa que el ángulo Ω de recorrido puede tener un porcentaje menor o mayor al 100% (360º); por lo tanto, la pendiente del ángulo de inclinación β de la hélice, será igual:

$$Tag\ \beta = \frac{Paso\ de\ la\ hélice}{\left(\frac{Ang\ \Omega}{360^o}\right) x\ \pi\ x \varnothing}$$

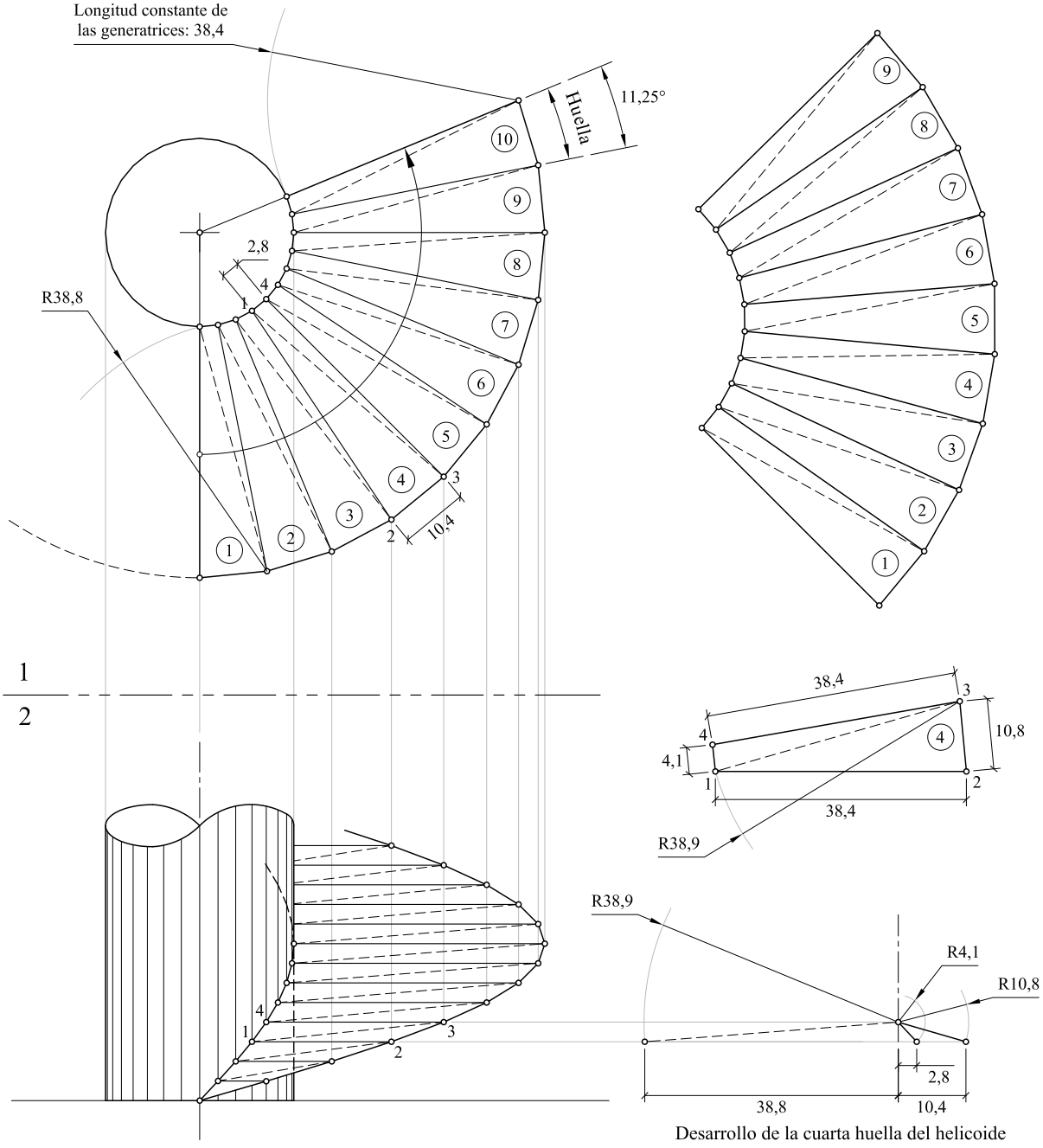
Las generatrices de un helicoide recto pueden interceptar o no al eje; en este último caso, todas las generatrices pasarán a una distancia constante al eje, siendo tangentes al cilindro en que se desarrollan, definiéndose un vacío cilíndrico denominado "diámetro de garganta"; en cualquiera de los dos casos, todas las generatrices de un helicoide recto serán paralelas al plano de apoyo *(figura 10.35).*

Este tipo de superficie suele utilizarse en el diseño y la construcción de escaleras en caracol, bandas transportadoras, toboganes, tornillos, ejes de molinos, brocas, muelles helicoidales, etc.



Tipos de helicoide recto
Figura 10.35

Debido a la simetría en que se organizan las generatrices de un helicoide recto; en la vista superior se disponen en forma radial conservando un ángulo constante, según el número de cuerdas que se hayan planteado; el espacio entre dos generatrices consecutivas se denomina “huella”; por consiguiente, para determinar el desarrollo de un helicoide recto, bastará construir dos triángulos en cada huella, y encontrar la longitud real de todos sus lados; de esta manera, bastará multiplicar por el total de huellas que barre el helicoide recto, y así conseguir el desarrollo del mismo *(figura 10.36).*

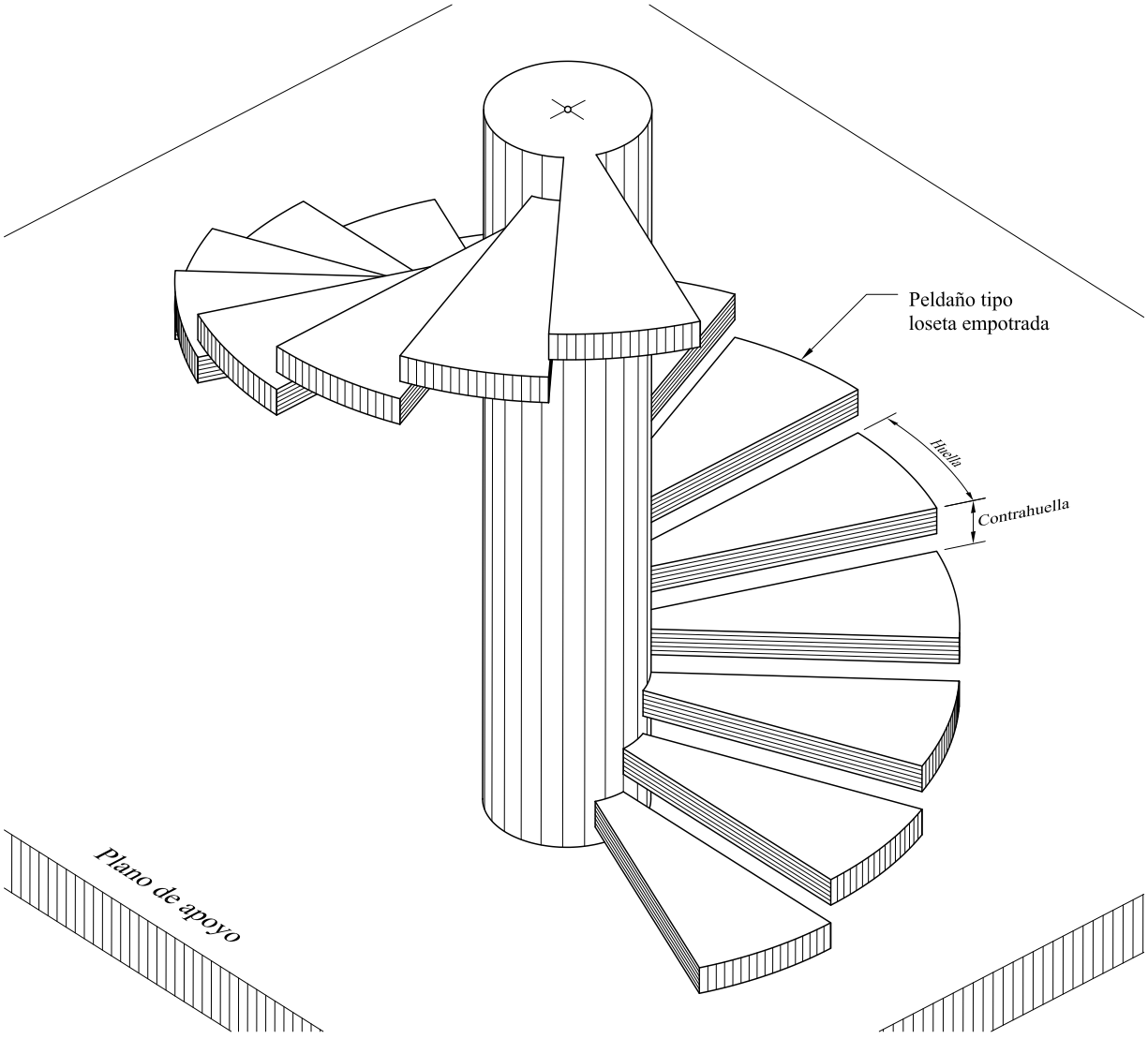


Desarrollo parcial de un helicoide recto (triangulación de una huella, método de Pitágoras)
Figura 10.36

En las áreas de Ingeniería civil y Arquitectura, suelen diseñarse y construirse escaleras en caracol, con el propósito de conectar dos espacios situados a diferentes alturas a través de un vacío cilíndrico, y las personas puedan circular libremente entre ambos espacios; para diseñar una escalera en caracol, bastará considerar cada huella como si fuera un plano horizontal, y el espesor para cada huella, dependerá del material utilizado, así como del diseño estructural realizado por el Ingeniero civil; al diseñar escaleras en general, se utiliza la siguiente fórmula:

$H + CH = 63\,cms$; Donde H= Huella, y CH= Contrahuella

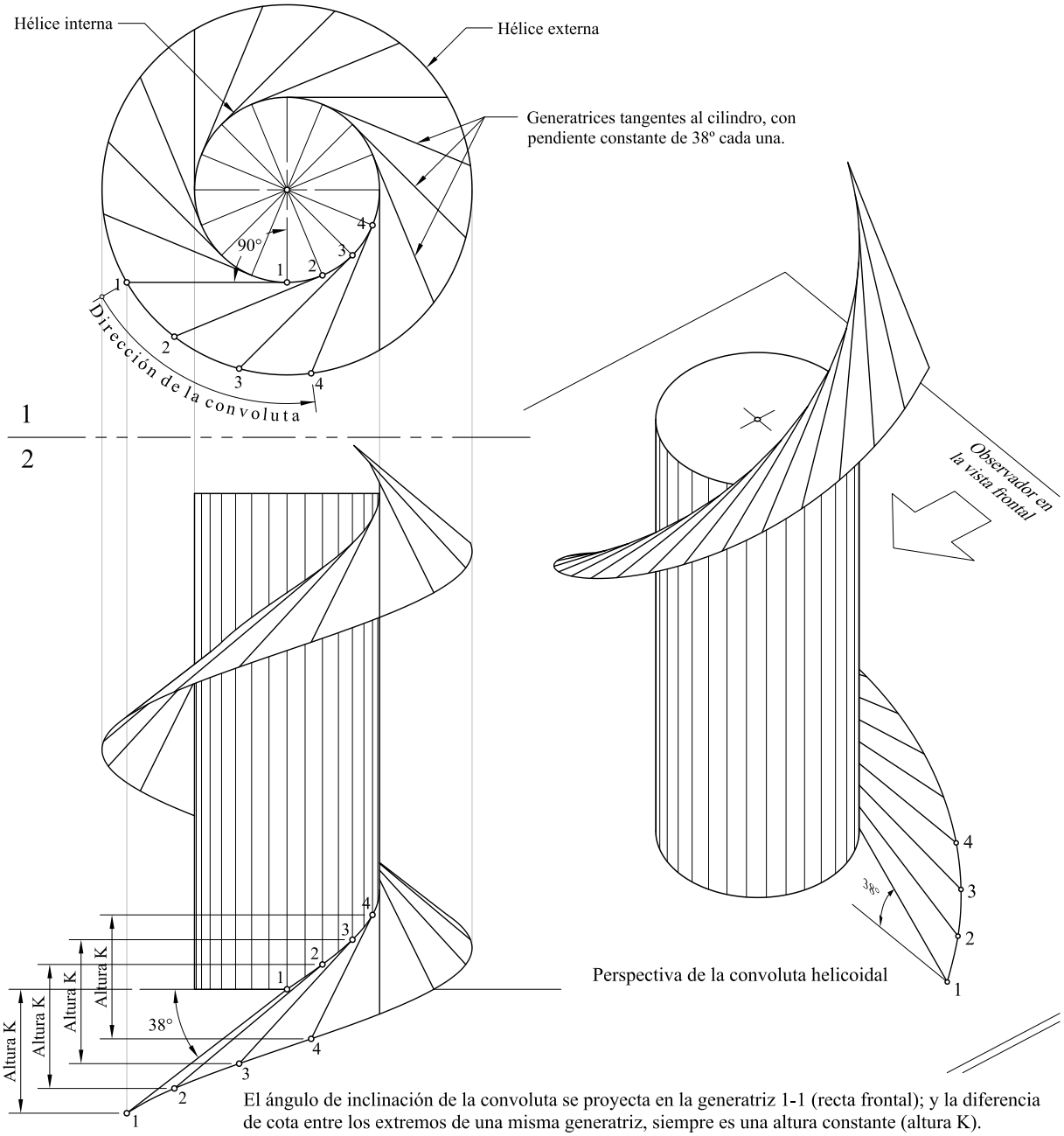
La huella entonces representa el plano horizontal donde se apoya cómodamente el pie, mientras que la contrahuella es la altura libre entre dos huellas adyacentes; los ángulos de pendiente de una escalera pueden oscilar de 15º a 35º, y por lo general se utilizan hasta un máximo de 16 peldaños para subir en forma continua; de igual forma, la altura libre para circular debe ser mayor a 2,0 mts *(figura 10.37).*



Escalera en caracol (losetas empotradas)
Figura 10.37

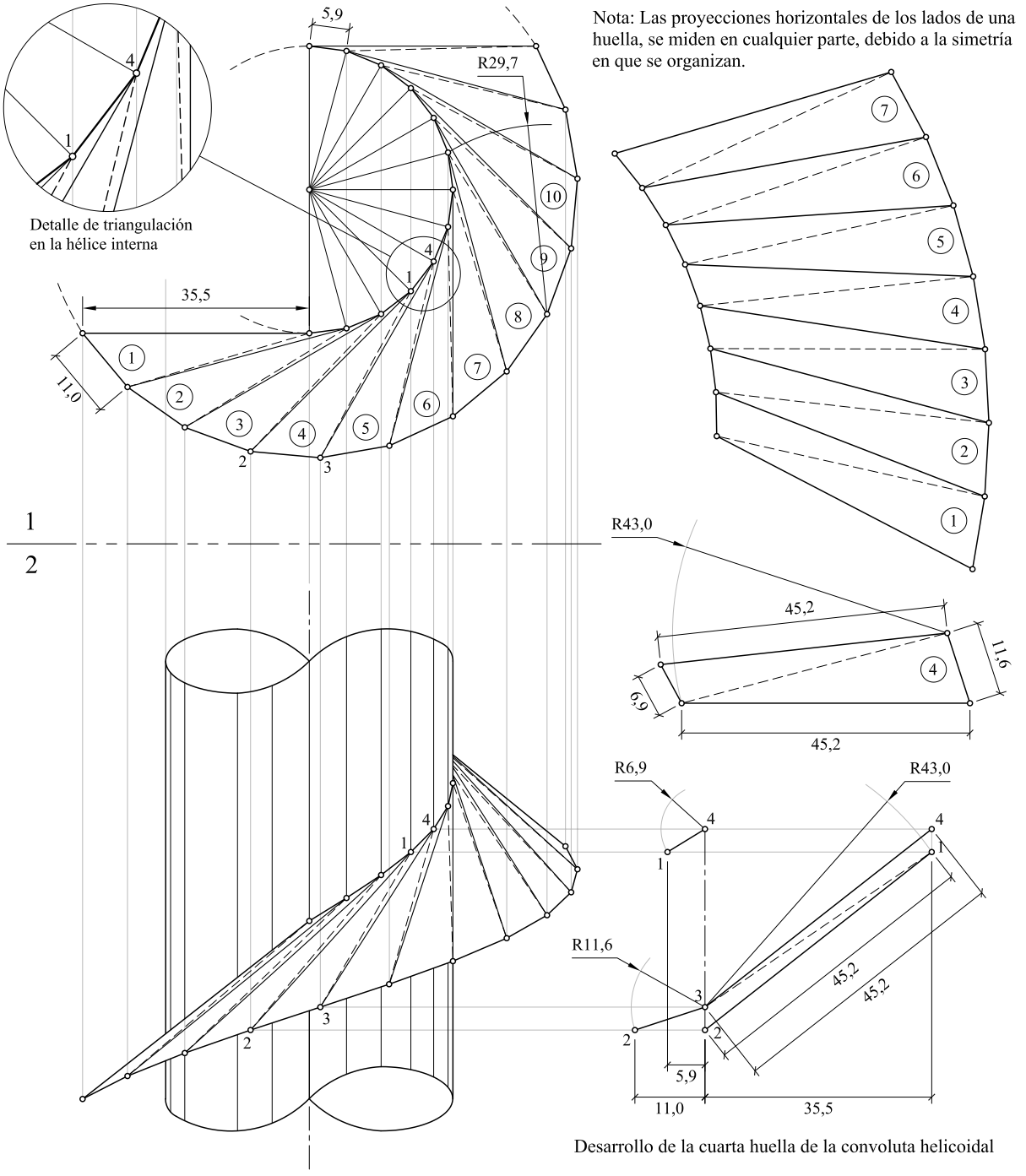
10.5.4 Desarrollo de una convoluta helicoidal

Una convoluta helicoidal es una superficie generada por el desplazamiento de una recta generatriz que sea tangente a una hélice; además, la generatriz posee una pendiente constante a lo largo del recorrido en la hélice; el punto tangente de contacto representa el vértice del ángulo de la pendiente; y el paso se refiere a la altura ganada por dicha superficie en su barrido angular *(figura 10.38)*.



Representación de una convoluta helicoidal
Figura 10.38

Las generatrices de la convoluta helicoidal poseen la misma longitud, y una pendiente constante; por lo tanto todas sus huellas serán iguales entre sí; de esta manera, se procede a triangular cada huella, y determinar la longitud real de todos sus lados; finalmente el desarrollo de una huella se multiplica por el total de huellas que barre la convoluta, para conseguir el desarrollo de la misma *(figura 10.39).*



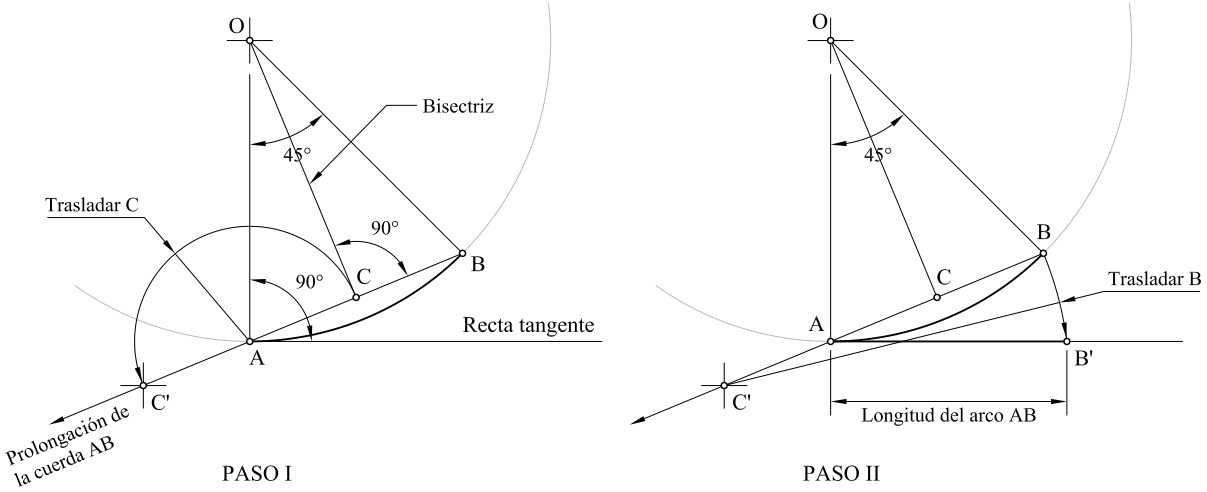
Desarrollo parcial de una convoluta helicoidal (triangulación de una huella, método de Pitágoras)
Figura 10.39

10.5.5 Desarrollo de una convoluta helicoidal prolongada hasta la base

Esta superficie está determinada por el desplazamiento progresivo de una recta generatriz, que se encuentra en contacto entre una hélice y la involuta de la sección circular del cilindro; la involuta es una espiral que resulta del movimiento progresivo de una recta horizontal que sea tangente al cilindro, cuya longitud es igual al perímetro de la sección circular que ha recorrido; de esta manera, las generatrices que definen la convoluta helicoidal, tendrán pendiente constante, y longitud variable.

Para este propósito, es necesario rectificar un segmento de arco de la sección circular sobre una recta tangente horizontal, con el fin de obtener un módulo que permita incrementar gradualmente la longitud de las siguientes rectas tangentes, a medida que van rotando alrededor de la misma sección circular.

La rectificación de un segmento de arco, consiste en trasladar su longitud sobre una recta tangente; este proceso geométrico es válido cuando el ángulo del arco sea menor a 60º, y mayor a 0º *(figura 10.40).*

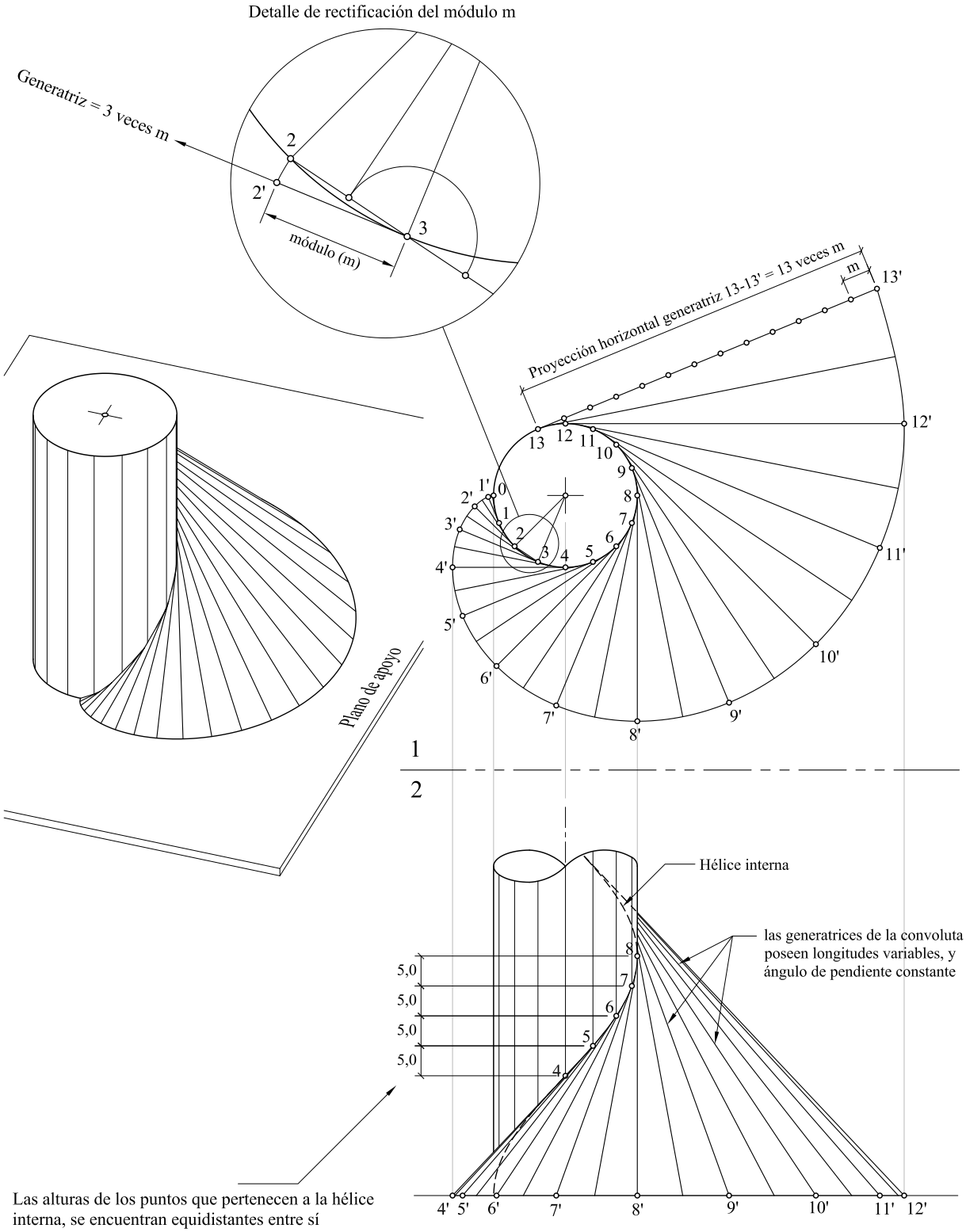


Rectificación de un arco sobre una línea recta tangente
Figura 10.40

En la figura 10.40, se ha prolongado la cuerda del arco AB en forma indefinida, después se determina la bisectriz del ángulo del arco hasta interceptar la mediatriz de la cuerda AB (punto C); luego, se dibuja un arco desde el punto A para trasladar el punto C sobre la prolongación (punto C'); al final, se dibuja un arco desde el punto C', para trasladar el punto B hasta la recta tangente (punto B'); de esta manera, la longitud AB' será la rectificación del arco AB.

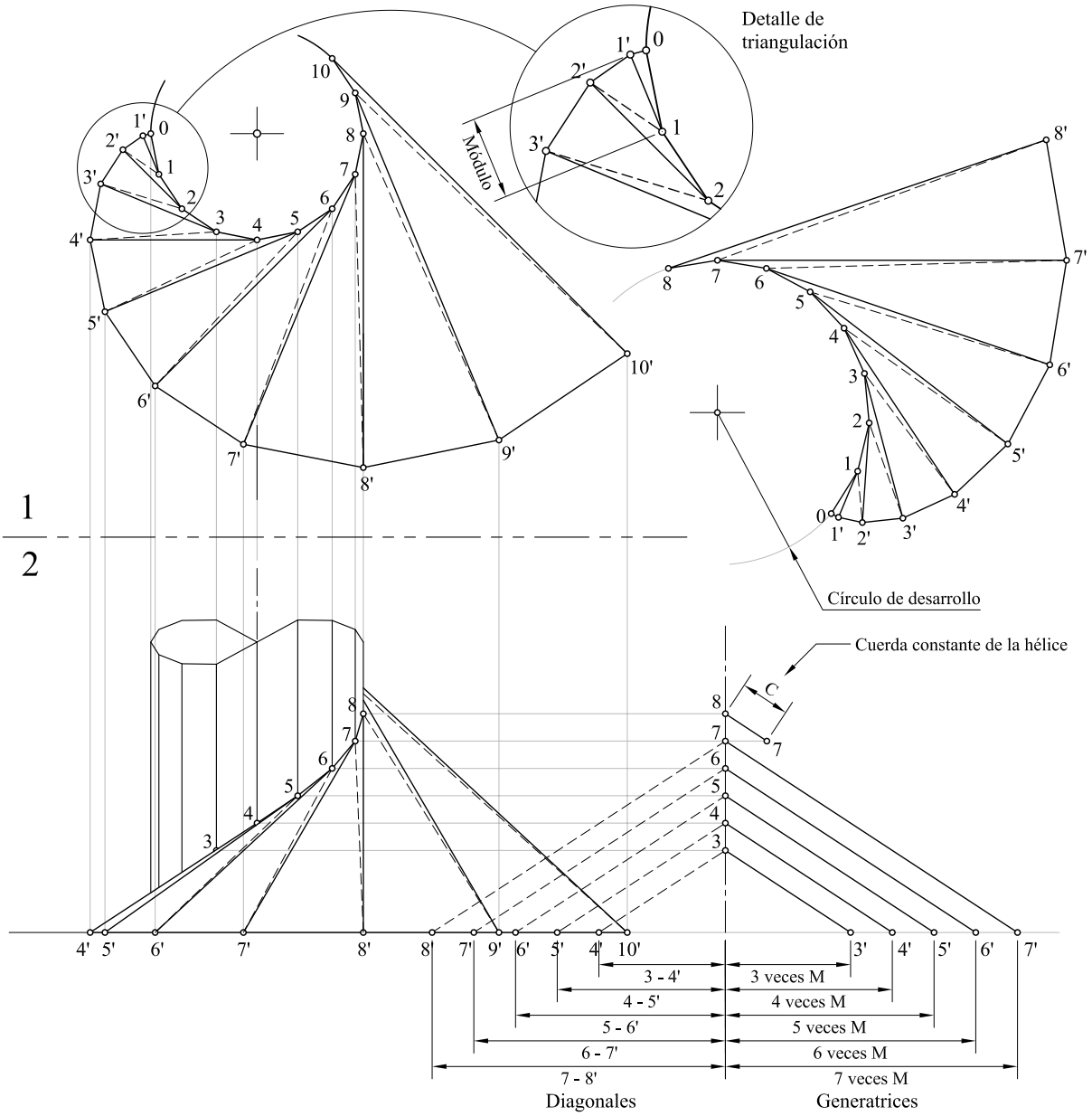
Al igual que en las anteriores geometrías basadas en el cilindro, es necesario aumentar el número de cuerdas, para conseguir una mayor resolución en la construcción de la superficie; por consiguiente, la rectificación del arco obtenido representará el módulo en que se incremente cada recta horizontal; esto significa, que la longitud horizontal de una generatriz que abarca tres segmentos de arco, será igual a tres veces el módulo, o trece veces el módulo si abarca trece segmentos de arco, y así, sucesivamente.

Para representar una convoluta helicoidal prolongada, se deben dibujar las generatrices con longitudes incrementadas cada módulo, conforme avanza la superficie; este proceso permitirá dibujar la involuta sobre el plano horizontal de apoyo; posteriormente, se define la superficie uniendo con las generatrices reales inclinadas, las cuales tendrán pendiente constante, y longitud variable *(figura 10.41).*



Representación de una convoluta helicoidal prolongada
Figura 10.41

Para obtener el desarrollo de la superficie referenciada, se procede a triangular cada una de las huellas, y se determina la magnitud real de todos sus lados, utilizando el método de Pitágoras; la única medida que se mantiene constante, es la cuerda de la hélice del cilindro; en cambio, las cuerdas de la involuta, las generatrices, y las diagonales, poseen longitud variable. Las generatrices inclinadas representan las hipotenusas de triángulos rectángulos, cuyos catetos opuestos, conservan proporciones semejantes con los diferenciales de cota entre los extremos de la hélice, y los catetos adyacentes, son proporcionales a los incrementos del módulo M sobre la recta tangente al cilindro. Finalmente, cuando se organizan las huellas en verdadera forma, éstas se ordenan alrededor de un círculo en forma envolvente y tangencial (círculo de desarrollo) *(figura 10.42).*



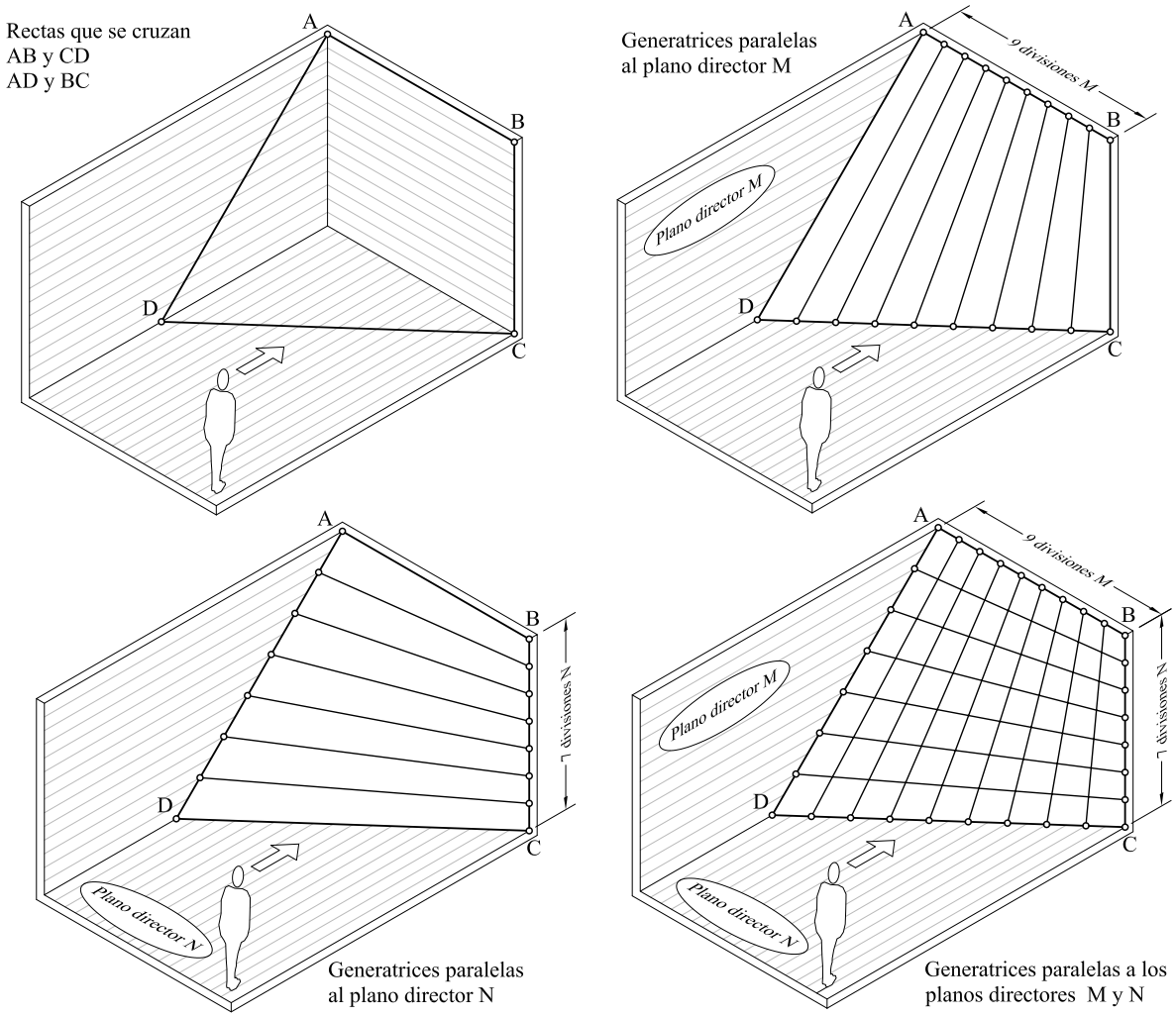
Desarrollo parcial de una convoluta helicoidal prolongada
Figura 10.42

10.5.6 Desarrollo de un paraboloide hiperbólico

El paraboloide hiperbólico es una superficie alabeada que presenta doble curvatura (curvas invertidas); esta se concibe por el desplazamiento de una recta generatriz sobre dos rectas directrices que se cruzan, siendo todas las rectas generatrices paralelas a un plano director.

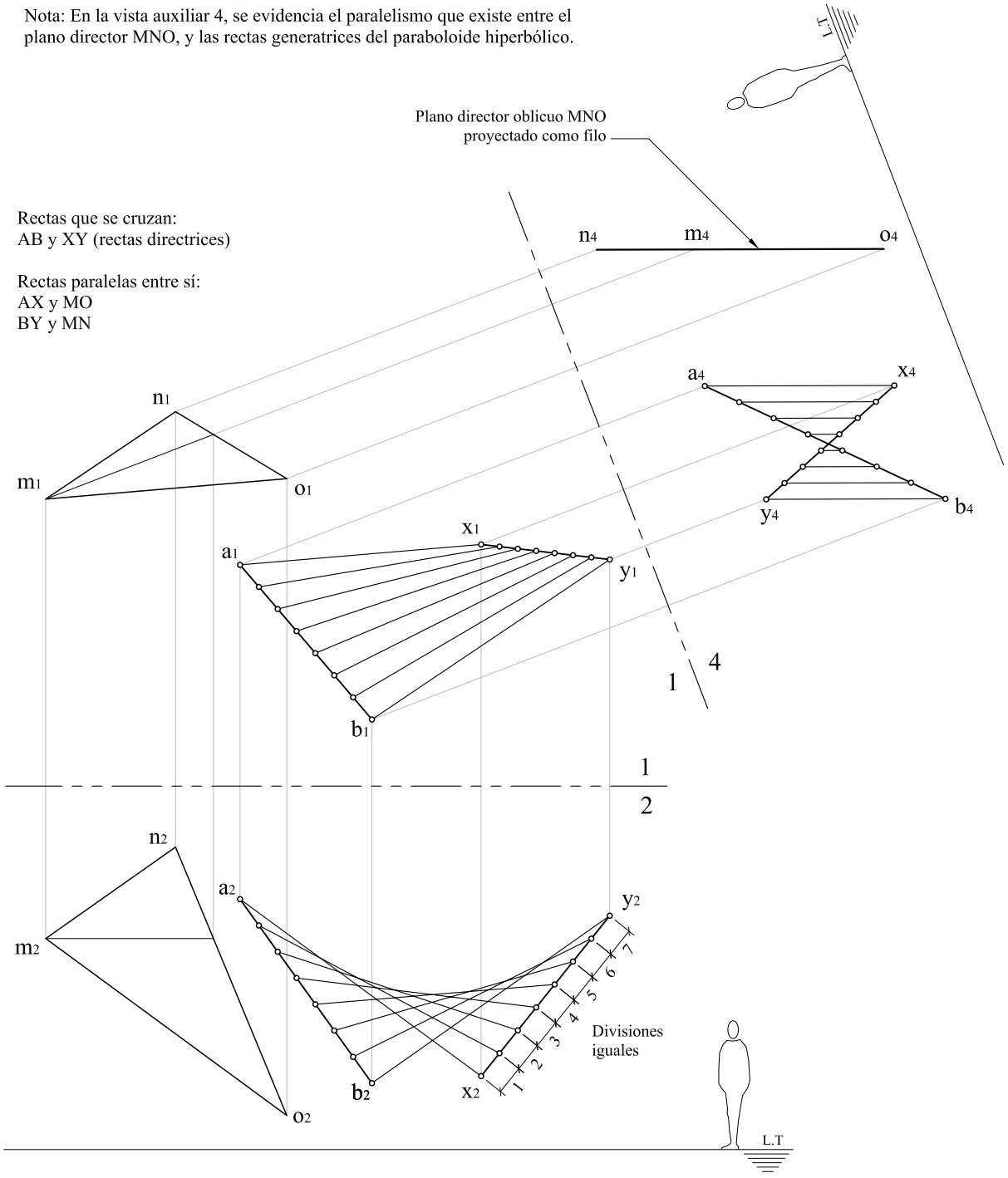
Uno de los ejemplos más representativos de esta superficie, consiste en la silla de montar a caballo, la cual presenta una sección parabólica en el sentido transversal, y una sección hiperbólica en el sentido longitudinal. Debido a sus cualidades de esbeltez, rigidez, y estética que ofrece este tipo de geometría, suele emplearse para el diseño y la construcción de muros de contención, paredes, cubiertas, puentes, parasoles, muebles, lámparas, stands de exhibición, etc.

Generalmente, las rectas directrices se subdividen en partes iguales, para ubicar sobre cada punto la respectiva recta generatriz; dicha superficie, puede definirse con uno o dos planos directores, es decir, en un sentido presenta M divisiones, y en el otro sentido, tener N divisiones *(figura 10.43)*.



Representación de un paraboloide hiperbólico (perspectiva)
Figura 10.43

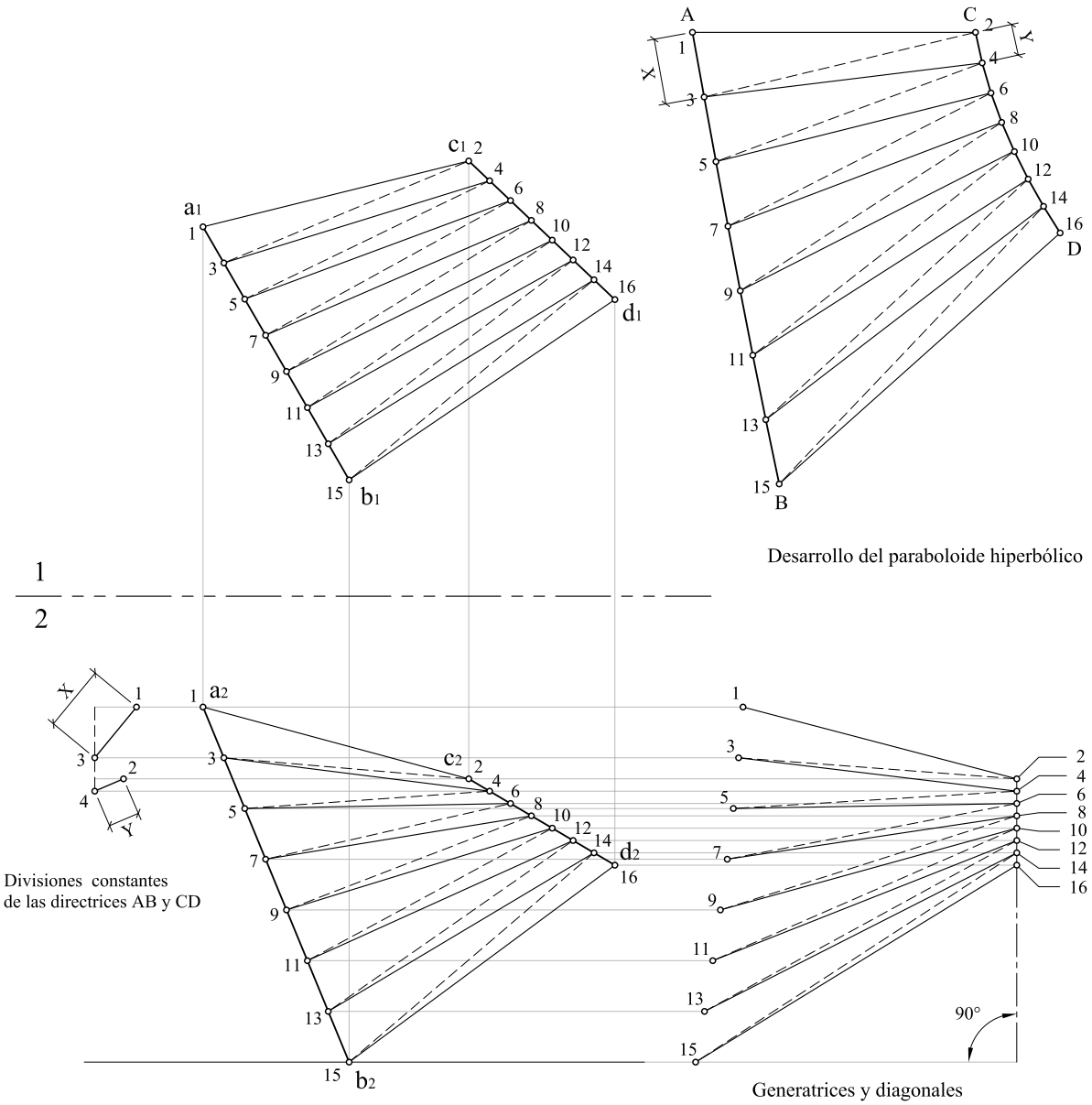
Para concretar el plano director de un paraboloide hiperbólico dado, bastará construir un plano con dos rectas que se corten, y a la vez, sean paralelas a dos rectas generatrices cualesquiera respectivamente; las generatrices referenciadas deben pertenecer al mismo sentido M o N de la superficie *(figura 10.44).*



Construcción de un plano director oblicuo, a partir de un paraboloide hiperbólico
Figura 10.44

Durante la fabricación de un paraboloide hiperbólico, las generatrices suelen ser cables o tensores, los cuales van armados en los dos sentidos (cuadrícula MxN), y anclados a los bordes (directrices); de esta manera, la cuadrícula facilita posteriormente la fundición o el montaje de losetas en obra.

Para definir el desarrollo aproximado de dicha superficie, es conveniente trabajar en un solo sentido, ya que esto permitiría el proceso de triangulación, utilizando un menor número de cuadriláteros; y por lo tanto, el dibujo no tiende a saturarse demasiado. El método de Pitágoras resulta adecuado para obtener la longitud real de todos los triángulos derivados *(figura 10.45).*

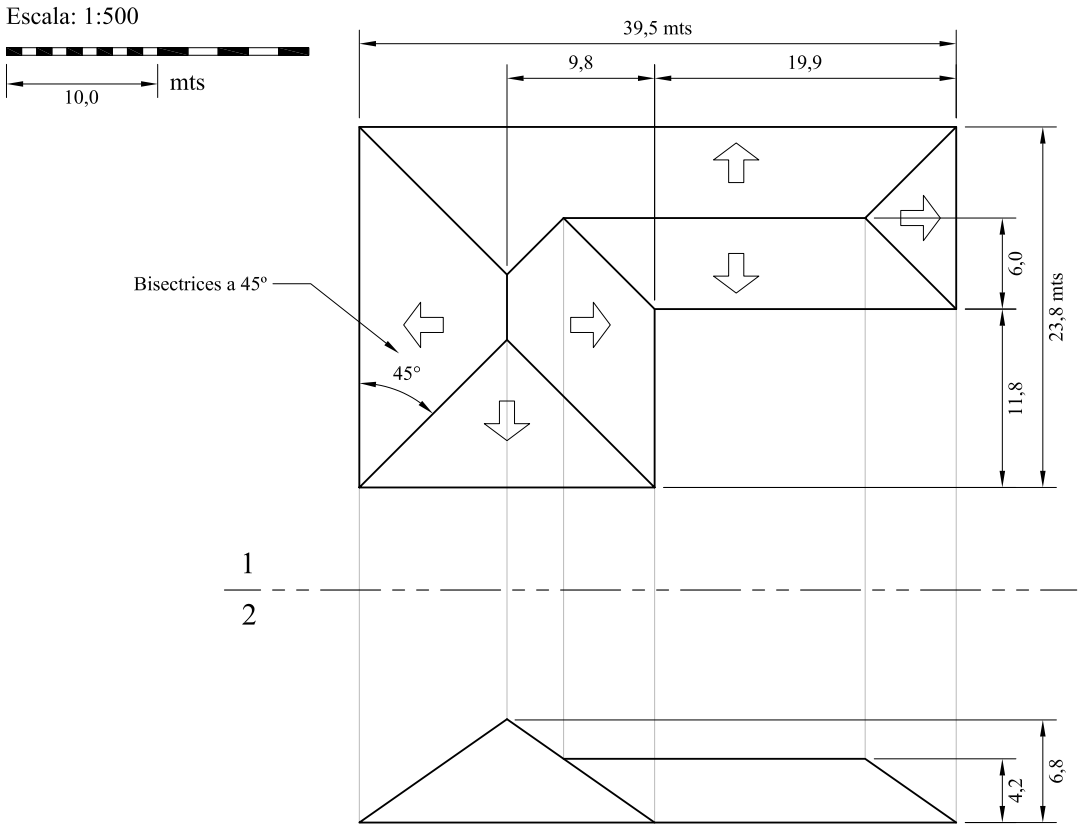


Desarrollo de un paraboloide hiperbólico (triangulación en un sentido)
Figura 10.45

10.6 Ejemplos

10.6.1 Ejemplo 1

De acuerdo a las proyecciones de la cubierta mostrada a continuación, y cuyas dimensiones están dadas en mts, se requiere determinar la verdadera forma de todos los faldones (planos de vertientes de agua), utilizando el método que más convenga. Trabajar en sistema ASA, a escala: 1:500 *(figura 10.46).*

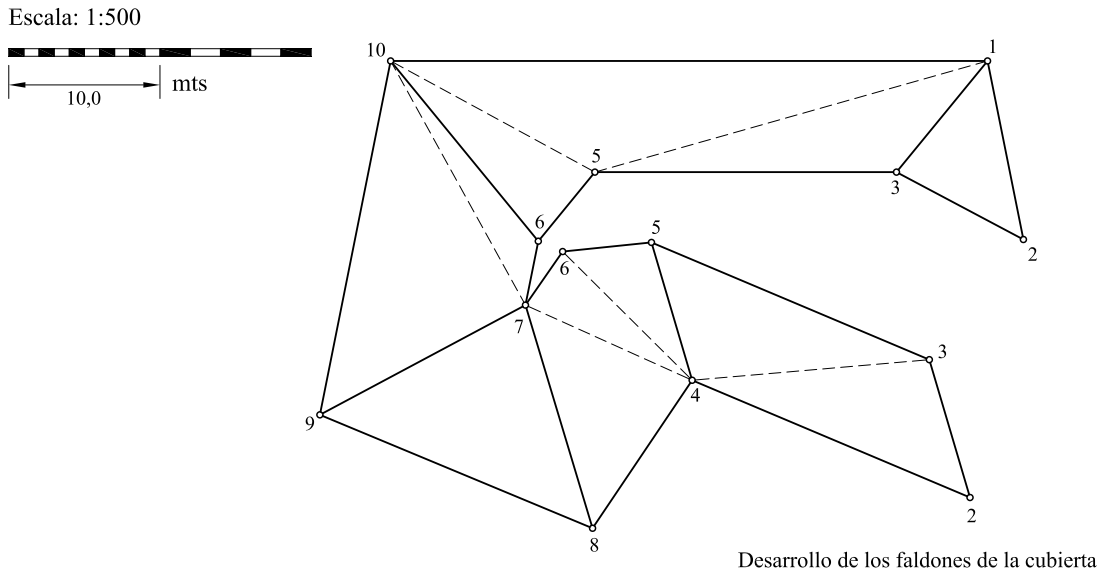


Nota: Pendiente de todos los faldones: 70%

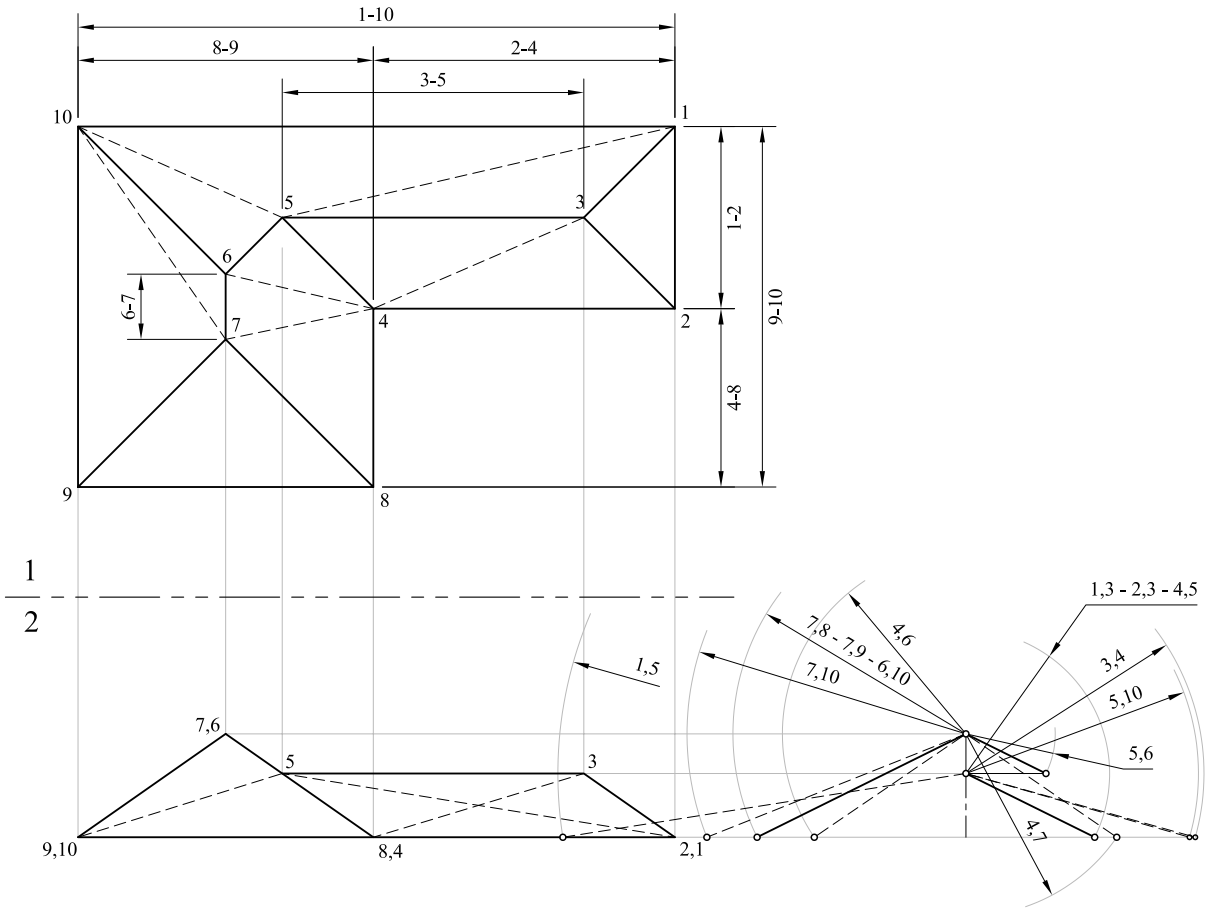
Proyecciones de una cubierta, para resolver
Figura 10.46

Por tratarse de una forma geométrica irregular definida por planos, es conveniente triangular cada uno de ellos, y proceder a determinar la longitud real de todos sus lados.

De acuerdo a las proyecciones de la cubierta, se utiliza el método de Pitágoras, debido a la facilidad de trasladar directamente las cotas de elevación desde la vista frontal; posteriormente, se miden las proyecciones de cada arista en la vista superior, con un compás de precisión, y se trasladan al área de trabajo; de esta manera, se obtienen las hipotenusas, las cuales representan la verdadera magnitud de todas las aristas. Durante este procedimiento, es importante la correcta designación con números, para facilitar el desarrollo ordenado de todos los planos *(figura 10.47).*



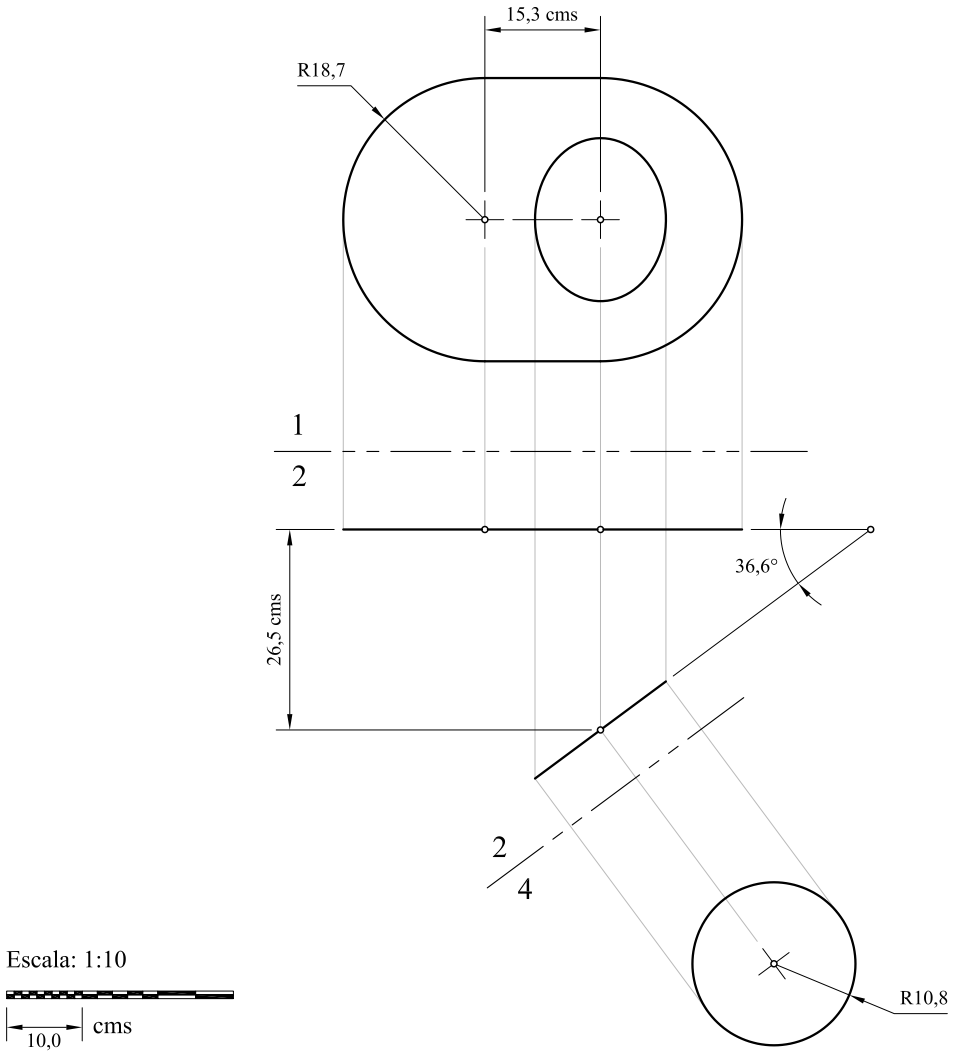
Desarrollo de los faldones de la cubierta



Desarrollo de una cubierta (método de Pitágoras)
Figura 10.47

10.6.2 Ejemplo 2

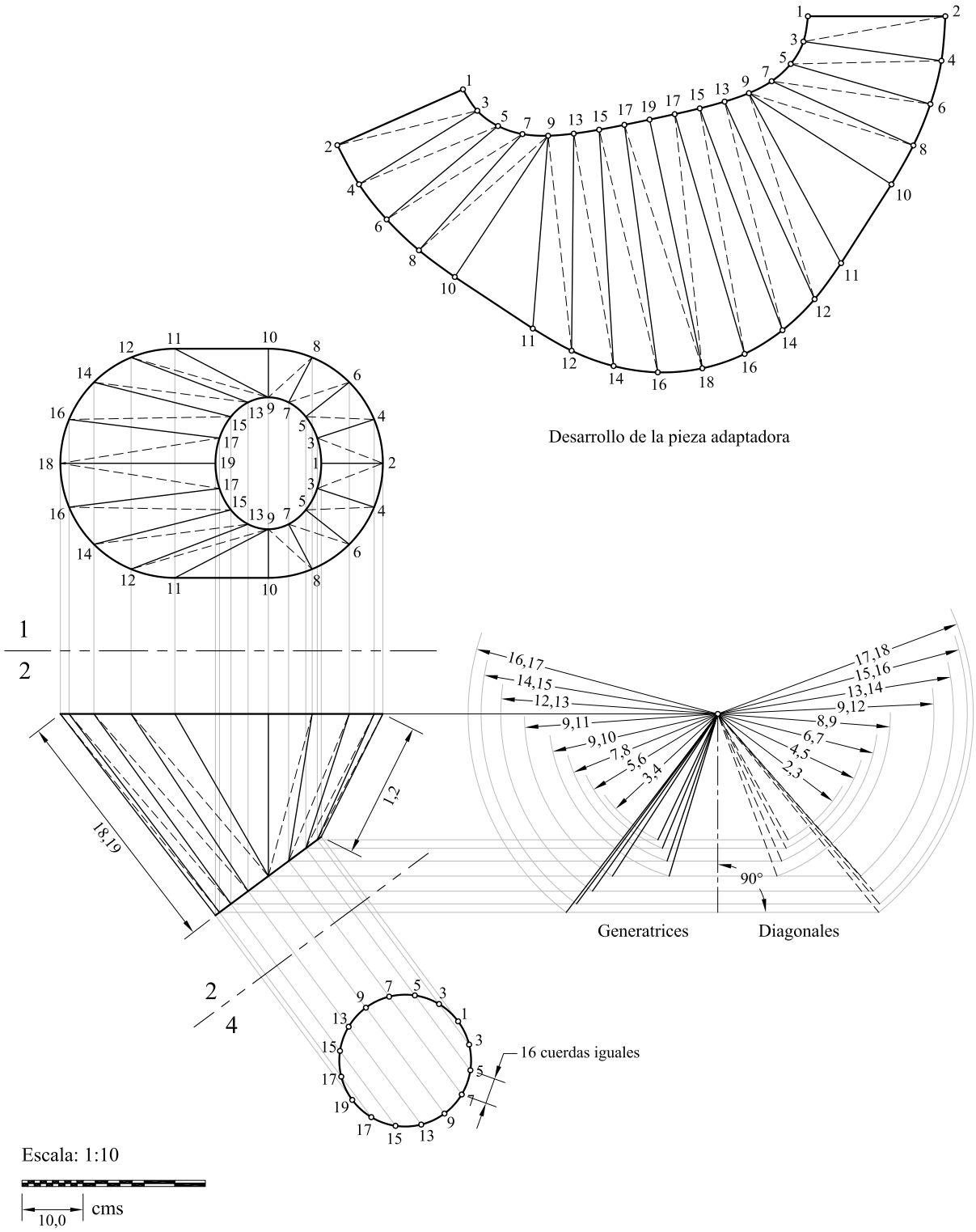
Diseñar y desarrollar la pieza adaptadora, que une las dos secciones dadas a continuación, utilizando el método de triangulación; trabajar en sistema ASA, a escala: 1:10 *(figura 10.48).*



Secciones dadas para resolver la pieza adaptadora
Figura 10.48

En la vista superior, se propone conectar las mitades del círculo con las correspondientes mitades de la otra sección; en este caso, se divide el círculo en dieciséis cuerdas iguales, y los arcos de circunferencia de la otra sección, se dividen en ocho cuerdas iguales; de esta manera, se conectan los vértices con las generatrices que definen la pieza adaptadora; al final, se triangulan los cuadriláteros, y se procede a determinar la longitud real de todas las aristas, con el método de Pitágoras.

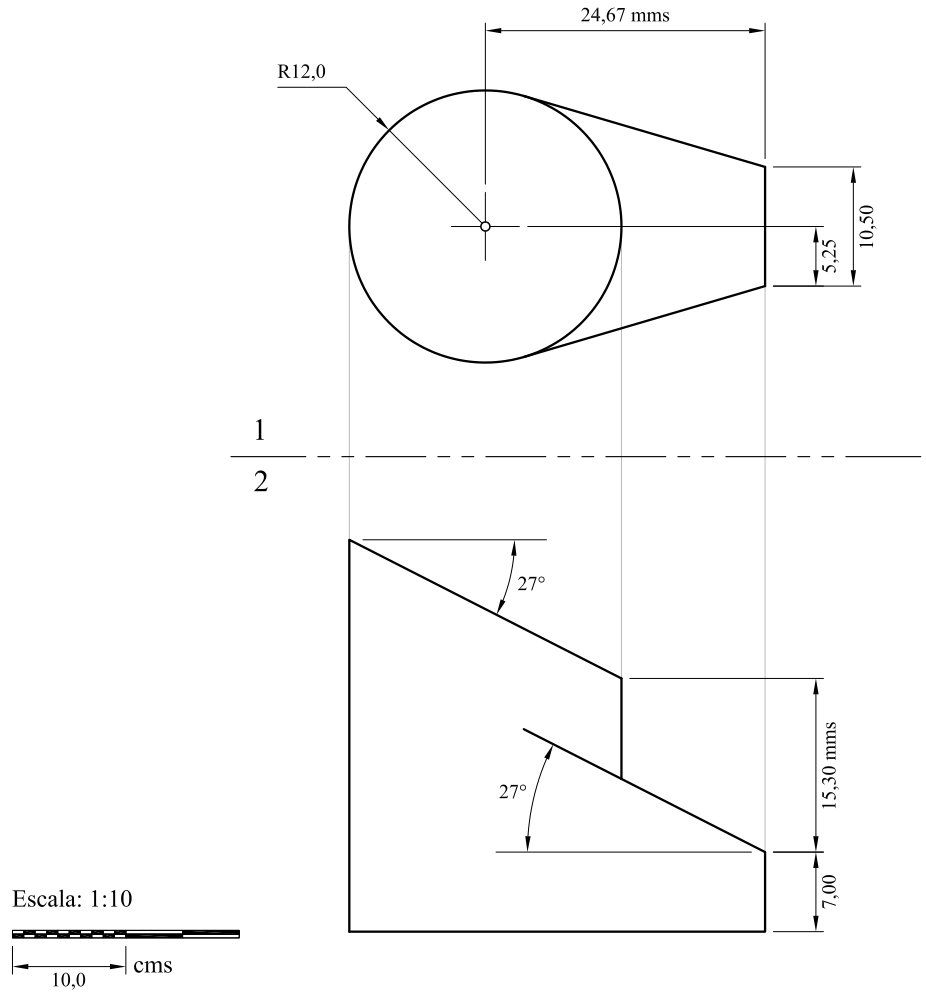
Se organizan las proyecciones verticales y horizontales, de las generatrices y diagonales por separado en el área de trabajo; las hipotenusas obtenidas representan las longitudes reales solicitadas, para luego, definir el desarrollo de todos los triángulos que conforman la pieza adaptadora *(figura 10.49).*



Desarrollo de una pieza adaptadora entre dos secciones dadas (método de Pitágoras)
Figura 10.49

10.6.3 Ejemplo 3

De acuerdo a las proyecciones de la figura expuesta a continuación, y cuyas dimensiones están dadas en mms, a escala: 1,5: 1; se requiere determinar el desarrollo completo de todos los planos; trabajar en sistema ASA, a escala: 1: 1 *(figura 10.50).*



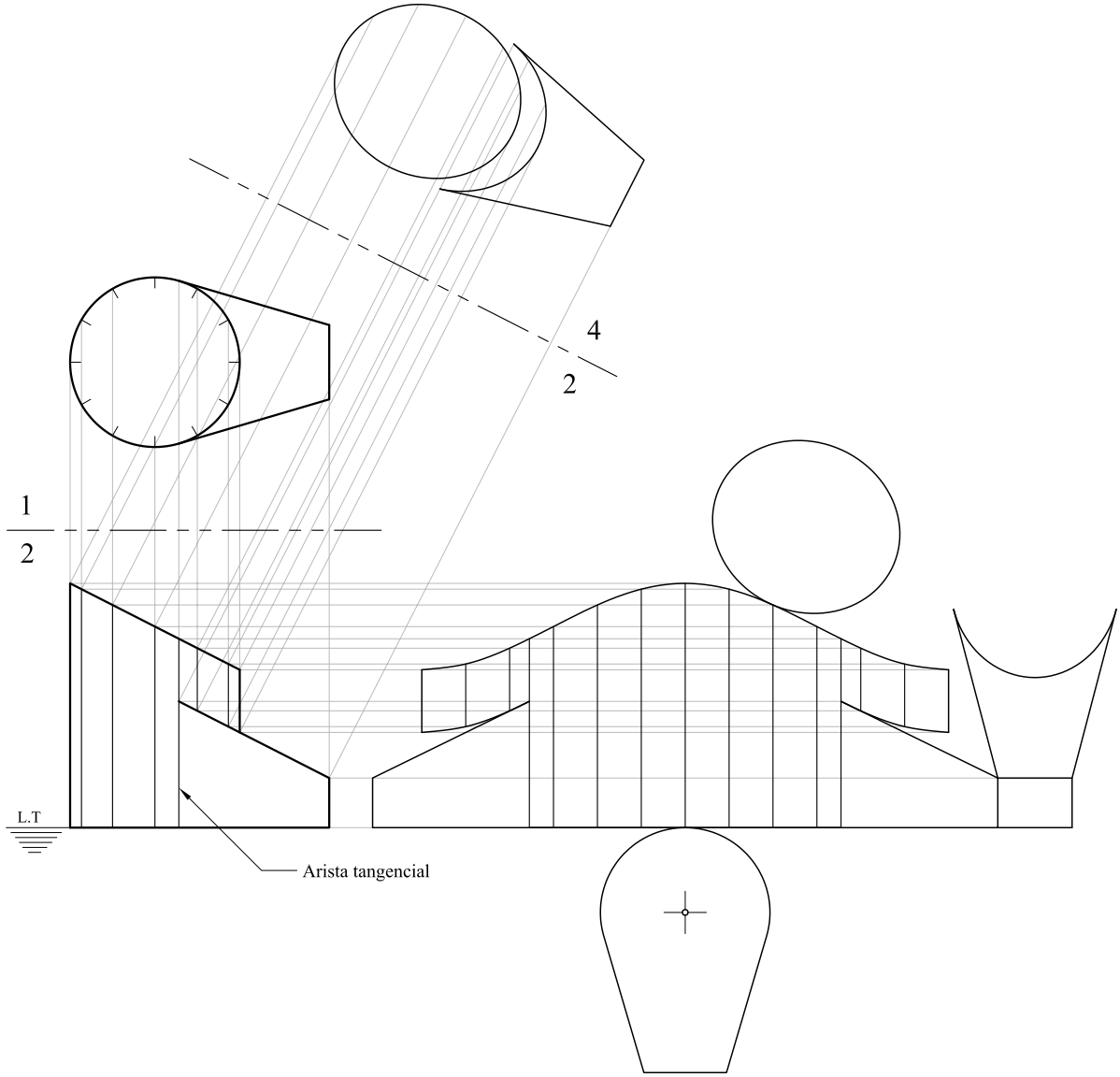
Objeto planteado para resolver
Figura 10.50

El objeto planteado consta de dos volúmenes de tipo prismático, razón por la cual, se utiliza el método paralelo para determinar el desarrollo de los planos que lo conforman.

En la vista superior se aprecia la sección media del sólido, y por lo tanto, las generatrices que definen el volumen de tipo cilíndrico se visualizarán como un punto cada una; en este caso, se han considerado doce divisiones de cuerda iguales, para ubicar las respectivas generatrices; además se debe tener en cuenta, la localización de las aristas tangenciales que existe entre ambos volúmenes.

En la vista frontal, se prolonga la línea de tierra para emplearla como una línea de desarrollo, donde se acomodan las generatrices con sus respectivas separaciones; luego, se trasladan las alturas de dichas generatrices, utilizando líneas paralelas a la línea de desarrollo, como si fuera un sistema cartesiano; de esta forma, se definen los planos laterales del sólido.

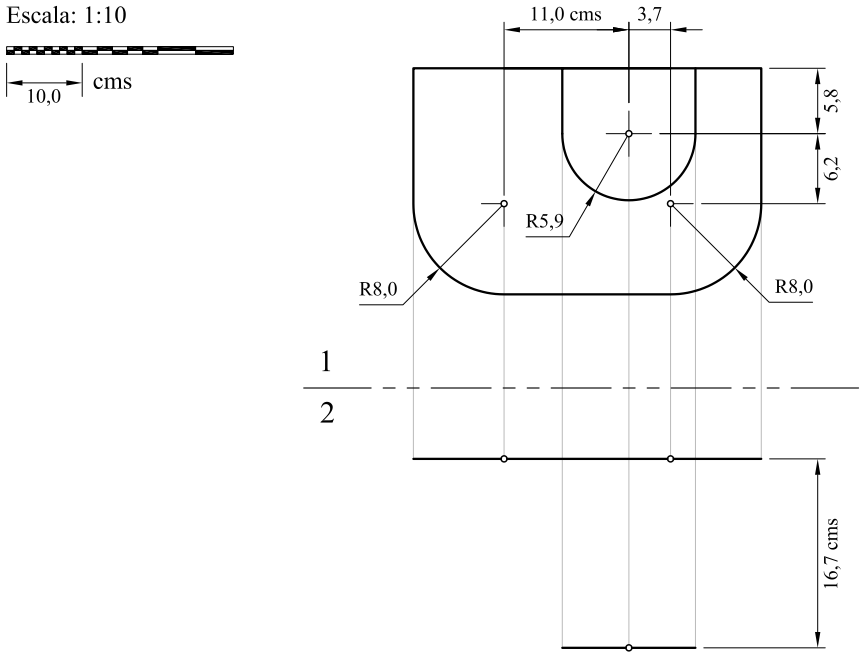
Se construye una vista inclinada 2-4 paralela a los planos de truncamiento de ambos volúmenes, para visualizar dichos planos en verdadera forma; éstos planos junto con el plano de la base, se adicionarán posteriormente al desarrollo obtenido *(figura 10.51).*



Desarrollo paralelo del objeto, ejemplo 3
Figura 10.51

10.6.4 Ejemplo 4

Diseñar y desarrollar la pieza adaptadora, que une las dos secciones dadas a continuación, utilizando el método de triangulación; trabajar en sistema ASA, a escala: 1:10 *(figura 10.52).*



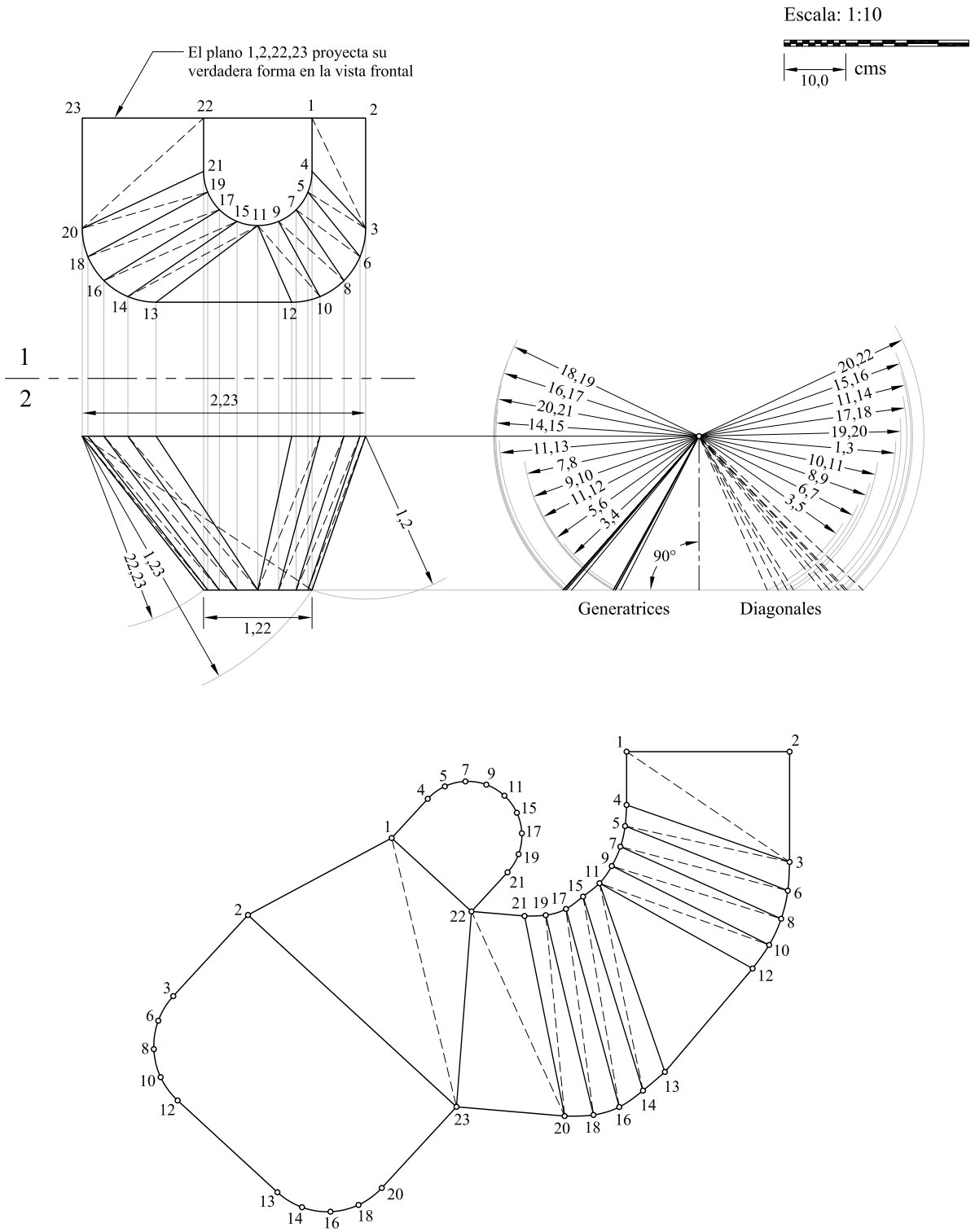
Secciones dadas para resolver la pieza adaptadora
Figura 10.52

En la vista superior, se propone conectar la mitad del círculo con los filetes correspondientes de la otra sección; para este propósito, se divide la media circunferencia en ocho cuerdas iguales, y los arcos de empalme en cuatro cuerdas iguales cada uno; de esta manera, se unen los vértices con las generatrices que definen la pieza adaptadora; al final, se triangulan los cuadriláteros, y se procede a determinar la verdadera magnitud de todas las aristas, con el método de Pitágoras.

Cabe mencionar, que ambas secciones poseen una recta lateral (perpendicular al plano lateral derecho), y entre dichas rectas se define un plano frontal, el cual proyecta su verdadera forma en la vista frontal; por consiguiente, todas las aristas que pertenezcan a dicho plano, proyectarán su verdadera magnitud en la misma vista.

Desde la vista frontal se utilizan líneas guías horizontales para trasladar las cotas de las generatrices y las diagonales, posteriormente, se mide con un compás de precisión las proyecciones horizontales de dichas rectas en la vista superior, y se trasladan al área de trabajo; de esta manera, las hipotenusas que se construyan, representarán la longitud real de las aristas referenciadas.

Finalmente, se realiza el proceso de triangulación por separado y en forma adyacente, para obtener el desarrollo de todos los planos que definen la pieza adaptadora *(figura 10.53).*

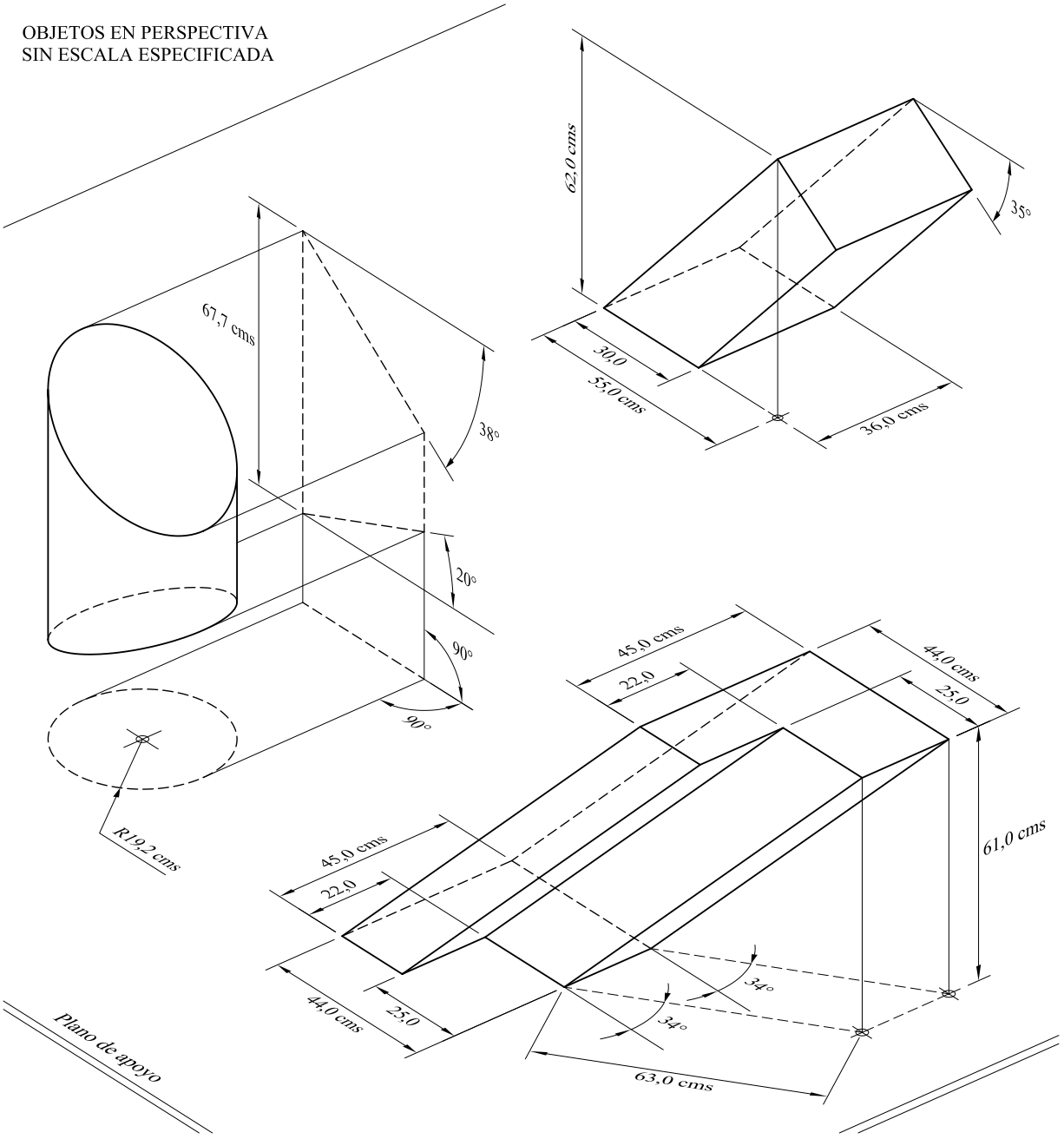


Desarrollo de una pieza adaptadora entre dos secciones dadas (método de Pitágoras)
Figura 10.53

10.7 Ejercicios

10.7.1 Ejercicio 1

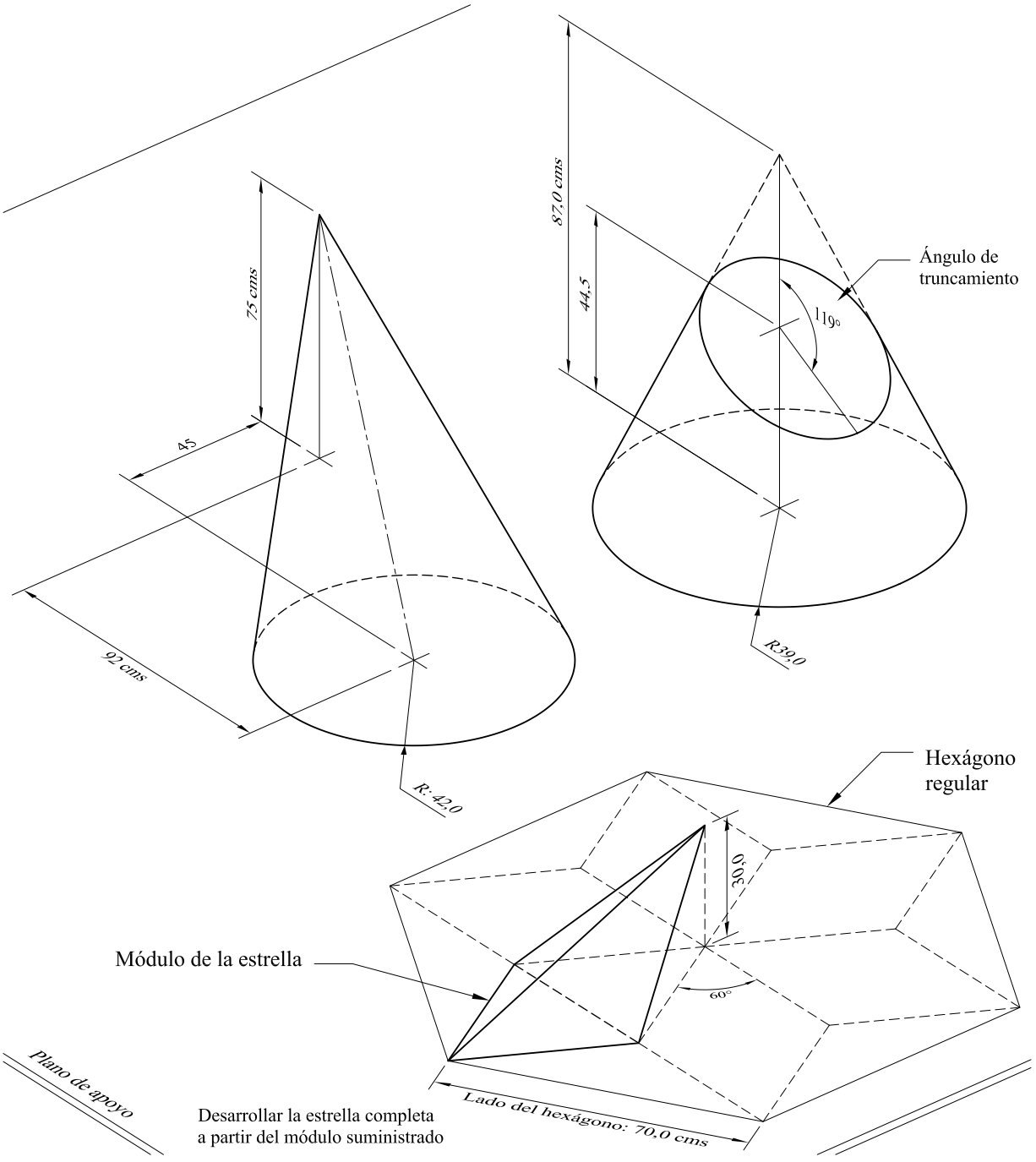
De acuerdo a los objetos proyectados en perspectiva, se requiere determinar el desarrollo de todos los planos, con el método paralelo; además, se requiere construir el modelo tridimensional; trabajar en sistema ASA, a escala 1: 7,5. Utilice el formato de papel más adecuado en cada caso, *(figura 10.54).*



Objetos planteados para resolver (método paralelo)
Figura 10.54

10.7.2 Ejercicio 2

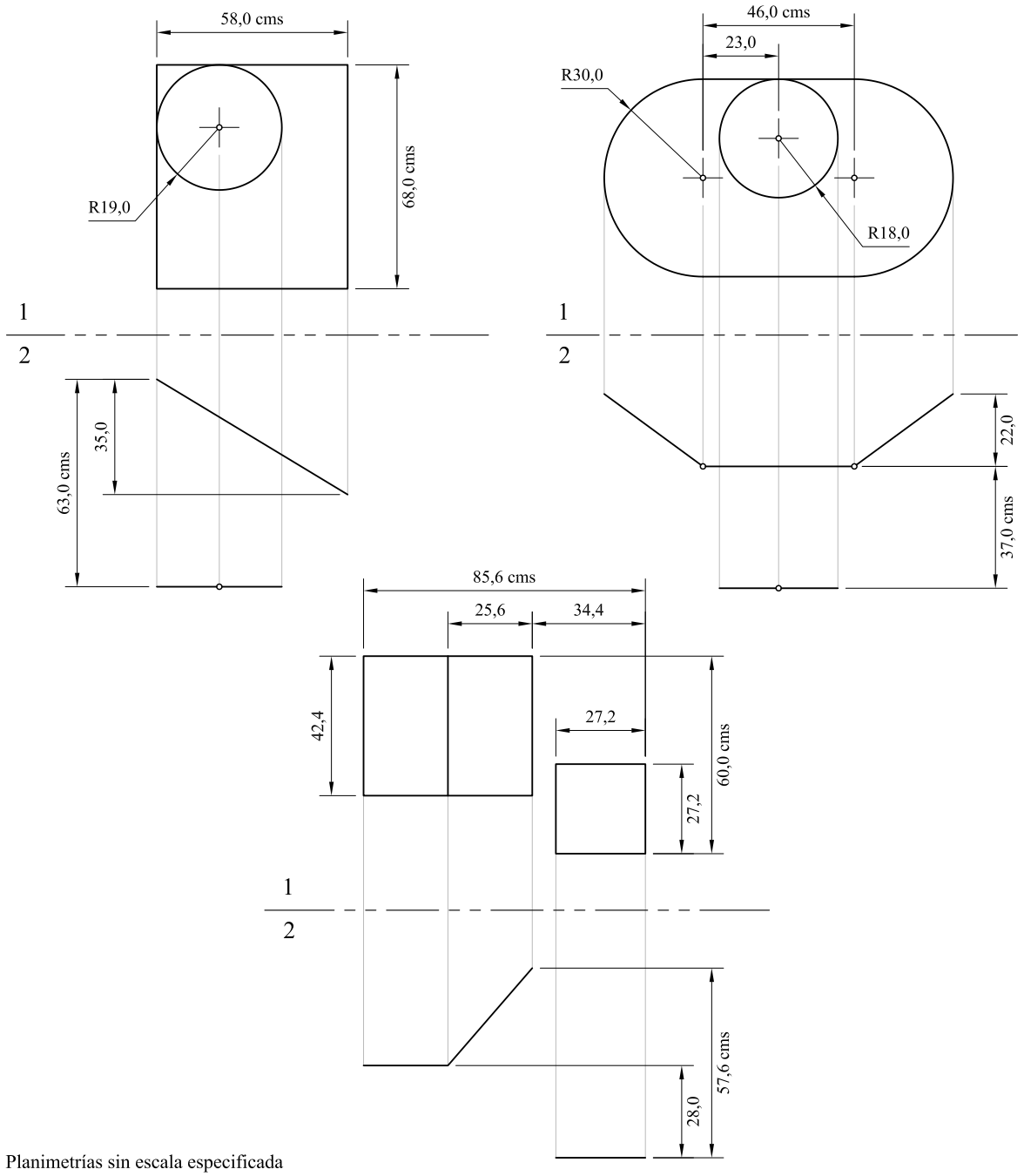
De acuerdo a los objetos proyectados en perspectiva, se requiere determinar el desarrollo de todos los planos, con el método radial; además, se requiere construir el modelo tridimensional; trabajar en sistema ASA, a escala 1: 7,5. Utilice el formato de papel más adecuado en cada caso, *(figura 10.55).*



Objetos planteados para resolver (método radial)
Figura 10.55

10.7.3 Ejercicio 3

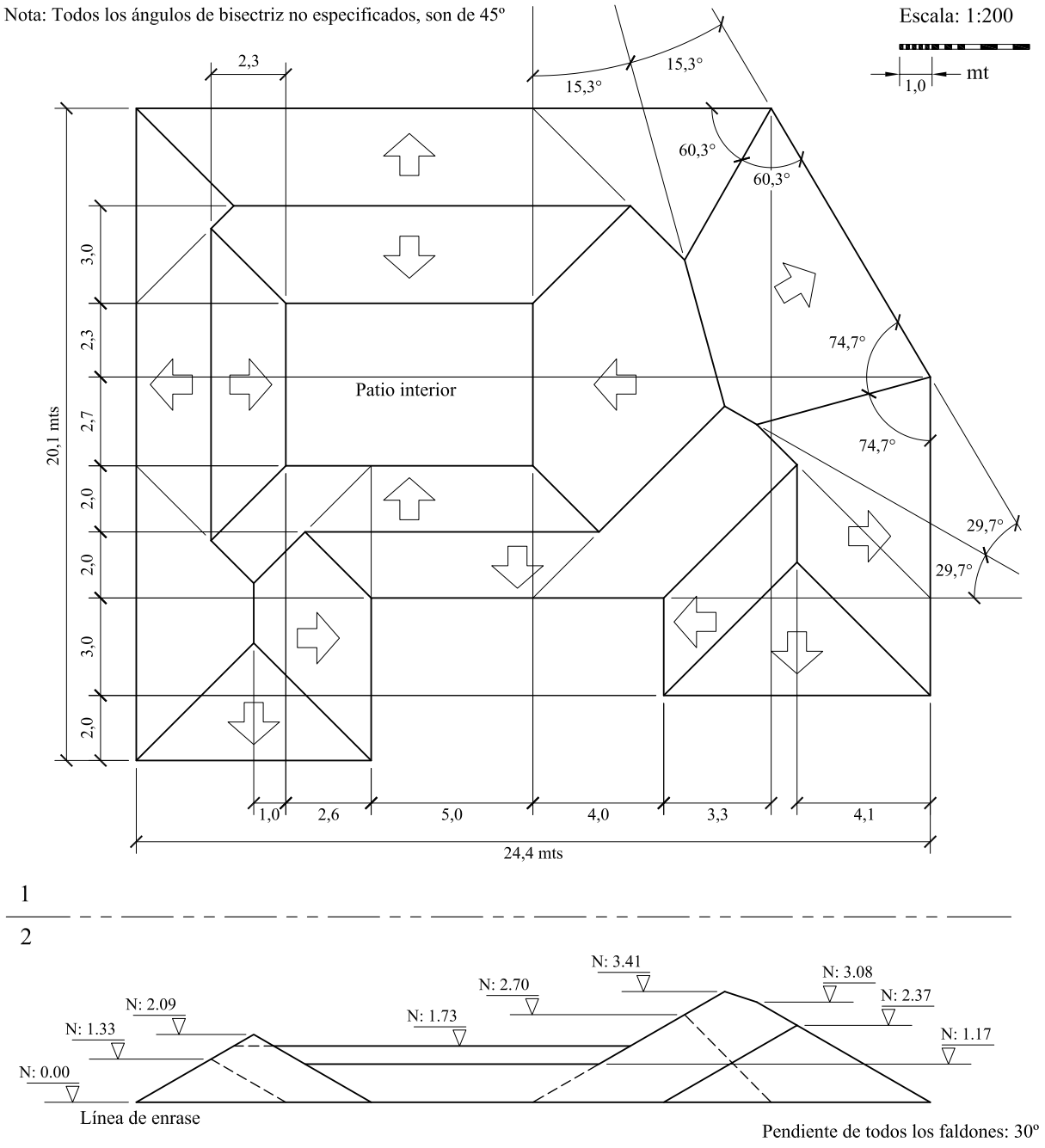
De acuerdo a los objetos proyectados en planimetría, se requiere determinar el desarrollo de todas las superficies, con el método de triangulación; además, se requiere construir el modelo 3D; trabajar en sistema ASA, a escala 1: 7,5. Utilice el formato de papel más adecuado en cada caso *(figura 10.56).*



Objetos planteados para resolver (método de triangulación)
Figura 10.56

10.7.4 Ejercicio 4

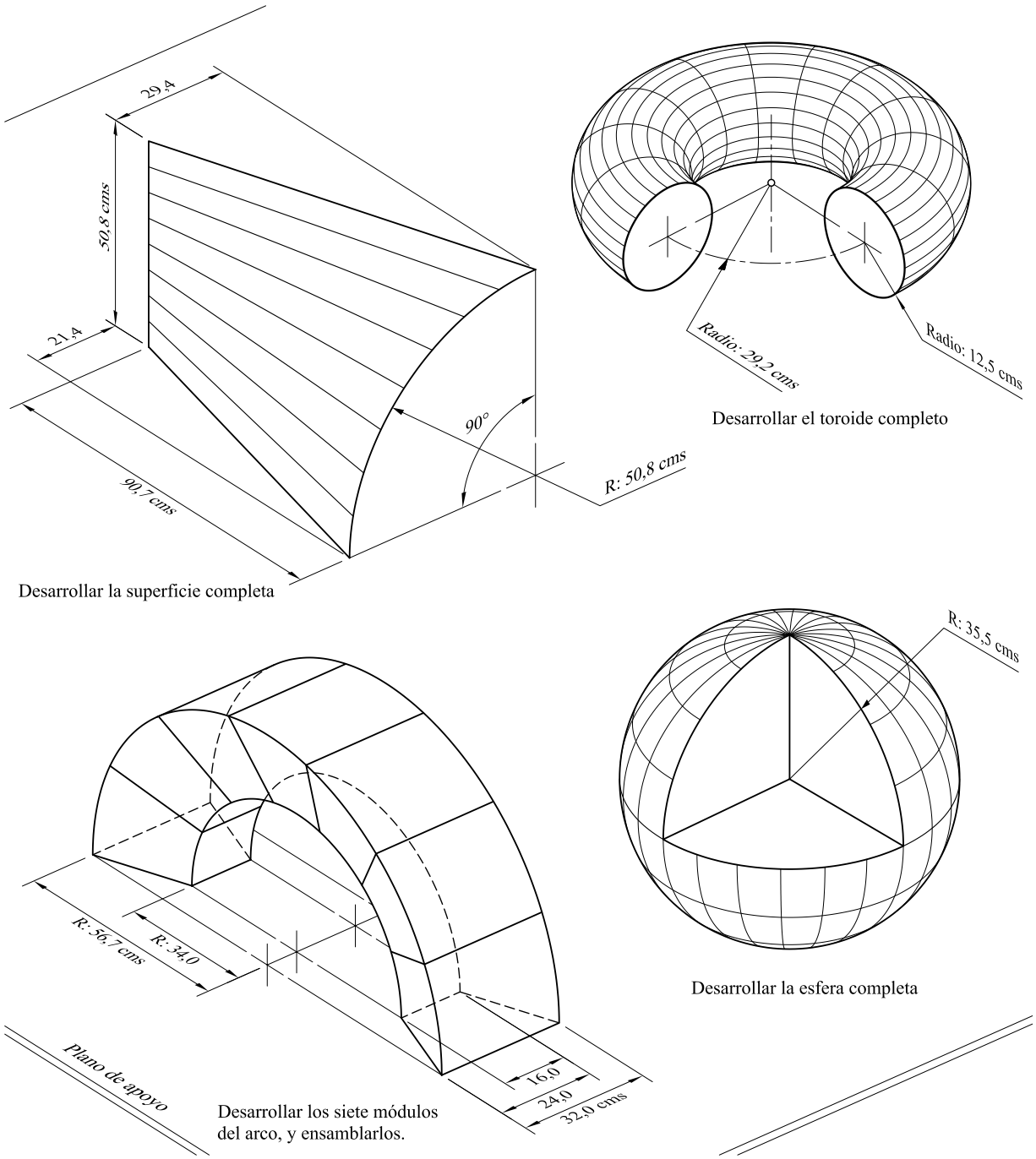
Determinar el desarrollo de todos los planos de vertientes de agua que definen la cubierta, cuyo ángulo de pendiente constante es de 30º, y sus dimensiones están dadas en mts. Utilice el método aproximado, y construya el modelo tridimensional. Trabajar en sistema ASA, a escala: 1:100. Utilice el formato de papel más conveniente *(figura 10.57).*



Planimetría de una cubierta para resolver (método aproximado)
Figura 10.57

10.7.5 Ejercicio 5

De acuerdo a los objetos proyectados en perspectiva, se requiere determinar el desarrollo de todas las superficies, con el método aproximado; además, se requiere construir el modelo 3D; trabajar en sistema ASA, a escala 1: 5. Utilice el formato de papel más adecuado en cada caso *(figura 10.58)*.



Objetos planteados para resolver (método aproximado)
Figura 10.58

Anexo 1: Teoremas

Teorema 1: *Toda recta paralela a un plano de proyección, se proyectará en verdadera magnitud.*

Teorema 2*: Toda vista adyacente a una recta proyectada como un punto, proyectará la verdadera magnitud de la recta.*

Teorema 3: *Todo plano de proyección perpendicular a una recta proyectada en verdadera magnitud, proyectará dicha recta como un punto.*

Teorema 4: *El cuadrado de la hipotenusa de un triángulo rectángulo, es igual a la suma de sus catetos al cuadrado (Teorema de Pitágoras).*

Teorema 5: *El ángulo de inclinación de una recta, se aprecia en una vista de alzada donde la recta se proyecte en verdadera magnitud.*

Teorema 6: *El ángulo real de inclinación de un plano respecto al plano de apoyo, se visualiza en una vista de alzada donde el plano se proyecta como filo.*

Teorema 7: *Todo plano perpendicular a un plano de proyección se proyecta como filo, sí y sólo sí, el plano de proyección es perpendicular a una recta contenida en el plano, y que se proyecta en verdadera magnitud.*

Teorema 8: *Toda vista adyacente a un plano proyectado en verdadera forma, proyectará el plano como una línea recta o filo.*

Teorema 9: *Todo plano de proyección paralelo a un plano que se proyecta como filo, proyectará la verdadera forma del plano.*

Teorema 10: *Dos rectas son perpendiculares entre sí, cuando una de las rectas se visualiza en verdadera magnitud, y se proyecta el ángulo de 90º entre ambas.*

Teorema 11: *Una recta es paralela a un plano, cuando la recta es paralela a una sola recta contenida en el plano.*

Teorema 12: *La distancia más corta desde un punto exterior a un plano, es la línea perpendicular trazada desde el punto hasta que intercepte al plano visto como filo.*

Teorema 13: *Una recta es perpendicular a un plano, cuando dicha recta forma un ángulo de 90º con dos rectas contenidas en el plano, proyectadas en verdadera magnitud, y que se intercepten entre sí.*

Teorema 14: *La distancia horizontal más corta desde un punto exterior a un plano dado, se proyecta en una vista de alzada, donde dicha distancia es una línea paralela que parte desde el punto, hasta interceptar al plano visto como filo.*

Teorema 15: *La distancia con pendiente conocida más corta trazada desde un punto exterior a un plano dado, se proyecta en una vista de alzada, donde dicha distancia proyecta su ángulo real de inclinación, y verdadera magnitud, hasta interceptar al plano visto como filo.*

Teorema 16: *El ángulo real proyectado entre dos rectas que se intercepten o se crucen entre sí, se aprecia en una vista donde ambas rectas se proyecten en verdadera magnitud.*

Teorema 17: *La distancia real más corta entre dos rectas que se cruzan, se aprecia en una vista donde ambas rectas se proyectan paralelas entre sí, o una de las rectas se proyecta como un punto.*

Teorema 18: *El ángulo real formado entre una recta y un plano dado, se aprecia en una vista donde la recta se proyecte en verdadera magnitud, y el plano a su vez, se proyecte como filo.*

Teorema 19: *El ángulo diedro formado entre dos planos no paralelos, cuya intersección es conocida, se aprecia en una vista donde la línea de intersección se visualiza como un punto.*

Teorema 20: *El ángulo diedro formado entre dos planos no paralelos, cuya intersección no se conoce, se aprecia en una vista donde ambos planos se proyecten como filo.*

Teorema 21: *Toda línea contenida en un plano que pase por una recta proyectada como un punto, pasará siempre por el mismo punto de intersección que hace la recta con el plano dado.*

Teorema 22: *Si dos o más planos paralelos entre sí son interceptados por un plano secante, las intersecciones obtenidas serán paralelas entre sí.*

Anexo 2: Reglas y normas

Reglas

Regla 1: *A todo punto proyectado le corresponde una sola línea de relación, desde una vista cualquiera hacia otra vista adyacente, la cual será perpendicular al eje de pliegue que las comparte.*

Regla 2: *En todas las vistas anexas entre sí, la distancia medida desde un punto hasta el plano de proyección común, es igual; es decir, la distancia medida desde el punto proyectado hasta el eje de pliegue que comparte con la vista común, es la misma en todas estas vistas.*

Regla 3: *En cada vista de alzada se percibe la línea de tierra, la cual es paralela al eje de pliegue que comparte con la vista superior.*

Regla 4: *En todas las vistas de alzada se visualiza la altura del objeto en verdadera magnitud.*

Regla 5: *En todas las vistas inclinadas nunca se aprecia la línea de tierra.*

Regla 6: *En todas las vistas inclinadas adyacentes al plano frontal de proyección, incluidas las demás vistas adyacentes al mismo, se visualiza la profundidad del objeto en verdadera magnitud.*

Regla 7: *En todas las vistas inclinadas adyacentes al plano lateral derecho de proyección, incluidas las demás vistas adyacentes al mismo, se visualiza el ancho del objeto en verdadera magnitud.*

Regla 8: *Un punto es colineal a una recta, cuando el punto pertenece a la recta, y este a su vez, estar situado en una misma línea de relación en todas las vistas.*

Regla 9: *Dos rectas se interceptan entre sí, cuando el punto de intersección común a ambas rectas se encuentra en una sola línea de relación en todas las vistas.*

Regla 10: *Dos rectas son paralelas entre sí, cuando estas se proyectan paralelas en todas las vistas.*

Regla 11: *El eje menor de la sección elíptica en verdadera magnitud es igual al diámetro del cilindro, y el eje mayor de la misma sección será mayor al diámetro del cilindro.*

Normas de visibilidad de proyecciones

Norma 1: *La línea de contorno siempre es visible.*

Norma 2: *El vértice o arista del objeto más alejado del observador, y dentro del contorno, será oculto.*

Norma 3: *El vértice o arista del objeto más cercano al observador será visible, excepto, cuando la arista se cruce con un plano visible para el observador.*

Norma 4: *Si la línea de relación que parte de un punto de la proyección no atraviesa ninguna parte de esta misma proyección; quiere decir, que el punto será visible en la nueva proyección.*

Norma 5: *Si dos aristas se cruzan en una vista, definen un punto de intersección ficticio, el cual, mediante su línea de relación, determina en su proyección adyacente, la cercanía o la lejanía de dichas aristas en la vista de referencia.*

Método visual (Método desarrollado por el Autor)

Cuando se presenta el caso de una intersección entre dos planos oblicuos, el método visual permite tantear las posibilidades de intersección de cada recta respecto a un plano sin necesidad de dibujar, simplemente se utiliza una línea guía a escuadra, teniendo en cuenta la aplicación de las siguientes reglas básicas:

a) Regla del descarte

Si una recta no se cruza con el plano en una o dos vistas, quiere decir que dicha recta no interceptará al plano; por lo tanto, no hay punto de intersección, es vacío (Ø).

b) Regla de la posibilidad

Una recta tiene posibilidad de interceptarse con un plano, cuando esta se cruza con el mismo en ambas vistas; si hay dudas, entonces se rectifica con la tercera regla.

c) Regla del cruce

Cuando una línea se cruza con un plano, quiere decir que existen dos puntos de cruce (prolongar, si es necesario); si en un punto de cruce la recta pasa por encima del plano, y en el otro punto de cruce la recta pasa por debajo del mismo, quiere decir, que existe una intersección real; en cambio, si los dos puntos de cruce de la recta pasan por debajo del plano, o por encima del mismo, significa que la recta no interceptará al plano; y por lo tanto, no habría punto de intersección, es vacío (Ø).

Bibliografía

Wellman, Leighton; Geometría descriptiva.
Segunda edición, Barcelona, editorial Reverte, S.A, 1973.

Slaby, Steve M; Geometría descriptiva tridimensional.
Publicaciones cultural, S.A. Lago Mayor 186. México 17 D.F. Unión gráfica S.A, 1968

Hawk, Minor Clyde. Teoría y problemas de geometría descriptiva.
Editorial Mc Graw Hill, México, S.A de C.V, 1970

Bertoline, Wiebe, Miller y Mohler; Dibujo en Ingeniería y comunicación gráfica.
Segunda edición, México, editorial Mc Graw-Hill interamericana editores S.A de C.V, 1999.

Yurksas, Bronislao; Dibujo geométrico y de proyección.
Novena edición, Santa Fe de Bogotá, editorial panamericana, 1993.

Jensen, Cecil H; Dibujo y Diseño en Ingeniería.
Segunda edición, México, editorial Mc Graw-Hill interamericana editores S.A de C.V, 1988.

Luzzader, Warren; Fundamentos de dibujo de Ingeniería.
Novena edición, México, editorial Prentice Hall, 1988.

French, Thomas E. y Vierck, Charles; Dibujo de Ingeniería.
Segunda edición, México, Unión tipográfica, editorial hispano americana, 1961.

Otros textos de su interés

- Administración para ingenieros, *Miguel David Rojas López*
- Agua, desagües y gas para edificaciones, *Rafael Pérez Carmona*
- Codificación en salud ocupacional, *Fernando Henao Robledo*
- Condiciones de trabajo y salud, *Fernando Henao Robledo*
- Diseño geométrico de carreteras, *James Cárdenas Grisales*
- El presupuesto y su control en un proyecto arquitectónico, *Hernando González Forero*
- Evaluación de proyectos para ingenieros, *Miguel David Rojas López*
- **Geometría descriptiva, *Germán Valencia García***
- Guía práctica de dibujo para ingeniería, *Germán Valencia*
- Introducción a la salud ocupacional, *Fernando Henao Robledo*
- Lógica de programación, *Efraín Oviedo R.*
- Manual de producción, *Carlos Bello Pérez*
- OpenOffice.org 2.0, Carlos H. González, Henry Saltarén Q.
- Pronóstico empresarial, *Carlos Bello Pérez*
- Riesgos físicos I, *Fernando Henao Robledo*
- Riesgos físicos II, *Fernando Henao Robledo*
- Riesgos físicos III, *Fernando Henao Robledo*
- Riesgos químicos, *Fernando Henao Robledo*
- Riesgos eléctricos y mecánicos, *Fernando Henao Robledo*
- Riesgos en la construcción, *Fernando Henao Robledo*
- Salud ocupacional, *Francisco Álvarez Heredia*
- Seguridad industrial, *Andrés Giraldo*
- Seguridad ocupacional, *Raúl Felipe Trujillo*

Geometría descriptiva

Al explorar el extenso campo de la geometría descriptiva, es sorprendente analizar la manera como se resuelven diversos problemas gráficos de Ingeniería y Arquitectura, aplicando teoremas, normas, y reglas elementales en un dibujo de proyección diédrica.

Esta ciencia se ofrece como asignatura obligatoria en la mayoría de planes de estudios universitarios afines al diseño, la construcción, y la medición; se fundamenta en la localización, comprensión, y análisis de los elementos geométricos situados en el espacio, para luego, interpretar y representar en un medio bidimensional; además, proporciona los métodos para definir soluciones gráficas de un determinado problema representable; también, fomenta el desarrollo de la imaginación en aquellas personas que poseen la capacidad de visualizar en la mente un objeto construido o proyectado.

Como en la actualidad se dibuja en gran parte utilizando el computador mediante diversos software de dibujo CAD, existe una tendencia a subvalorar el dibujo con instrumentos tradicionales (lápiz, escuadras, y compás); dichos recursos digitales no enseñan, ni explican los procesos analíticos y deductivos que se deben emplear para solucionar un determinado problema de geometría descriptiva, ya que se trata de una ciencia abstracta y espacial.

El propósito básico de este libro, es proporcionar al lector el conocimiento de la geometría descriptiva mediante un lenguaje ameno y comprensible para el mismo, valiéndose de explicaciones gráficas conceptuales y fundamentales en 2 y 3 dimensiones; así mismo, describiendo métodos y resolviendo ejemplos de aplicaciones propias de esta disciplina, con explicaciones detalladas, desarrollado en su mayoría en el sistema de proyección ASA; además, se aportarán algunos ejemplos y explicaciones en el sistema de proyección DIN. Al final de cada capítulo, se plantean ejercicios o problemas correspondientes al tema, para que el lector los pueda resolver.

Colección: Ingeniería y arquitectura
Área: Ingeniería

ECOE EDICIONES

978-958-648-601-9
9 789586 486019